Resolución del examen de Matemáticas II de Selectividad Andalucía – Junio de 2006

Antonio Francisco Roldán López de Hierro *

22 de junio de 2006

Opción A

Ejercicio 1 [2'5 puntos] Determina un punto de la curva de ecuación $y = xe^{-x^2}$ en el que la pendiente de la recta tangente sea máxima.

Solución : Por la propia definición, la pendiente de la recta tangente es precisamente la derivada y'. Por consiguiente, lo que se nos pregunta no es dónde alcanza y un máximo, sino su función derivada y'. La calculamos a continuación.

$$\text{Función a optimizar} \qquad f(x) = y'(x) = e^{-x^2} + x(-2x)\,e^{-x^2} = e^{-x^2}\left(1-2x^2\right).$$

¿Dónde alcanza esta función su valor máximo? Necesitamos la primera derivada de f, que es la segunda derivada de y.

$$f'(x) = y''(x) = (-2x)\,e^{-x^2}\left(1-2x^2\right) + e^{-x^2}(-4x) = e^{-x^2}\left[-2x\left(1-2x^2\right)-4x\right] =$$

$$= -2xe^{-x^2}\left(1-2x^2+2\right) = -2xe^{-x^2}\left(3-2x^2\right) = 2xe^{-x^2}\left(2x^2-3\right).$$

Dado que la función exponencial es estrictamente positiva, los puntos críticos de f son

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\left(2x^2-3\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left\{ -\frac{\sqrt{6}}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{6}}{2} \right\}.$$

Estudiamos el signo de f' en la siguiente tabla 1 (página 2). El único punto entonces en el que f alcanza un máximo relativo es en $x = 0$. Con esta información sobre su monotonía vamos a tratar de dibujarla, pero antes estudiamos si tiene alguna asíntota horizontal. En efecto,

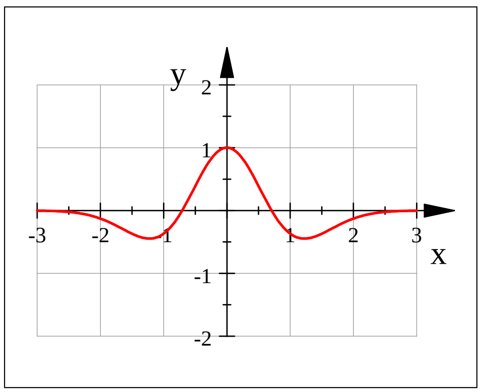
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2}\left(1-2x^2\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-2x^2}{e^{x^2}} = 0,$$

* Profesor del *I.E.S. Acci* de Guadix (Granada) - http://www.ies-acci.com/antonioroldan/

$f' = y''$	$-$	Mín	$+$	Máx	$-$	Mín	$+$
$f = y'$	$\searrow$	$-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$	$\nearrow$

Cuadro 1: Estudio del signo de f'.

ya que la función exponencial crece más rapido que cualquier función polinómica (también puede demostrarse aplicando la *regla de L'Hôpital* sólo una vez). Esto nos garantiza que el eje de abscisas, la recta horizontal $y = 0$, es una asíntota horizontal de f a ambos lados. Teniendo en cuenta la monotonía de f y su asíntota horizontal, podemos dibujar aproximadamente la gráfica de la función $f = y'$:



Esto nos ayuda a concluir que el punto en el que la función $y = xe^{-x^2}$ posee recta tangente con pendiente máxima es el punto $(0, 0)$ (en el que la pendiente es $y'(0) = f(0) = 1$). ■

Ejercicio 2 Sea $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$.

(a) **[1'25 puntos]** Expresa I aplicando el cambio de variable $t = 1 + x^2$.

(b) **[1'25 puntos]** Calcula el valor de I.

Solución : Con el cambio de variable dado, se tiene que $x^2 = t - 1$, y así $x = \sqrt{t-1}$. Derivando se obtiene que $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t-1}}$, y además los límites de integración se transforman así

$$t(x) = 1 + x^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \;\Rightarrow\; t = 1, \\ x = 2 \;\Rightarrow\; t = 5. \end{cases}$$

Entonces la integral I queda expresada de la siguiente forma en función de t:

$$I = \int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \int_1^5 \frac{\left(\sqrt{t-1}\right)^3}{\sqrt{t}} \frac{dt}{2\sqrt{t-1}} = \frac{1}{2}\int_1^5 \frac{\left(\sqrt{t-1}\right)^2}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{2}\int_1^5 \frac{t-1}{\sqrt{t}}\, dt.$$

Esto ya resuelve la primera parte del ejercicio, y ahora sólo hay que integrar y aplicar la *regla de Barrow*:

$$I = \frac{1}{2}\int_1^5 \left(\frac{t}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt = \frac{1}{2}\int_1^5 \left(t^{1/2} - t^{-1/2}\right) dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^{3/2}}{3/2} - \frac{t^{1/2}}{1/2}\right]_{t=1}^{t=5} =$$

$$= \left(\frac{t^{3/2}}{3} - t^{1/2}\right]_{t=1}^{t=5} = \left(\sqrt{t}\left(\frac{t}{3} - 1\right)\right]_{t=1}^{t=5} = \sqrt{5}\left(\frac{5}{3} - 1\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) =$$

$$= \sqrt{5}\,\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2\left(1+\sqrt{5}\right)}{3}.$$

■

Una curiosidad: como el *número áureo* es $\phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$, podemos expresar la integral anterior como:

$$I = \frac{4}{3}\,\phi.$$

Ejercicio 3 Considera $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, siendo a un número real.

(a) [1 punto] Calcula el valor de a para que $A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$.

(b) [1 punto] Calcula, en función de a, los determinantes de $2A$ y A^t, siendo A^t la traspuesta de A.

(c) [0'5 puntos] ¿Existe algún valor de a para que la matriz A sea simétrica? Razona la respuesta.

Solución : Es sencillo observar que

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}.$$

Entonces, se tiene que

$$A^2 - A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - a & -1 \\ 0 & a^2 + a \end{pmatrix}.$$

Para que esta matriz coincida con la dada, es evidente que el número a debe cumplir las dos condiciones

$$\begin{cases} a^2 - a = 12, \\ a^2 + a = 20. \end{cases}$$

Restando ambas ecuaciones se tiene que $2a = 8$, de donde $a = 4$, y ésta es la única solución válida.

Por otro lado, es inmediato que

$$\det(2A) = \begin{vmatrix} 2a & 2 \\ 0 & -2a \end{vmatrix} = -4a^2, \qquad \left(\det(2A) = 2^{\dim A} \cdot \det A\right)$$

$$\det\left(A^t\right) = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2. \qquad \left(\det\left(A^t\right) = \det A\right)$$

Finalmente, la matriz A nunca puede ser simétrica porque

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A^t = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -a \end{pmatrix},$$

y dado que los elementos que ocupan la segunda fila y la primera columna de ambas matrices son distintos ($0 \neq 1$), nunca se tendrá la igualdad $A = A^t$ y así A no puede ser simétrica. ■

Ejercicio 4 Considera el plano π de ecuación $2x + y - z + 2 = 0$ y la recta r de ecuación $\dfrac{x-5}{-2} = y = \dfrac{z-6}{m}$.

(a) **[1 punto]** Halla la posición relativa de r y π según los valores del parámetro m.

(b) **[0'75 puntos]** Para $m = -3$, halla el plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

(c) **[0'75 puntos]** Para $m = -3$, halla el plano que contiene a la recta r y es paralelo al plano π.

Solución : Para estudiar la posición relativa de r y π, intentamos determinar los puntos de corte entre ambos. En primer lugar, es claro que la recta r pasa por el punto $A_r(5, 0, 6)$ y lleva la dirección del vector $\overrightarrow{u}_r = (-2, 1, m)$. Entonces r puede expresarse en ecuaciones paramétricas

$$r \equiv \begin{cases} x = 5 - 2\lambda, \\ y = \lambda, \\ z = 6 + m\lambda. \end{cases}$$

Para que un punto de la recta r estuviese sobre el plano π, λ debería cumplir la ecuación implícita del plano π, es decir,

$$2(5 - 2\lambda) + \lambda - (6 + m\lambda) + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6 = (m + 3)\lambda.$$

Si $m = -3$, la ecuación anterior queda de la forma $0\lambda = 6$, que no tiene solución, por lo que la recta r nunca cortaría al plano π. Evidentemente, en este caso la recta r es paralela al plano π

(sin estar contenida dentro de él). Por otro lado, si $m \neq -3$, el parámetro λ queda unívocamente determinado como $\lambda = \frac{6}{m+3}$, lo que significa que la recta r corta en un único punto al plano π. Así, concluímos que la posición relativa entre r y π es

- Si $m = -3$, la recta r y el plano π son paralelos y disjuntos.
- Si $m \neq -3$, la recta r y el plano π son secantes (en un único punto).

Supongamos ahora que $m = -3$. Ya sabemos que r es paralela a π pero no se cortan. Llamemos α al plano perpendicular a π que contiene a r. Por contener a r, el plano α debe contener al punto $A_r\,(5,0,6)$ y debe llevar la dirección del vector $\overrightarrow{u}_r = (-2,1,m) = (-2,1,-3)$. Por otro lado, por ser α perpendicular a π, un vector normal al plano π, por ejemplo $\overrightarrow{n}_\pi = (2,1,-1)$, debe estar contenido en el plano α. De este modo α queda determinado porque pasa por el punto A_r y lleva la dirección de los vectores $\overrightarrow{u}_r$ y $\overrightarrow{n}_\pi$. Esto implica que un vector normal al plano α es el producto vectorial

$$\overrightarrow{n}_\alpha \quad \| \quad \overrightarrow{u}_r \times \overrightarrow{n}_\pi = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \| \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Así, una ecuación general del plano α es de la forma $\alpha \equiv x - 4y - 2z + k = 0$, y para que este plano contenga al punto $A_r\,(5,0,6)$, obligatoriamente $k = 7$. Concluimos pues que el plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π es $\alpha \equiv x - 4y - 2z + 7 = 0$.

Llamemos ahora β al plano que contiene a la recta r y es paralelo al plano π. Por ser paralelo al plano π, debe ser de la forma $\beta \equiv 2x + y - z + k' = 0$, y para contener a la recta r, debe contener al punto $A_r\,(5,0,6)$, de donde se deduce que $k' = -4$. Concluimos entonces que el plano que contiene a la recta r y es paralelo al plano π es el plano $\beta \equiv 2x + y - z - 4 = 0$. ■

Nota 1 Otra forma de resolver el apartado **(a)** del problema anterior consiste en buscar los puntos de corte entre la recta y el plano resolviendo un sistema de ecuaciones lineales, o estudiando el rango de la matriz ampliada. Veamos cómo hacerlo.

Expresamos la recta en ecuaciones implícitas, es decir, como intersección de planos.

$$\frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{m} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x-5}{-2} = y, \\ y = \dfrac{z-6}{m}, \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 5, \\ my - z = -6. \end{array} \right.$$

Entonces la intersección entre la recta r y el plano π está determinada por el sistema

$$r \cap \pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 5, \\ my - z = -6, \\ 2x + y - z = -2. \end{array} \right.$$

Estudiamos el rango de la matriz ampliada del sistema utilizando el *método de Gauss*:

$$\left\| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & m & -1 & -6 \end{array} \right\| \sim /\ F_2' = F_2 - 2F_1\ / \sim \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -12 \\ 0 & m & -1 & -6 \end{array} \right\| \sim$$

$$\sim /\ F_3'' = F_3' - F_2'\ / \sim \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 12 \\ 0 & m+3 & 0 & 6 \end{array} \right\|$$

Evidentemente, la última fila es equivalente a la ecuación $(m+3)\,y = 6$. Si $m = -3$, dicha ecuación se traduce en $0y = 6$, que no posee ninguna solución, y la recta y el plano serían paralelos y disjuntos. Si $m \neq -3$, el rango de la matriz de coeficientes coincide con el rango de la matriz ampliada, que al ser igual al número de incógnitas, nos dice que el sistema es compatible determinado. Así la recta y el plano se cortan en un único punto, y nuevamente obtenemos la misma clasificación:

- *Si $m = -3$, la recta r y el plano π son paralelos y disjuntos.*
- *Si $m \neq -3$, la recta r y el plano π son secantes (en un único punto).*

Opción B

Ejercicio 1 Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{x^4+3}{x}$, para $x \neq 0$.

(a) **[0'75 puntos]** Halla, si existen, los puntos de corte con los ejes y las asíntotas de la gráfica de f.

(b) **[1 punto]** Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de f.

(c) **[0'75 puntos]** Esboza la gráfica de f.

Solución : La función f no corta al eje de ordenadas, porque el punto $x = 0$ no pertenece al dominio. Por otro lado, f tampoco corta al eje de abscisas, porque su numerador es estrictamente positivo, y así

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 = -3, \quad \text{no tiene solución real.}$$

Deducimos pues que f no corta a ninguno de los ejes coordenados. Busquemos ahora sus posibles asíntotas. Como en el punto $x = 0$ se anula el denominador de f pero no el numerador, el eje de ordenadas $x = 0$ es una asíntota vertical de f, siendo

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \ , \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty.$$

Por otro lado, la función racional f no posee ninguna asíntota horizontal ni vertical, porque el grado del numerador es tres unidades mayor que el grado del denominador (si sus grados fuesen iguales, habría una asíntota horizontal, y si el grado del numerador fuese una unidad mayor que el del denominador, entonces habría una asíntota horizontal). En consecuencia, la única asíntota de f es la recta vertical $x = 0$.

Para estudiar su monotonía, calculamos su primera derivada:

$$f'(x) = \frac{4x^3 \cdot x - \left(x^4 + 3\right)}{x^2} = \frac{3x^4 - 3}{x^2}.$$

Sus únicos puntos críticos son

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^4 - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1.$$

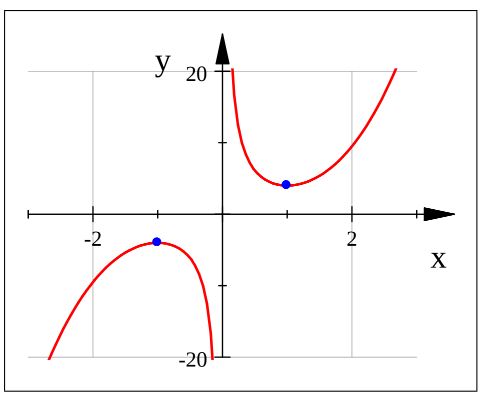
En la siguiente tabla estudiamos la monotonía y los extremos relativos de f.

f'	$-$	Mín	$+$	A.V.	$-$	Mín	$+$
f	$\nearrow$	-1	$\searrow$	0	$\searrow$	1	$\nearrow$

Deducimos entonces que

$$\text{Monotonía} \begin{cases} f \text{ creciente en }]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\,, \\ \\ f \text{ decreciente en }]-1, 0[\cup]0, 1[\,. \end{cases} \qquad \text{Extremos} \begin{cases} \text{Máximo rel. en } (-1, -4)\,, \\ \\ \text{Mínimo rel. en } (1, 4)\,. \end{cases}$$

Con todos estos datos, podemos dibujar la gráfica de f como sigue.



■

Ejercicio 2 [2'5 puntos] El área del recinto limitado por las curvas de ecuaciones $y = \dfrac{x^2}{a}$ e $y = \sqrt{ax}$, con $a > 0$, vale 3. Calcula el valor de a.

Solución : En primer lugar, determinamos los puntos en los que se cortan las dos curvas.

$$\frac{x^2}{a} = \sqrt{ax} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^4}{a^2} = ax \quad \Leftrightarrow \quad x^4 = a^3 x \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - a^3 x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\left(x^3 - a^3\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{o bien } x = 0 & \Leftrightarrow \quad x_1 = 0, \\ \text{o bien } x^3 = a^3 & \Leftrightarrow \quad x_2 = a. \end{cases}$$

Si no sabemos dibujar las funciones, establecemos directamente la condición sobre el área e integramos utilizando la *regla de Barrow*:

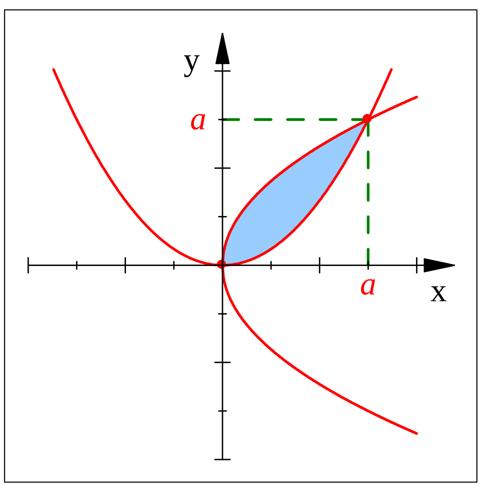
$$3 \text{ u.c.s.} \;= A = \left| \int_0^a \left(\frac{x^2}{a} - \sqrt{ax} \right) dx \right| = \left| \frac{1}{a} \int_0^a x^2 \, dx - \sqrt{a} \int_0^a \sqrt{x} \, dx \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{a} \left(\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=a} - \sqrt{a} \left(\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_{x=0}^{x=a} \right| = \left| \frac{1}{a} \left(\frac{a^3}{3} - 0 \right) - \sqrt{a} \left(\frac{2}{3} a^{3/2} - 0 \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{a^2}{3} - \frac{2a^2}{3} \right| = \left| -\frac{a^2}{3} \right| = \frac{a^2}{3}.$$

Entonces $a^2 = 9$ y como sabemos que $a > 0$, concluimos que $a = 3$. ■

Una representación gráfica del área anterior se podía dibujar conociendo las formas de las funciones parabólica y raíz cuadrada, sabiendo que $a > 0$.



Obsérvese cómo las gráficas de las funciones parabólica y raíz cuadrada dividen al cuadrado de lado a en tres regiones de igual área: la obtenida en el ejercicio anterior $(a^2/3)$.

Ejercicio 3 [2'5 puntos] Resuelve

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Solución : El sistema anterior es equivalente a

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

que se resume en el sistema con tres ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + 5z = 7, \\ x + y - 2z = -2, \\ -x + y + z = -1. \end{cases}$$

Resolvemos el sistema utilizando el *método de Gauss*.

$$\left\| \begin{array}{cccc} 2 & 0 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right\| \sim \Bigg/ \begin{array}{c} F_1' = F_2, \\ F_2' = F_3 + F_2, \\ F_3' = F_1 - 2F_2 \end{array} \Bigg/ \sim \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 9 & 11 \end{array} \right\| \sim$$

$$\sim \Bigg/ \begin{array}{c} F_1' = F_2, \\ F_3'' = F_3' + F_2', \end{array} \Bigg/ \sim \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \end{array} \right\|$$

Se deduce inmediatamente que $z = 1$, de aquí $y = -1$ y finalmente $x = 1$. Por tanto, el sistema es compatible determinado y su única solución es $\{\ x = 1,\ y = -1,\ z = 1\ \}$. ■

También se podía haber resuelto el sistema utilizando la *regla de Cràmer*, ya que

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2 + 0 + 5) - (-5 + 0 - 4) = 7 + 9 = 16 \neq 0,$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{16} = \frac{(7 + 0 - 10) - (-5 + 0 - 14)}{16} = \frac{-3 + 19}{7 + 9} = \frac{16}{16} = 1,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{16} = \frac{(-4 + 14 - 5) - (10 + 7 + 4)}{16} = \frac{5 - 21}{16} = \frac{-16}{16} = -1,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{16} = \frac{(-2 + 0 + 7) - (-7 + 0 - 4)}{16} = \frac{5 + 11}{16} = \frac{16}{16} = 1.$$

O también se podía haber resuelto utilizando la matriz inversa de A:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 16 \\ -16 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4 Considera el punto $P(3,2,0)$ y la recta r de ecuaciones $\left\{ \begin{array}{l} x+y-z-3=0, \\ x+2z+1=0. \end{array} \right.$

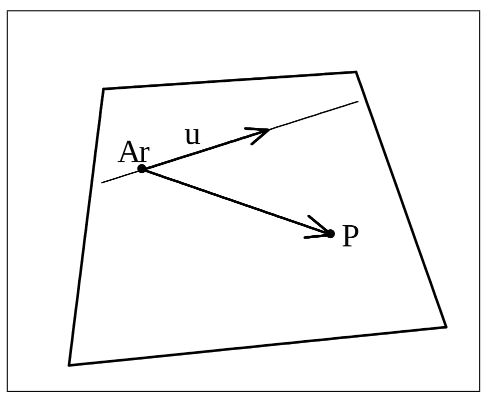
(a) [1 punto] Halla la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r.

(b) [1'5 puntos] Determina las coordenadas del punto Q simétrico de P respecto de la recta r.

Nota 2 Este ejercicio es idéntico a [**2005 - Modelo 1 - Opción A - Ejercicio 4**].

Solución: Llamemos π al plano que contiene a P y a r. Evidentemente, π viene determinado por el punto P y los vectores $\vec{u}_r$ (director de la recta r) y $\overrightarrow{A_r P}$, donde A_r es cualquier punto de la recta r. Elijamos, por ejemplo, $A_r(-1,4,0)$, de donde $\overrightarrow{A_r P} = (3,2,0) - (-1,4,0) = (4,-2,0) \parallel (2,-1,0)$, y elijamos como vector director de r al producto vectorial

$$\vec{u}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$



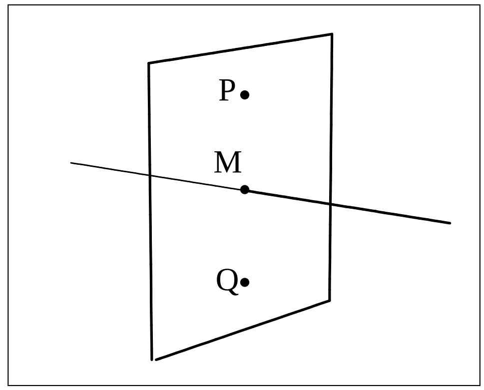
Un vector normal al plano π puede elegirse así:

$$\vec{n}_\pi \parallel \vec{u}_r \times \frac{1}{2}\overrightarrow{A_r P} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Entonces una ecuación general del plano π es de la forma $x + 2y - 4z + k = 0$, y para que el punto $P(3,2,0)$ pertenezca a este plano, obligatoriamente $k = -7$ y, así, una ecuación del plano que contiene a P y a r es $\pi \equiv x + 2y - 4z - 7 = 0$.

Para calcular el punto Q, simétrico de P respecto de r, llamemos α al plano perpendicular a r que pasa por P. Cualquier vector normal a α es paralelo a cualquier vector director de r, por lo que podemos tomar $\vec{n}_\alpha = \vec{u}_r = (2, -3, -1)$. Así $\alpha \equiv 2x - 3y - z + k' = 0$, y para que $P\,(3, 2, 0)$ pertenezca a α es necesario que $k' = 0$, por lo que $\alpha \equiv 2x - 3y - z = 0$. Llamemos M al único punto donde r corta a α, es decir, a la proyección ortogonal del punto P sobre la recta r. Sus coordenadas vienen dadas por

$$M = r \cap \alpha \equiv \begin{cases} x + y - z = 3, \\ x + 2z = -1, \\ 2x - 3y - z = 0. \end{cases}$$



Resolvemos el sistema utilizando el *método de Gauss*.

$$\left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \end{array} \right\| \sim \Bigg/ \begin{array}{c} F_1' = F_2, \\ F_2' = F_1 - F_2, \\ F_3' = F_3 - 2F_2 \end{array} \Bigg/ \sim \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & -5 & 2 \end{array} \right\| \sim$$

$$\sim \big/\ F_3'' = F_3' + 3F_2' \ \big/ \sim \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -14 & 14 \end{array} \right\|$$

La única solución del sistema es ahora $z = -1$, $y = 1$ y $x = 1$, lo que nos indica que la proyección ortogonal M del punto P sobre la recta r es $M\,(1, 1, -1)$. Entonces

$$\overrightarrow{PM} = (1, 1, -1) - (3, 2, 0) = (-2, -1, -1),$$

y dado que M es el punto medio entre P y Q, se concluye que

$$\overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{PM} \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{q} = \overrightarrow{p} + 2\overrightarrow{PM} = (3, 2, 0) + 2\,(-2, -1, -1) = (-1, 0, -2)\,,$$

lo que significa que el punto simétrico de P respecto de la recta r es $Q\,(-1, 0, -2)$. ■