Capítulo 1

Matemáticas II: Exámenes de Selectividad 2005

El objeto de las presentes notas es dar a conocer algunas formas de resolver los modelos de exámenes de **MATEMÁTICAS II** que se propusieron en los procesos selectivos para el acceso a la Universidad del año 2005 en Andalucía. El modelo 1 fue propuesto para el examen de junio y el modelo 6 para el control de septiembre.

1.1. Modelo 1 - JUNIO

1.1.1. Opción A

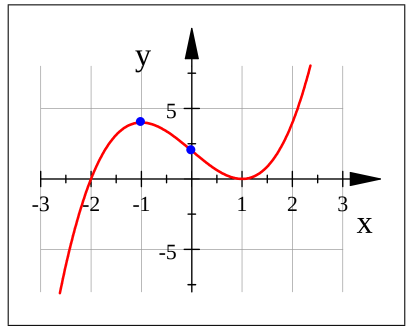
Ejercicio 1 *[***2'5 puntos***]* De la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo en $x = -1$, y que su gráfica corta en el punto de abscisa $x = -2$ y tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 0$. Calcula a, b, c y d sabiendo, además, que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene pendiente 9.

Solución : Es claro que $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ y que $f''(x) = 6ax + 2b$. Transformamos los datos del problema en cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$\begin{array}{llllll}
\text{Máximo en } x = -1 & \Rightarrow & f'(-1) = 0 & \Leftrightarrow & 3a - 2b + c = 0, \\
\text{Corta } OX \text{ en } x = -2 & \Leftrightarrow & f(-2) = 0 & \Leftrightarrow & -8a + 4b - 2c + d = 0, \\
\text{Punto inflexión en } x = 0 & \Rightarrow & f''(0) = 0 & \Leftrightarrow & 2b = 0, \\
\text{Pendiente 9 en } x = 2 & \Leftrightarrow & f'(2) = 9 & \Leftrightarrow & 12a + 4b + c = 9.
\end{array}$$

De la tercera condición se deduce que $b = 0$. Así, las condiciones primera y cuarta se transforman en $3a + c = 0$ y $12a + c = 9$, cuya única solución es $a = 1$ y $c = -3$. Por último, la segunda condición nos obliga a que $d = 8a - 4b + 2c = 2$. Así

$$a = 1,\ b = 0,\ c = -3,\ d = 2 \quad \Rightarrow \quad f(x) = x^3 - 3x + 2.$$

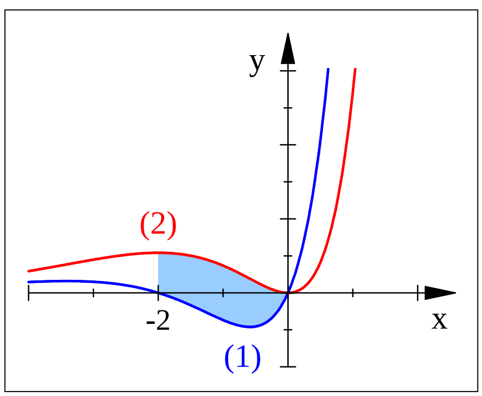


■

Ejercicio 2 Se sabe que las dos gráficas del dibujo corresponden a la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2\, e^x$ y a su función derivada f'.

(a) *[**1 punto**]* Indica, razonando la respuesta, cuál es la gráfica de f y cuál la de f'.

(b) *[**1'5 puntos**]* Calcula el área de la región sombreada.



Solución: La forma más rápida de determinar cuál es f es mirar sus puntos de corte con el eje OX, ya que se ve en la gráfica que la función (1) se anula dos veces (en $x = -2$ y en $x = 0$), mientras que la función (2) sólo se anula en un único punto ($x = 0$). Dado que la función $f(x) = x^2\, e^x$ sólo se anula si $x = 0$ (porque la exponencial es estrictamente positiva), podemos afirmar que obligatoriamente f ha de ser la función (2). Su función derivada, $f'(x) = \left(x^2 + 2x\right) e^x$, se anula dos veces, en $x = -2$ y en $x = 0$, por lo que debe ser la función (1). Coherentemente, donde f tiene un mínimo ($x = 0$) y un máximo ($x = -2$), la función f' se anula.

El área pedida es

$$A = \int_{-2}^{0} \left(f(x) - f'(x)\right)\, dx = \int_{-2}^{0} \left(x^2\, e^x - \left(x^2+2x\right)\, e^x\right)\, dx = -2\int_{-2}^{0} x\, e^x\, dx.$$

Utilizando el método de integración por partes, el área anterior es

$$A = \left| \begin{array}{ll} u = x, & du = dx \\ dv = e^x\, dx, & v = e^x \end{array} \right| = -2\left[\left(\, x\, e^x \right]_{x=-2}^{x=0} - \int_{-2}^{0} e^x\, dx\right] =$$

$$= -2\left(\, (x-1)\, e^x \right]_{x=-2}^{x=0} = = -2\left(-e^0 - \left(-3e^{-2}\right)\right) = 2\left(1 - \frac{3}{e^2}\right) = \frac{2\left(e^2-3\right)}{e^2}.$$

■

Ejercicio 3 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) *[**1 punto**]* ¿Tiene A inversa? En caso afirmativo, calcúlala.

(b) *[**1'5 puntos**]* Determina la matriz X que cumple que $A \cdot X + C \cdot B^t = B \cdot B^t$, siendo B^t la matriz transpuesta de B.

Solución: Dado que $\det A = -7 \neq 0$, la matriz A es inversible y su inversa es

$$A^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

La ecuación matricial es muy secilla, pues

$$A \cdot X + C \cdot B^t = B \cdot B^t \;\Leftrightarrow\; A \cdot X = B \cdot B^t - C \cdot B^t = (B - C)\cdot B^t \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; X = A^{-1} \cdot (B - C) \cdot B^t.$$

Haciendo operaciones con matrices

$$X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 1 & -26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{4}{7} & \dfrac{6}{7} \\ \dfrac{1}{7} & -\dfrac{26}{7} \end{pmatrix}.$$

■

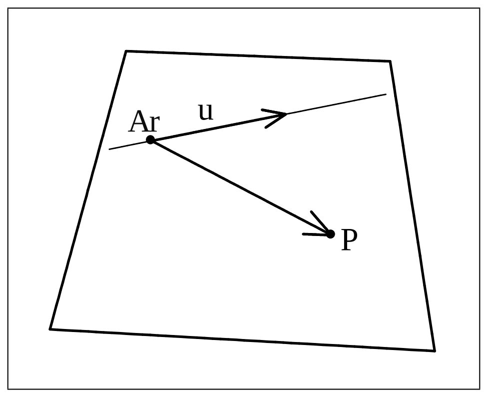
Ejercicio 4 Considera el punto $P\,(2,0,1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+2y=6, \\ z=2. \end{cases}$

(a) *[**1 punto**]* Halla la ecuación del plano que contiene a P y a r .

(b) *[**1'5 puntos**]* Calcula el punto simétrico de P respecto de la recta r.

Solución: Llamemos π al plano que contiene a P y a r. Evidentemente, π viene determinado por el punto P y los vectores $\vec{u}_r$ (director de la recta r) y $\overrightarrow{A_rP}$, donde A_r es cualquier punto de la recta r. Elijamos, por ejemplo, $A_r\,(2,2,2)$, de donde $\overrightarrow{A_rP} = (0,-2,-1)$, y elijamos como vector director de r al producto vectorial

$$\vec{u}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



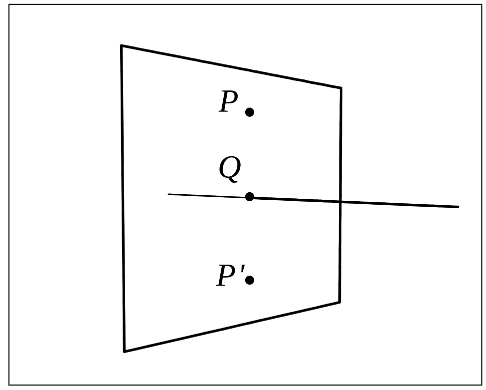
Un vector normal al plano π puede elegirse así:

$$\vec{n}_\pi = \vec{u}_r \times \overrightarrow{A_rP} = (2,-1,0) \times (0,-2,-1) = (1,2,-4)\,.$$

Entonces una ecuación general del plano π es de la forma $x+2y-4z+k=0$, y para que el punto $P\,(2,0,1)$ pertenezca a este plano, obligatoriamente $k=2$ y, así, una ecuación de π es $\pi \equiv x+2y-4z+2=0$.

Para calcular el punto P', simétrico de P respecto de r, llamemos α al plano perpendicular a r que pasa por P. Cualquier vector normal a α es paralelo a cualquier vector director de r, por lo que podemos tomar $\vec{n}_\alpha = \vec{u}_r = (2,-1,0)$. Así $\alpha \equiv 2x-y+k'=0$, y para que $P\,(2,0,1)$ pertenezca a α es necesario que $k'=-4$, por lo que $\alpha \equiv 2x-y-4=0$. Llamemos Q al único punto donde r corta a α. Sus coordenadas vienen dadas por

$$Q = r \cap \alpha \equiv \left\{ \begin{array}{c} x + 2y = 6, \\ z = 2, \\ 2x - y = 4\ . \end{array} \right\} = \left(\frac{14}{5}, \frac{8}{5}, 2 \right).$$



Entonces $\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}, 1 \right)$, y dado que Q es el punto medio entre P y P', se concluye que

$$\overrightarrow{PP'} = 2\overrightarrow{PQ} \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{p'} = \overrightarrow{p} + 2\overrightarrow{PQ} = (2,0,1) + 2\ \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}, 1 \right) = \left(\frac{18}{5}, \frac{16}{5}, 3 \right),$$

lo que significa que $P' \left(\frac{18}{5}, \frac{16}{5}, 3 \right)$. ■

1.1.2. Opción B

Ejercicio 1 Sea f la función definida para $x \neq 0$ por $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.

(a) *[**1 punto**]* Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

(b) *[**1 punto**]* Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

(c) *[**0'5 puntos**]* Esboza la gráfica de f.

SOLUCIÓN: Como en el punto $x = 0$ se anula el denominador de f pero no el numerador, el eje de ordenadas $x = 0$ es una asíntota vertical de f, siendo

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty\ , \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty.$$

Además, dado que $f(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}$, la recta $y = x$ es asíntota oblícua de f a la izquierda y a la derecha, lo cual también se puede demostrar observando que

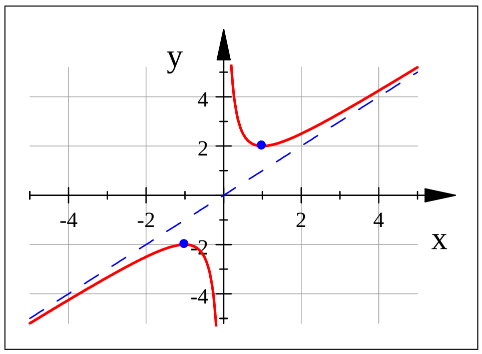
$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1, \qquad n = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+1-x^2}{x} = 0.$$

Por otro lado, dado que $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$, los únicos puntos críticos de f son $x = \pm 1$. Un sencillo estudio del signo de la derivada de f (teniendo en cuenta que su denominador es siempre positivo) demuestra que

$$\begin{array}{c|ccccccccc} f' & & + & \text{Máx} & - & & - & \text{Mín} & + & \\ \hline f & & \nearrow & -1 & \searrow & 0 & \searrow & 1 & \nearrow & \end{array}$$

$$\text{Monotonía} \left\{ \begin{array}{l} f \text{ creciente en } \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[, \\ \\ f \text{ es decreciente en } \left]-1, 0\right[\cup \left]0, 1\right[. \end{array} \right. \qquad \text{Extremos} \left\{ \begin{array}{l} \text{Máximo rel. en } (-1, -2), \\ \\ \text{Mínimo rel. en } (1, 2). \end{array} \right.$$

Así, la gráfica de f es la adjunta.



■

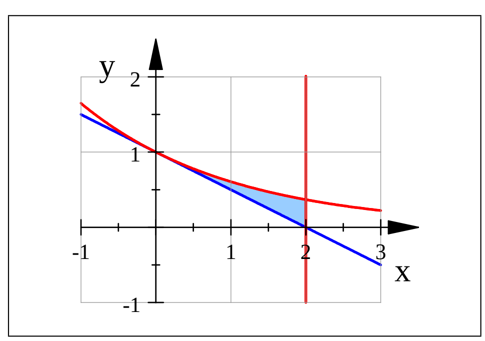
Ejercicio 2 Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-x/2}$.

(a) *[**0'75 puntos**]* Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

(b) *[**1'75 puntos**]* Calcula el área de la región acotada que está limitada por la gráfica de f, la recta de ecuación $x = 2$ y la recta tangente obtenida en **(a)**.

Solución: Dado que $f'(x) = -\frac{1}{2}\, e^{-x/2}$, se tiene que $f'(0) = -\frac{1}{2}$. Como $f(0) = 1$, la recta tangente es:

$$y - f(0) = f'(0)\ (x - 0) \ \Leftrightarrow\ y = 1 - \frac{1}{2}x = \frac{2-x}{2}.$$



Entonces el área pedida es

$$A=\int_0^2\left(e^{-x/2}-\frac{2-x}{2}\right)\,dx=\left(-2e^{-x/2}-x+\frac{x^2}{4}\right]_{x=0}^{x=2}=$$

$$=\left(-\frac{2}{e}-2+1\right)-(-2-0+0)=1-\frac{2}{e}=\frac{e-2}{e}.$$

■

Ejercicio 3 Considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{aligned} x+y+z&=-2,\\ -\lambda x+3y+z&=-7,\\ x+2y+(\lambda+2)\,z&=-5.\end{aligned}\right.$$

(a) *[**1'5 puntos**]* Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.

(b) *[**1 punto**]* Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

Solución : Calculamos el determinante de la matriz del sistema utilizando las propiedades de los determinantes.

$$\det A=\begin{vmatrix}1&1&1\\-\lambda&3&1\\1&2&\lambda+2\end{vmatrix}=\qquad\Big/\ \begin{matrix}F_2'=F_2-3F_1\\ F_3'=F_3-2F_1\end{matrix}\ \Big/$$

$$=\begin{vmatrix}1&1&1\\-\lambda-3&0&-2\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=\qquad /\text{ desarrollando por la segunda columna }/$$

$$=-\begin{vmatrix}-\lambda-3&-2\\-1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+3&-2\\1&\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=\lambda\ (\lambda+3)+2=\lambda^2+3\lambda+2=(\lambda+1)\,(\lambda+2)\,.$$

Evidentemente, el determinante sólo se anula si $\lambda\in\{-2,-1\}$, por lo que es inmediato que si $\lambda\in\mathbb{R}-\{-2,-1\}$, el sistema es compatible determinado. Analizamos los dos casos que quedan utilizando el método de Gauss:

$$\lambda=-1,\quad \left\|\begin{array}{cccc}1&1&1&-2\\1&3&1&-7\\1&2&1&-5\end{array}\right\|\begin{array}{cccc}1&1&1&-2\\0&2&0&-5\\0&1&0&-3\end{array}\left\|\begin{array}{cccc}1&1&1&-2\\0&1&0&-3\\0&0&0&1\end{array}\right\| \text{ Incompatible.}$$

$$\lambda=-2,\quad \left\|\begin{array}{cccc}1&1&1&-2\\2&3&1&-7\\1&2&0&-5\end{array}\right\|\begin{array}{cccc}1&1&1&-2\\0&1&-1&-3\\0&1&-1&-3\end{array}\left\|\begin{array}{cccc}1&1&1&-2\\0&1&-1&-3\\0&0&0&0\end{array}\right\| \text{ Comp. indeterminado.}$$

La clasificación completa del sistema es

- Si $\lambda \in \mathbb{R} - \{-2,-1\}$, el sistema es compatible determinado.
- Si $\lambda = -1$, el sistema es incompatible.
- Si $\lambda = -2$, el sistema es compatible indeterminado.

En particular, el sistema es compatible indeterminado cuando $\lambda = -2$, y su solución en este caso es

$$\left\{\begin{array}{r} x+y+z=-2, \\ y-z=-3, \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad /\ \mu = z\ / \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x=-2\mu+1, \\ y=\mu-3 \\ z=\mu. \end{array}\right.$$

■

Ejercicio 4 Sean los vectores $\vec{v}_1 = (0,1,0)$, $\vec{v}_2 = (2,1,-1)$ y $\vec{v}_3 = (2,3,-1)$.

(a) *[**0'75 puntos**]* ¿Son los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ linealmente dependientes?

(b) *[**0'75 puntos**]* ¿Para qué valor de a el vector $(4, a+3, -2)$ puede expresarse como combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$?

(c) *[**1 punto**]* Calcula un vector unitario y perpendicular $\vec{v}_1$ y a $\vec{v}_2$.

Solución : Para estudiar la dependencia o independencia lineal de los vectores, calculamos su determinante:

$$\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

porque la primera y la tercera columnas son proporcionales. Por consiguiente, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ son linealmente dependientes. Es claro ahora que $\vec{v}_3$ es combinación lineal de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$. Así, para ver si

$\vec{u} = (4, a+3, -2)$ puede expresarse como combinación lineal de $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$, estudiamos si puede expresarse en función de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ estudiando el siguiente determinante

$$\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & a+3 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Al ser este determinante siempre nulo, el conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u}\}$ es linealmente dependiente, por lo que siempre se puede expresar $\vec{u}$ como combinación lineal de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$. *A posteriori*, parece obvio observar que $\vec{u} = (a-3)\,\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$, y ahora la conclusión es obvia (son l.d.).

Finalmente, un vector perpendicular a $\vec{v}_1$ y a $\vec{v}_2$ es su producto vectorial

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \| \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{w}.$$

Como $|\ \vec{w}\ | = \sqrt{5}$, los únicos dos vectores unitarios y perpendiculares a la vez a $\vec{v}_1$ y a $\vec{v}_2$ son los vectores

$$\pm\vec{v} = \pm\frac{1}{|\ \vec{w}\ |}\vec{w} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2) = \left(\pm\frac{\sqrt{5}}{5}, 0, \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}\right).$$

■

1.2. Modelo 2

1.2.1. Opción A

Ejercicio 1 Sea f la función definida para $x \neq 1$ por $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$.

(a) ***[0'5 puntos]*** Halla las asíntotas de la gráfica de f.

(b) ***[0'75 puntos]*** Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

(c) ***[0'75 puntos]*** Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f.

(d) ***[0'5 puntos]*** Esboza la gráfica de f.

Solución : Dado que en $x = 1$ se anula el denominador pero no el numerador, la función f posee a $x = 1$ como asíntota vertical. En concreto,

$$\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \lim_{x\to 1^\pm} \frac{e^x}{x-1} = \Big/ \text{ Indet. } \frac{1}{0^\pm} \Big/ = \pm\infty.$$

La recta $y=0$ es asíntota horizontal de f a la izquierda, ya que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x-1} = \Big/ \text{ Indet. } \frac{0}{\infty} \Big/ = 0,$$

pero a la derecha no hay asíntota, ni horizontal ni oblícua, lo cual se demuestra utilizando la *regla de L'Hôpital*:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x-1} = \Big/ \text{ Indet. } \frac{\infty}{\infty} \Big/ = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty, \qquad \text{(no hay A.H.)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2-x} = \Big/ \text{ Indet. } \frac{\infty}{\infty} \Big/ = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x-1} =$$

$$= \Big/ \text{ Indet. } \frac{\infty}{\infty} \Big/ = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty \qquad \text{(no hay A.O.)}$$

Para estudiar su monotonía, calculamos su primera derivada:

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1)-e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

El único punto crítico de f es $x=2$, y estudiamos su monotonía en la siguiente tabla:

f'	$-$		$-$	Mín	$+$
f	$\searrow$	1	$\searrow$	2	$\nearrow$

$$\text{Monotonía} \begin{cases} f \text{ es creciente en }]\,2,+\infty\,[\,, \\ f \text{ es decreciente en }]\,-\infty,1\,[\,\cup\,]\,1,2\,[\,. \end{cases}$$

Para estudiar la curvatura de f hace falta su segunda derivada:

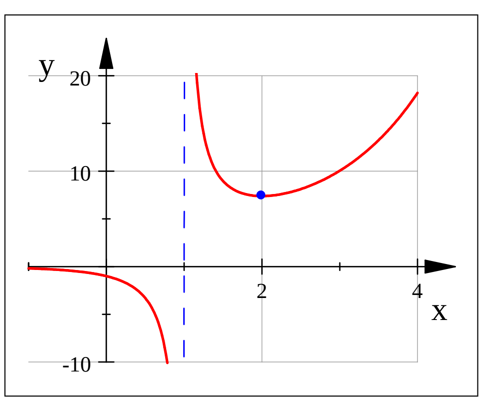
$$f''(x) = \frac{[\ e^x(x-2)+e^x\ ]\ \ (x-1)^2 - e^x(x-2)\,2\,(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{e^x\left(x^2-4x+5\right)}{(x-1)^3}.$$

Así, f'' nunca se anula, pero cambia de signo en el punto que le falta al dominio:

f''	$-$		$+$
f	$\cap$	1	$\cup$

$$\text{Curvatura} \begin{cases} f \text{ es cóncava en }]\,-\infty,1\,[\,, \\ f \text{ es convexa en }]\,1,+\infty\,[. \end{cases}$$

Concretamente, su gráfica es la siguiente.



■

Ejercicio 2 *[***2'5 puntos***]* Calcula la integral

$$\int \frac{3x^3 + x^2 - 10x + 1}{x^2 - x - 2}\, dx.$$

Solución : La integral pedida es

$$\int \frac{3x^3 + x^2 - 10x + 1}{x^2 - x - 2}\, dx = \int \left(3x + 4 + \frac{3}{x-2} - \frac{3}{x+1}\right) dx = \frac{3x^2 + 8x}{2} + 3\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + C.$$

■

Ejercicio 3 Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y + z = 5 \\ mx + 2z = 0 \\ my - z = m \end{array}\right\}.$$

(a) *[***1 punto***]* Determina los valores de m para los que el sistema tiene una única solución. Calcula dicha solución para $m = 1$.

(b) *[***1 punto***]* Determina los valores de m para los que el sistema tiene infinitas soluciones. Calcula dichas soluciones.

(c) *[***0'5 puntos***]* ¿Hay algún valor de m para el que el sistema no tiene solución?

Solución : Calculamos el determinante de la matriz del sistema utilizando las propiedades de los determinantes.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ m & 0 & 2 \\ 0 & m & -1 \end{vmatrix} = \qquad /F_2' = F_2 - mF_1\ /$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3m & 2-m \\ 0 & m & -1 \end{vmatrix} = \qquad /\text{ desarrollando por la primera columna }/$$

$$= \begin{vmatrix} -3m & 2-m \\ m & -1 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} -3 & 2-m \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \qquad /C_1' = C_1 + C_2\ /$$

$$= m \begin{vmatrix} -1-m & 2-m \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = m\,(m+1)\,.$$

Evidentemente, el determinante sólo se anula si $m \in \{-1, 0\}$, por lo que deducimos que si $m \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$, el sistema es compatible determinado y posee una única solución. Vamos a calcular dicha solución para $m = 1$ utilizando el método de Gauss.

$$m = 1, \quad \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right\|$$

De aquí se deduce que la única solución es $z = 1$, $y = 2$ y $x = -2$.

Quedan por analizar los casos $m = -1$ y $m = 0$.

$$m = -1, \quad \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right\| \quad \text{Incompatible.}$$

$$m = 0, \quad \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \quad \text{Comp. indeterminado.}$$

La clasificación completa del sistema es

- Si $m \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$, el sistema es compatible determinado.
- Si $m = -1$, el sistema es incompatible.
- Si $m = 0$, el sistema es compatible indeterminado.

En particular, el sistema es compatible indeterminado cuando $m = 0$, y su solución en este caso es

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 3y + z = 5, \\ z = 0, \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad / \; \lambda = y \; / \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 5 - 3\lambda, \\ y = \lambda, \\ z = 0. \end{array} \right.$$

Por último, el sistema carece de solución cuando $m = -1$. ■

Ejercicio 4 Sea el punto $P\,(1, 0, -3)$ y la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} 2x - y - 1 = 0, \\ x + z = 0. \end{array} \right.$

(a) *[**1 punto**]* Halla la ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a r.

(b) *[**1'5 puntos**]* Calcula las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r.

Solución : Llamemos π al plano que contiene a P y es perpendicular a r. Su vector normal es el vector director de la recta r:

$$\overrightarrow{n}_\pi = \overrightarrow{u}_r \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces π es de la forma $x + 2y - z + k = 0$, y para que contenga al punto $P\,(1, 0, -3)$, debe ser $k = -4$, por lo que concluimos que el plano perpendicular a r que contiene a P es $\pi \equiv x + 2y - z - 4 = 0$.

Sea P' el punto simétrico de P respecto de la recta r. El punto medio entre ambos (llamémosle Q) es el punto en el que la recta r corta al plano π del apartado anterior. Entonces

$$Q = r \cap \pi \equiv \left\{ \begin{array}{c} x + 2y - z = 4 \\ x + z = 0 \\ 2x - y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow\ Q\,(1, 1, -1)\,.$$

Entonces

$$\overrightarrow{PP'} = 2\overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{p'} = \overrightarrow{p} + 2\overrightarrow{PQ} = (1, 0, -3) + 2\,(0, 1, 2) = (1, 2, 1)\,,$$

de donde se deduce que $P'\,(1, 2, 1)$. ■

1.2.2. Opción B

Ejercicio 1 ***[2'5 puntos]*** Determina los puntos de la parábola de ecuación $y = 5 - x^2$ que están más próximos al origen de coordenadas. Calcula la distancia entre los puntos obtenidos y el origen de coordenadas.

Solución: Un punto cualquiera de la parábola es de la forma $(x, y) = \left(x, 5 - x^2\right)$. Su distancia, al cuadrado, al origen de coordenadas es

$$f\,(x) = d\,((x, y)\,, (0, 0))^2 = x^2 + y^2 = x^2 + \left(5 - x^2\right)^2 = x^4 - 9x^2 + 25.$$

Dado que la función distancia al origen es derivable (porque la parábola no pasa por el origen de coordenadas) y es estrictamente positiva, es lo mismo calcular un mínimo de la función distancia que de su cuadrado. Es por ello que es más sencillo trabajar con f que con $\sqrt{f}$, aunque al final sería lo mismo. Buscamos un mínimo absoluto de f, y dado que sabemos que $f > 0$, que f es derivable en $\mathbb{R}$ y que es obvio que $\lim_{x\to\pm\infty} f\,(x) = +\infty$, su mínimo absoluto debe localizarse en un punto crítico. Vamos a localizarlos:

$$f'\,(x) = 4x^3 - 18x = 2x\left(2x^2 - 9\right) = 4x\left(x - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$$

Como la función f es muy sencilla (polinómica), lo más fácil es clasificar los puntos críticos utilizando la segunda derivada:

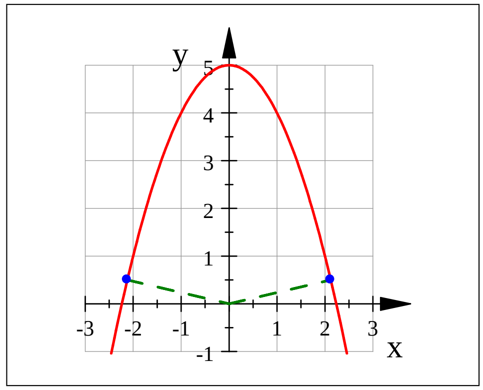
$$f''\,(x) = 12x^2 - 18 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} f''\,(0) = -18 & \Rightarrow & x = 0 \text{ máximo relativo,} \\ f''\left(\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = 36 > 0 & \Rightarrow & x = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ mínimos relativos.} \end{array} \right.$$

Así, los mínimos absolutos se encuentran en los puntos

$$\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, 5-\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

y su distancia al origen de coordenadas (común para ambos puntos) es

$$d = \sqrt{f\left(\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)} = \sqrt{\frac{19}{4}} = \frac{\sqrt{19}}{2}.$$



■

Ejercicio 2 Se sabe que la función $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax}, & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 8, \\ \dfrac{x^2-32}{x-4}, & \text{si} \quad x > 8, \end{cases}$$

es continua en $[0, +\infty)$.

(a) *[**0'5 puntos**]* Halla el valor de a.

(b) *[**2 puntos**]* Calcula $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,dx$.

Solución : Para que la función sea continua, los límites laterales en $x = 8$ deben ser iguales:

$$\left.\begin{array}{l} f(8) = f(8^-) = \lim\limits_{x\to 8^-} \sqrt{ax} = \sqrt{8a} \\ f(8^+) = \lim\limits_{x\to 8^+} \dfrac{x^2-32}{x-4} = \dfrac{64-32}{8-4} = 8 \end{array}\right\} \quad \sqrt{8a} = 8 \Leftrightarrow a = 8.$$

Por tanto, si f es continua como dice el enunciado, obligatoriamente $a = 8$. Para calcular la integral pedida, dividimos la misma en dos sumandos utilizando las propiedades de linealidad de la integral respecto de los límites de integración:

$$\int_0^{10} f(x)\,dx = \int_0^8 \sqrt{8x}\;dx + \int_8^{10} \frac{x^2-32}{x-4}\;dx = \sqrt{8}\int_0^8 x^{1/2}\;dx + \int_8^{10}\left(x+4-\frac{16}{x-4}\right)dx =$$
$$= \sqrt{8}\left(\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_{x=0}^{x=8} + \left(x^2+4x-16\ln|x-4|\right]_{x=0}^{x=8} = \frac{128}{3} + \left(26-16\ln\frac{3}{2}\right) =$$
$$= \frac{206}{3} - 16\ln\frac{3}{2}.$$

■

Ejercicio 3 ***[2'5 puntos]*** Halla la matriz X que cumple que

$$A\cdot X\cdot A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Solución : Dado que $\det A = -1 \neq 0$, la matriz A es inversible y su inversa es

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Entonces $A\cdot X\cdot A - B = 0$ es equivalente a decir que $X = A^{-1}\cdot B\cdot A^{-1}$, y haciendo los correspondientes productos

$$X = A^{-1}\cdot B\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -13 & -5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

■

Ejercicio 4 Se sabe que los puntos $A(m,0,1)$, $B(0,1,2)$, $C(1,2,3)$ y $D(7,2,1)$ están en un mismo plano.

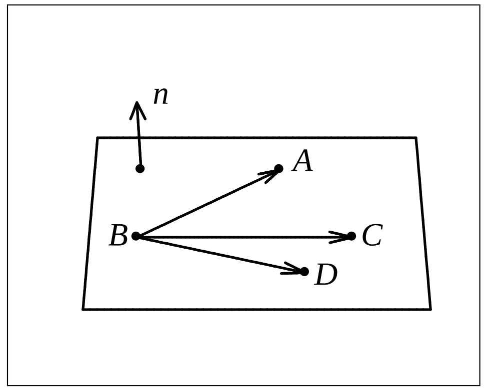
(a) ***[1'5 puntos]*** Halla m y calcula la ecuación de dicho plano.

(b) ***[1 punto]*** ¿Están los puntos B, C y D alineados?

Solución : Los puntos A, B, C y D son coplanarios si, y sólo si, el conjunto formado por los vectores que unen uno de ellos con todos los demás posee rango, a lo sumo, dos. Como el punto

A involucra al parámetro m, en vez de utilizar el conjunto $\left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right\}$ vamos a estudiar el rango del conjunto de vectores

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{BA} = (m, -1, -1)\,, \\ \overrightarrow{BC} = (1, 1, 1)\,, \\ \overrightarrow{BD} = (7, 1, -1) \end{array} \right\}.$$



Si el rango de este conjunto debe ser, como mucho, dos, su determinante debe anularse obligatoriamente:

$$0 = \det\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right) = \begin{vmatrix} m & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2m - 2 = -2\,(m+1)\,.$$

Por consiguiente, $m = -1$ para que los puntos A, B, C y D sean coplanarios. Sea π el plano que los contiene. Entonces π está determinado por un punto (por ejemplo, $A\,(-1, 0, 1)$) y los vectores directores $\overrightarrow{BC} = (1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{BD} = (7, 1, -1)$. Así, un vector normal al plano π es

$$\overrightarrow{n}_\pi \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

De esta manera, π es de la forma $x - 4y + 3z + k = 0$, y para que contenga al punto $A\,(-1, 0, 1)$, se ha de verificar que $k = -2$, de donde el planos que los contiene a todos es $\pi \equiv x - 4y + 3z = 2$.

Dado que los vectores $\overrightarrow{BC} = (1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{BD} = (7, 1, -1)$ no son proporcionales, los puntos B, C y D no están alineados. ■

1.3. Modelo 3

1.3.1. Opción A

Ejercicio 1 ***[2'5 puntos]*** Se sabe que

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + \alpha \operatorname{sen} x}{x^2}$$

es finito. Determina el valor de α y calcula el límite.

Solución : Llamemos L al límite anterior. Por hipótesis, sabemos que existe y es finito, es decir, $L \in \mathbb{R}$. Sea cual sea el valor de α, el límite L presenta una indeterminación $0/0$. ¿Es aplicable la *regla de L'Hôpital*? Si derivamos numerador y denominador, podemos intentar calcular el límite:

$$L' = \lim_{x\to 0} \frac{1+\alpha\cos x}{2x}.$$

¿Existe este límite? Es claro que

$$\lim_{x\to 0}(1+\alpha\cos x) = 1+\alpha, \qquad \lim_{x\to 0} 2x = 0.$$

Si $\alpha \neq -1$, entonces el límite L' no existe: sólo existen los límites laterales que son infinitos (dependiendo del signo de $1+\alpha$).

$$\alpha \neq -1 \qquad \left\{ \begin{array}{l} L'_{-} = \displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1+\alpha\cos x}{2x} = \left\{ \begin{array}{lll} +\infty, & \text{si} & \alpha < -1, \\ -\infty, & \text{si} & \alpha > -1. \end{array} \right. \\ \\ L'_{+} = \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1+\alpha\cos x}{2x} = \left\{ \begin{array}{lll} -\infty, & \text{si} & \alpha < -1, \\ +\infty, & \text{si} & \alpha > -1. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

No obstante, si alguno de estos límites fuese $\pm\infty$, entonces la propia *regla de L'Hôpital* nos garantizaría que el correspondiente límite lateral $\lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{x+\alpha \operatorname{sen} x}{x^2}$ también diverge, lo cual no ocurre por hipótesis. En consecuencia, para que L sea finito, es obligatorio que $\alpha = -1$. Ahora podemos calcular L con tal de aplicar dos veces la *regla de L'Hôpital*:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^2} = \Big/ \text{ Indet. } \frac{0}{0} \Big/ = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{2x} = \Big/ \text{ Indet. } \frac{0}{0} \Big/ =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2} = 0.$$

■

Ejercicio 2 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 2x+4, & \text{si} & x \leq 0, \\ (x-2)^2, & \text{si} & x > 0. \end{array} \right.$$

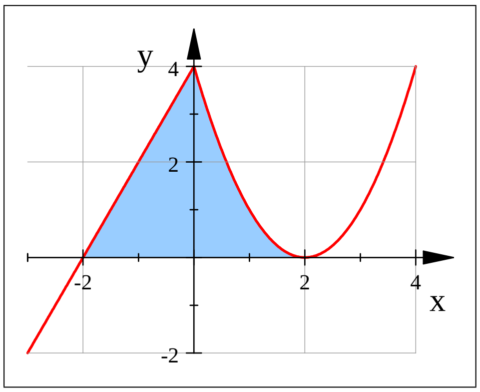
(a) *[**1 punto**]* Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas y esboza dicha gráfica.

(b) *[**1'5 puntos**]* Halla el área de la región acotada que está limitada por la gráfica de f y por el eje de abscisas.

SOLUCIÓN : El muy sencillo hallar los puntos de corte con el eje de abscisas

$$\begin{cases} x \leq 0, & f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x + 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -2, \\ x > 0\ , & f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; (x-2)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 2. \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que hay un primer trozo de línea recta y un segundo de parábola convexa, cuyo vértice está en $x = 2$, es muy sencilla su representación gráfica.



El área pedida es

$$A = \int_{-2}^{2} f(x)\ dx =$$

$$= \int_{-2}^{0} (2x+4)\ dx + \int_{0}^{2} (x-2)^2\ dx.$$

El primer trozo es el área de un triángulo, que se calcula con la fórmula usual (no merece la pena perder tiempo en integrar). La segunda también es inmediata.

$$A = \frac{2 \cdot 4}{2} + \left(\frac{(x-2)^3}{3} \right]_{x=0}^{x=2} = 4 + \left(0 - \left(-\frac{8}{3} \right) \right) = \frac{20}{3} \text{ u.c.s.}$$

■

Ejercicio 3 Considera el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} (b+1)\,x + y + z = 2 \\ x + (b+1)\,y + z = 2 \\ x + y + (b+1)\,z = -4 \end{array} \right\}.$$

(a) *[**1'5 puntos**]* Clasifica el sistema según los valores del parámetro b.

(b) *[**1 punto**]* Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

SOLUCIÓN : Calculemos el determinante de la matriz del sistema aplicando las propiedades de los determinantes:

$$\det A = \begin{vmatrix} b+1 & 1 & 1 \\ 1 & b+1 & 1 \\ 1 & 1 & b+1 \end{vmatrix} = \Big/ \begin{array}{l} F_1' = F_1 - F_3 \\ F_1' = F_1 - F_3 \end{array} \Big/ = \begin{vmatrix} b & 0 & -b \\ 0 & b & -b \\ 1 & 1 & b+1 \end{vmatrix}.$$

Sacamos b como constante de las dos primeras filas, quedando

$$\det A = b^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & b+1 \end{vmatrix} = /\ F_3' = F_3 - F_1\ / = b^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & b+2 \end{vmatrix}.$$

Si desarrollamos por la primera columna

$$\det A = b^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & b+2 \end{vmatrix} = b^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & b+3 \end{vmatrix} = b^2 (b+3).$$

Este determinante sólo se anula si $b \in \{-3, 0\}$ por lo que podemos afirmar que si $b \in \mathbb{R} - \{-3, 0\}$, la matriz del sistema es inversible y el sistema es compatible determinado. Sólo nos quedan dos casos por analizar, para lo cual utilizamos el método de Gauss:

$$b = -3, \quad \left\| \begin{array}{cccc} -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \end{array} \right\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{array} \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \quad \text{Comp. indeterminado.}$$

$$b = 0, \quad \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \quad \text{Incompatible.}$$

La clasificación completa del sistema es

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet\ \text{Si } b \in \mathbb{R} - \{-3, 0\}, \text{ el sistema es compatible determinado.} \\ \bullet\ \text{Si } b = -3, \text{ el sistema es compatible indeterminado.} \\ \bullet\ \text{Si } b = 0, \text{ el sistema es incompatible.} \end{array} \right.$$

En particular, el sistema es compatible indeterminado cuando $b = -3$, y su solución en este caso es

$$\left\{ \begin{array}{r} x + y - 2z = -4, \\ y - z = -2, \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad /\ \lambda = z\ / \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda - 2, \\ y = \lambda - 2 \\ z = \lambda, \end{array} \right.$$

es decir, las soluciones están sobre la recta $x = y = z - 2$. ■

Ejercicio 4 Se sabe que las rectas

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + y - z - 3 = 0, \\ x + 2y - 2 = 0, \end{array} \right. \quad \text{y} \quad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} ax + 6y + 6 = 0, \\ x - 2z + 2 = 0, \end{array} \right.$$

son paralelas.

(a) ***[1'5 puntos]*** Calcula a.

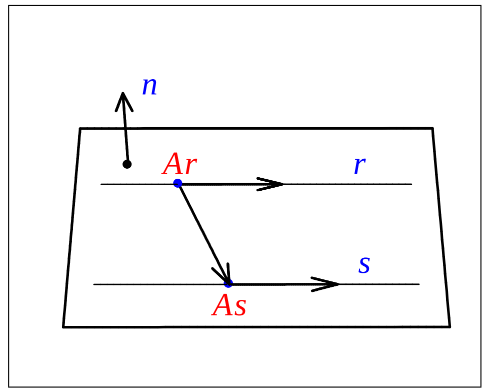
(b) *[**1 punto**]* Halla la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s.

Solución : Calculamos sendos vectores directores de las rectas:

$$\overrightarrow{u}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{u}_s \parallel \begin{pmatrix} a \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 2a \\ -6 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 6 \\ -a \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Entonces las rectas son paralelas si estos vectores son paralelos, de donde

$$r \parallel s \iff \overrightarrow{u}_r \parallel \overrightarrow{u}_s \iff \frac{6}{2} = \frac{-a}{-1} = \frac{3}{1} \iff a = 3.$$



En este caso, el plano que contiene a r y a s (llamémosle π) contiene a cualquier punto de ambas rectas (podemos elegir $A_r(2,0,-1)$ y $A_s(-2,0,0)$) y a los vectores $\overrightarrow{u}_r = (2,-1,1)$ y $\overrightarrow{A_rA_s} = (-4,0,1)$. Un vector normal al plano π es

$$\overrightarrow{n}_\pi \parallel \overrightarrow{u}_r \times \overrightarrow{A_rA_s} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Así, el plano π es de la forma $x + 6y + 4z + k = 0$, y para contener al punto $A_s(-2,0,0)$ debe ser $k = 2$, de donde podemos concluir que el plano que contiene a r y a s es el plano $\pi \equiv x + 6y + 4z + 2 = 0$. ■

1.3.2. Opción B

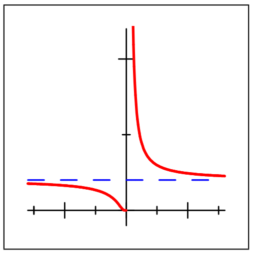
Ejercicio 1 Considera las tres funciones cuyas expresiones respectivas vienen dadas, para $x \neq 0$, por

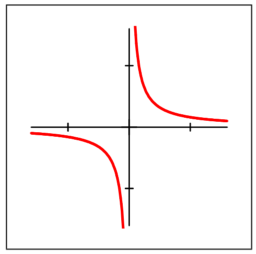
$$f(x) = \frac{x^2-1}{x}, \qquad g(x) = e^{1/x} \qquad \text{y} \qquad h(x) = \ln|x|,$$

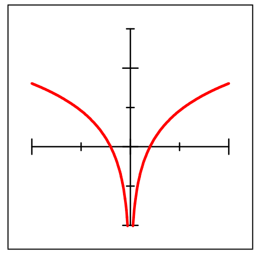
siendo $\ln$ la función logaritmo neperiano.

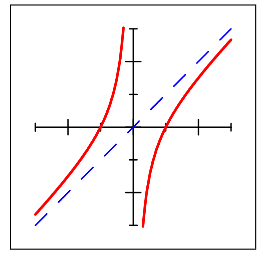
(a) *[**1'75 puntos**]* Halla las ecuaciones de la asíntotas de las gráficas de f, g y h.

(b) *[**0'75 puntos**]* Identifica, entre las que siguen, la gráfica de cada función, justificando la respuesta.


Gráfica 1


Gráfica 2


Gráfica 3


Gráfica 4

Solución: El dominio de $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$ es $\mathbb{R} - \{0\}$. En $x = 0$, se anula el denominador pero no el numerador, por lo que hay una asíntota vertical. De hecho, es claro que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-1}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-1}{x} = -\infty.$$

Esto nos dice ya que la gráfica de f es la número 4, porque es la única que cumple estas condiciones. Además, como $f(x) = \frac{x^2-1}{x} = x + \frac{1}{x}$, la recta $y = x$ es asíntota oblícua a ambos lados, tal y como se aprecia en la figura 4.

El dominio de la función $g(x) = e^{1/x}$ también es $\mathbb{R} - \{0\}$, pero ahora los límites laterales en $x = 0$ son distintos:

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = \Big/ \, e^{-\infty} \, \Big/ = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = \Big/ \, e^{+\infty} \, \Big/ = +\infty.$$

Por tanto, $x = 0$ es asíntota vertical de g porque dicha función diverge positivamente en $x = 0$ por la derecha. Esto significa que g corresponde a la gráfica 1. De hecho, la recta $y = 1$ es asíntota horizontal de g a ambos lados:

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1.$$

Finalmente, la función $h(x) = \ln|x|$ es una función simétrica par lo que implica que, entre las dos gráficas que quedan, h corresponde a la gráfica 3. En efecto, en $x = 0$ hay una asíntota vertical, ya que

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \ln|x| = \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$$

No obstante, h no posee asíntota ni horizontal ni oblicua en $\pm\infty$, ya que

$$\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \ln|x| = +\infty, \qquad \text{(no hay A.H.)}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\ln|x|}{x} = \pm \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \Big/ \text{ Indet. } \frac{0}{0} \Big/ = \pm \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \qquad \text{(no hay A.O.)}$$

■

Ejercicio 2 *[2'5 puntos]* Calcula $\displaystyle\int_{-1}^{0} \ln(2+x)\,dx$, siendo $\ln$ la función logaritmo neperiano.

SOLUCIÓN : Es sencillo encontrar una primitiva integrando por partes:

$$\int \ln(2+x)\ dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln(x+2)\,, & du = \dfrac{dx}{x+2} \\ dv = dx, & v = x \end{array} \right| = x\ln(x+2) - \int \frac{x}{x+2}\ dx =$$

$$= x\ln(x+2) - \int \frac{x+2-2}{x+2}\ dx = x\ln(x+2) - \int \left(1 - \frac{2}{x+2}\right) dx =$$

$$= x\ln(x+2) - x + 2\ln|x+2| + C.$$

Entonces, aplicando la *regla de Barrow*,

$$\int_{-1}^{0} \ln(2+x)\ dx = \Big(x\ln(x+2) - x + 2\ln|x+2| \Big]_{x=-1}^{x=0} = 2\ln 2 - 1.$$

■

Ejercicio 3 Sea I la matriz identidad de orden 3 y sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}$.

(a) *[1'25 puntos]* Determina el valor de b para el que $A^2 - 2A + I = 0$.

(b) *[1'25 puntos]* Para $b = 2$ halla la matriz X que cumple que $A \cdot X - 2A^t = 0$, donde A^t denota la matriz transpuesta de A.

SOLUCIÓN : Calculamos A^2 multiplicando A por sí misma:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -b \\ -2 & 1 & -b \\ b & 0 & b^2-1 \end{pmatrix}.$$

Entonces:

$$A^2 - 2A + I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -b \\ -2 & 1 & -b \\ b & 0 & b^2-1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2-b \\ 0 & 0 & 2-b \\ b-2 & 0 & b^2-2b \end{pmatrix}.$$

Evidentemente, esta matriz es nula si, y sólo si, $b = 2$. Si $b = 2$, la ecuación $A \cdot X - 2A^t = 0$ puede resolverse utilizando la matriz inversa de A. Como $\det A = 1$ si $b = 2$, calculamos su inversa utilizando el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \Big/ \begin{array}{l} F_2' = F_2 + F_3, \\ F_1 \longleftrightarrow -F_3, \end{array} \Big/ \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \Big/ \begin{array}{l} F_1' = F_1 - 2F_3, \\ F_2' = F_2 - F_3, \end{array} \Big/ \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Así, la matriz inversa de A es la de la segunda columna y podemos despejar

$$A \cdot X - 2A^t = 0 \Leftrightarrow X = 2A^{-1} \cdot A^t = 2\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 8 \\ -2 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

■

Ejercicio 4 Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} x + z - 2 = 0, \\ x - y - 1 = 0, \end{cases}$ y $s \equiv \dfrac{x}{2} = y - 1 = \dfrac{z}{3}$.

(a) *[**1'25 puntos**]* Halla la ecuación del plano π que contiene a s y es paralelo a r.

(b) *[**1'25 puntos**]* Calcula la distancia de la recta r al plano π.

Solución : El plano π viene determinado porque contiene un punto de s (por ejemplo, $A_s(0,1,0)$) y a los vectores directores de ambas rectas ($\vec{u}_r = (1,0,1) \times (1,-1,0) = (1,1,-1)$ y $\vec{u}_s = (2,1,3)$). Entonces un vector normal al plano π es

$$\vec{n}_\pi = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Así, el plano π tiene una ecuación general de la forma $4x - 5y - z + k = 0$, y para que el punto $A_s(0,1,0)$ esté contenido en este plano, es obligatorio que $k = 5$, por lo que finalmente el plano π es el plano de ecuación $4x - 5y - z + 5 = 0$.

Como r y π son paralelos (porque el vector director de r está dentro de la dirección de π), la distancia entre r y π es la distancia entre un punto cualquiera de r y el plano π. Tomamos, por ejemplo, $A_r(0,-1,2)$ y aplicamos la conocida fórmula de la distancia de un punto a un plano:

$$d(r,\pi) = d(A_r,\pi) = \frac{| Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D |}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{| 0 + 5 - 2 + 5 |}{\sqrt{16 + 25 + 1}} = \frac{4\sqrt{42}}{21}.$$

■

1.4. Modelo 4

1.4.1. Opción A

Ejercicio 1 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{5x+8}{x^2+x+1}$.

(a) *[**0'5 puntos**]* Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes coordenados.

(b) *[**0'5 puntos**]* Halla las asíntotas de la gráfica de f.

(c) *[**1 punto**]* Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

(d) *[**0'5 puntos**]* Esboza la gráfica de f.

Solución : Es claro que la función f corta al eje OX en el punto $\left(\frac{-8}{5}, 0\right)$ y al eje OY en el punto $(0,8)$. Dado que el denominador de f nunca se anula, f es continua en $\mathbb{R}$ y no posee asíntotas verticales. De hecho, como el grado del numerador es menor que el grado de denominador, la única asíntota de f es la recta horizontal $y = 0$, ya que

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x+8}{x^2+x+1} = 0.$$

Calculamos su primera derivada para estudiar su monotonía:

$$f'(x) = \frac{5\left(x^2+x+1\right) - (5x+8)(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2} = \frac{5x^2+5x+5-10x^2-21x-8}{\left(x^2+x+1\right)^2} =$$
$$= -\frac{5x^2+16x+3}{\left(x^2+x+1\right)^2}.$$

Esto significa que los únicos puntos críticos de f son los números

$$x = \frac{-16 \pm \sqrt{196}}{10} = \frac{-16 \pm 14}{10}, \qquad x_1 = -3,\ x_2 = \frac{-1}{5}.$$

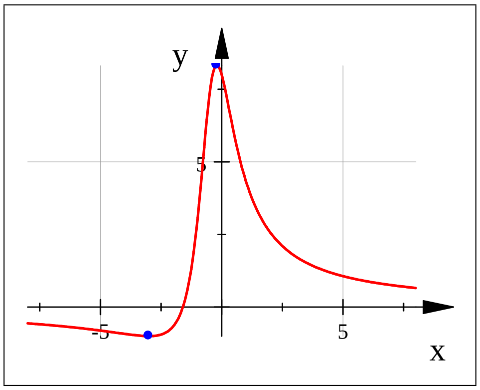
Sus correspondiente imágenes por f son

$$f(-3) = -1, \quad f\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{25}{3}.$$

En la siguiente tabla estudiamos la monotonía de f a partir del signo de f':

f'	$-$	Mín	$+$	Máx	$-$
f	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$-\frac{1}{5}$	$\searrow$

$$\begin{cases} f \text{ es creciente en } \left]-3, -\frac{1}{5}\right[, \\ f \text{ es decreciente en } \left]-\infty, -3\right[\cup \left]-\frac{1}{5}, +\infty\right[. \end{cases}$$



Así, f posee los siguientes extremos:

$$\begin{cases} \text{Mínimo absoluto en } (-3,-1)\,, \\ \text{Máximo absoluto en } \left(-\frac{1}{5},\frac{25}{3}\right), \end{cases}$$

y su representación gráfica es la adjunta.

■

Ejercicio 2 Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^2-5x+4$.

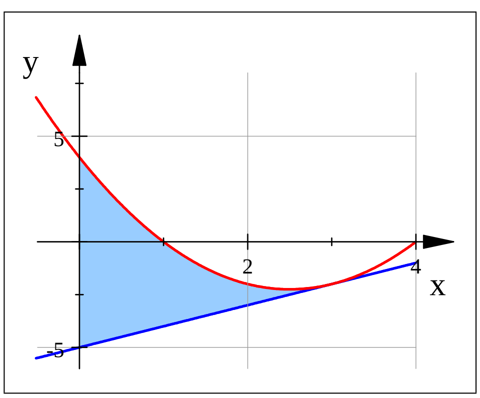
(a) *[**0'75 puntos**]* Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=3$.

(b) *[**1'75 puntos**]* Calcula el área de la región acotada que está limitada por el eje de ordenadas, por la gráfica de f y por la recta tangente obtenida.

Solución: Dado que $f(3)=-2$ y $f'(3)=1$, la recta tangente en $x=3$ es

$$y-f(3)=f'(3)(x-3) \;\Leftrightarrow\; y+2=x-3 \;\Leftrightarrow\; y=x-5.$$

Para calcular el área propuesta, dibujamos la función f sabiendo que es una parábola convexa que tiene su vértice en el punto $\left(\frac{5}{2},-\frac{9}{4}\right)$, que corta al eje OX en $(1,0)$ y en $(4,0)$, y que corta al eje OY en el punto $(0,4)$. Así, el área pedida es:



$$A=\int_0^3\left(\left(x^2-5x+4\right)-(x-5)\right)dx=$$

$$=\int_0^3(x-3)^2\,dx=\left(\frac{(x-3)^3}{3}\right]_{x=0}^{x=3}=$$

$$=0-(-9)=9 \text{ u.c.s.}$$

■

Ejercicio 3 Sea I la matriz identidad de orden 2 y sea $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$.

(a) *[**1 punto**]* Halla los valores de x para los que la matriz $A - xI$ no tiene inversa.

(b) *[**1'5 puntos**]* Halla los valores de a y b para los que $A^2 + aA + bI = 0$.

Solución: Una sencilla cuenta demuestra que

$$\det(A - xI) = \left| \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix} = (2-x)^2 - 1 =$$

$$= x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3).$$

Así, los únicos valores de x que anulan al determinante son $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$ y, por tanto, son los únicos para los que la matriz $A - xI$ no tiene inversa. Por otro lado,

$$A^2 + aA + bI = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a & a \\ a & 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b+5 & a+4 \\ a+4 & 2a+b+5 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz se anula si, y sólo si, $a = -4$ y $b = 3$. ■

Ejercicio 4 *[**2'5 puntos**]* Calcula la distancia entre las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 6 + \lambda, \\ y = 1 - 2\lambda, \\ z = 5 - 7\lambda, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0, \\ 3x - y - 2 = 0. \end{cases}$$

Solución: Un punto de la recta r es $A_r(6,1,5)$ y un vector director, $\overrightarrow{u}_r = (1,-2,-7)$. De las dos ecuaciones de la recta s se deduce que

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1, \\ 3x - y = 2, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = y = 1,$$

siendo la variable z libre. Por tanto, un punto de s es $A_s(1,1,0)$ y un vector director es $\overrightarrow{u}_s = (0,0,1)$. La fórmula de la distancia de una recta a otra es

$$\mathsf{d}(r,s) = \frac{\left|\det\left(\overrightarrow{A_rA_s}, \overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_s\right)\right|}{\left| \overrightarrow{u}_r \times \overrightarrow{u}_s \right|} = \frac{\left| \overrightarrow{A_rA_s} \cdot (\overrightarrow{u}_r \times \overrightarrow{u}_s) \right|}{\left| \overrightarrow{u}_r \times \overrightarrow{u}_s \right|}.$$

Entonces

$$\overrightarrow{u}_r \times \overrightarrow{u}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left| \overrightarrow{u}_r \times \overrightarrow{u}_s \right| = \sqrt{5}.$$

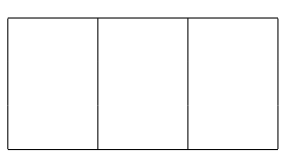
Además
$$\overrightarrow{A_rA_s} \cdot (\overrightarrow{u}_r \times \overrightarrow{u}_s) = (-5, 0, -5) \cdot (-2, -1, 0) = 10,$$
por lo que concluimos que
$$\mathsf{d}\,(r, s) = \frac{\left| \overrightarrow{A_rA_s} \cdot (\overrightarrow{u}_r \times \overrightarrow{u}_s) \right|}{\left| \overrightarrow{u}_r \times \overrightarrow{u}_s \right|} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.$$

■

Nota 1 ¿Y si nos hubiesen pedido determinar los puntos que alcanzan la distancia? Entonces hubiésemos tenido que aplicar el procedimiento de la perpendicular común. Vamos a recordarlo. Como sabemos por lo anterior, un punto cualquiera de la recta r viene dado de la forma $P_r\,(\lambda + 6, -2\lambda + 1, -7\lambda + 5)$, y uno cualquiera de la recta s es de la forma $P_s\,(1, 1, \mu)$. Entonces
$$\overrightarrow{P_rP_s} = (1, 1, \mu) - (\lambda + 6, -2\lambda + 1, -7\lambda + 5) = (-\lambda - 5, 2\lambda, 7\lambda + \mu - 5)\,.$$
Entonces determinamos λ y μ con la condición de que el vector $\overrightarrow{P_rP_s}$ sea, a la vez, perpendicular a r y a s:
$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{P_rP_s} \perp r \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{P_rP_s} \cdot \overrightarrow{u}_r = 0 \;\Leftrightarrow\; 44\lambda + 7\mu = 40, \\ \overrightarrow{P_rP_s} \perp s \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{P_rP_s} \cdot \overrightarrow{u}_s = 0 \;\Leftrightarrow\; 7\lambda + \mu = 5. \end{array} \right.$$
La única solución de este sistema es $\lambda = -1$ y $\mu = 12$, lo que nos proporciona los puntos que alcanzan la distancia:
$$P_r = (5, 3, 12) \qquad y \qquad P_s\,(1, 1, 12)\,.$$
La distancia entre ambos es la distancia entre las rectas r y s:
$$\mathsf{d}\,(r, s) = \mathsf{d}\,(P_r, P_s) = \left|\overrightarrow{P_rP_s}\right| = |(-4, -2, 0)| = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5},$$
como ya sabíamos.

1.4.2. Opción B

Ejercicio 1 *[***2'5 puntos***]* De un terreno se desea vender un solar rectangular de $12800\ m^2$ dividido en tres parcelas iguales como las que aparecen en el dibujo. Si se quieren vallar las lindes de las tres parcelas (los bordes y las separaciones de las parcelas, determina las dimensiones del solar para que la longitud de la valla utilizada sea mínima.



Solución: Llamemos $\ell = 3x$ a la longitud de un lado de la finca (así, x es cada una de las tres bases iguales) e y a la longitud del otro lado. Por la condición sobre el área, sabemos que $3xy = 12800$. La función que proporciona el perímetro dependiendo de x y de y es $L(x, y) = 6x + 4y$. Vamos a buscar un mínimo de esta función sujeta a las condiciones $x, y > 0$. Despejamos y en función de x y sustituimos en la expresión general de L:

$$\begin{cases} \text{Condiciones iniciales} & x, y > 0,\ 3xy = 12800 \ \Rightarrow\ y = \dfrac{12800}{3x}, \\ \text{Función a optimizar} & L(x) = L(x, y) = 6x + 4y = 6x + \dfrac{51200}{3x}. \end{cases}$$

La función L está definida en $]\,0, +\infty\,[$, siendo

$$\lim_{x \to 0^+} L(x) = +\infty = \lim_{x \to +\infty} L(x).$$

Por tanto, su mínimo absoluto hay que buscarlo en un mínimo relativo y, dado que es derivable, estudiamos sus puntos críticos.

$$L'(x) = 6 + \left(-\frac{51200}{3x^2}\right) = 6 - \frac{51200}{3x^2}, \qquad L''(x) = \frac{102400}{3x^3}.$$

Entonces

$$L'(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ 6 = \frac{51200}{3x^2} \ \Leftrightarrow\ x^2 = \frac{51200}{18} = \frac{25600}{9} \ \Leftrightarrow\ x = \pm\frac{160}{3}.$$

Sólo tiene sentido en el problema (y en el dominio) la solución positiva $x = 160/3$, a la que le corresponde $y = 80$. Este punto crítico es, sin duda, un mínimo ya que $L'' > 0$ en el dominio. Por tanto es un mínimo absoluto y las dimensiones de la finca, para que la longitud de la valla sea mínima, son $\ell = 3x = 160\ m$ de ancho e $y = 80\ m$ de ancho. ■

Ejercicio 2 Calcula las siguientes integrales:

(a) ***[0'5 puntos]*** $\displaystyle\int \cos(5x + 1)\, dx.$

(b) ***[0'5 puntos]*** $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(x + 2)^3}}\, dx.$

(c) ***[1'5 puntos]*** $\displaystyle\int_0^1 xe^{-3x} dx.$

Solución: Las dos primeras integrales son muy sencillas

$$\int \cos(5x + 1)\, dx = \frac{1}{5}\int 5\cos(5x + 1)\, dx = \frac{\operatorname{sen}(5x + 1)}{5} + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x + 2)^3}}\, dx = \int (x + 2)^{-3/2}\, dx = \frac{(x + 2)^{-1/2}}{-1/2} + C = \frac{-2}{\sqrt{x + 2}} + C,$$

donde C es una constante de integración. Para la última integral, calculamos una primitiva utilizando el método de integración por partes

$$\int xe^{-3x}dx = \left| \begin{array}{ll} u = x, & du = dx \\ dv = e^{-3x}dx, & v = \dfrac{-e^{-3x}}{3} \end{array} \right| = -\frac{xe^{-3x}}{3} - \int -\frac{e^{-3x}}{3}\, dx =$$

$$= -\frac{xe^{-3x}}{3} - \frac{e^{-3x}}{9} + C = -\frac{3x+1}{9e^{3x}} + C.$$

Entonces, aplicando la *regla de Barrow*:

$$\int_0^1 xe^{-3x}dx = \frac{-1}{9}\left(\frac{3x+1}{e^{3x}} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{-1}{9}\left(\frac{4}{e^3} - \frac{1}{e^0}\right) = \frac{e^3-4}{9e^3}.$$

■

Ejercicio 3 Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} 5x+2y-z & = & 0, \\ x+y+(m+4)\,z & = & my, \\ 2x-3y+z & = & 0. \end{array}\right\}$$

(a) *[**1 punto**]* Determina los valores del parámetro m para los que el sistema tiene una única solución.

(b) *[**1'5 puntos**]* Resuelve el sistema cuando tenga infinitas soluciones y da una solución en la que $z = 19$.

Solución : Trasponiendo términos, el sistema dado es equivalente al sistema homogéneo

$$\left\{\begin{array}{l} 5x+2y-z=0, \\ x+(1-m)\,y+(m+4)\,z=0, \\ 2x-3y+z=0. \end{array}\right.$$

Por tanto, este sistema no puede ser incompatible, ya que posee la solución trivial $(0,0,0)$. Calculamos el determinante de la matriz del sistema para clasificarlo:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 1-m & m+4 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \Big/ \begin{array}{l} F_1' = F_1 - 5F_2 \\ F_3' = F_3 - 2F_2 \end{array} \Big/ = \begin{vmatrix} 0 & 5m-3 & -5m-21 \\ 1 & 1-m & m+4 \\ 0 & 2m-5 & -2m-7 \end{vmatrix}.$$

Desarrollamos por la primera columna y nos queda

$$\det A = -\begin{vmatrix} 5m-3 & -5m-21 \\ 2m-5 & -2m-7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5m-3 & 5m+21 \\ 2m-5 & 2m+7 \end{vmatrix} =$$

$$= (5m-3)(2m+7) - (2m-5)(5m+21) =$$

$$= 10m^2 + 29m - 21 - \left(10m^2 + 17m - 105\right) = 12m + 84 = 12(m+7)\,.$$

Deducimos pues que

$$\begin{cases} \bullet \text{ Si } m \in \mathbb{R} - \{-7\}, \quad \text{el sistema es compatible determinado,} \\ \bullet \text{ Si } m = -7, \quad \text{el sistema es compatible indeterminado.} \end{cases}$$

Vamos a resolverlo en este último caso ($m = -7$) utilizando el método de Gauss.

$$\left\| \begin{matrix} 5 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 8 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{matrix} \right\| \begin{matrix} 1 & 8 & -3 & 0 \\ 0 & -38 & 14 & 0 \\ 0 & -19 & 7 & 0 \end{matrix} \left\| \begin{matrix} 1 & 8 & -3 & 0 \\ 0 & -19 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

Entonces

$$\begin{cases} x + 8y - 3z = 0, \\ -19y + 7z = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad /\ \lambda = x\ / \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \lambda, \\ y = 7\lambda, \\ z = 19\lambda. \end{cases}$$

La única solución en la que $z = 19$ ocurre cuando $\lambda = 1$, que corresponde al caso en el que $x = 1,\ y = 7,\ z = 19$. ■

Ejercicio 4 Sean $A(-3,4,0)$, $B(3,6,3)$ y $C(-1,2,1)$, los vértices de un triángulo.

(a) *[**0'75 puntos**]* Halla la ecuación del plano π que contiene al triángulo.

(b) *[**0'75 puntos**]* Halla la ecuación de la recta que es perpendicular a π y pasa por el origen de coordenadas.

(c) *[**1 punto**]* Calcula el área del triángulo ABC.

Solución: Dado que los vectores $\overrightarrow{AB} = (3,6,3) - (-3,4,0) = (6,2,3)$ y $\overrightarrow{AC} = (-1,2,1) - (-3,4,0) = (2,-2,1)$ generan la dirección del plano π, un vector normal al plano es

$$\overrightarrow{n}_\pi \parallel \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (6,2,3) \times (2,-2,1) = (8,0,-16) \parallel (1,0,-2)\,.$$

Entonces π es de la forma $x - 2z + k = 0$, y para contener al punto $A(-3,4,0)$ es obligatorio que $k = 3$. Así, $\pi \equiv x - 2z + 3 = 0$.

La recta r que es perpendicular a π debe tener como vector director al propio vector normal al plano ($\overrightarrow{u}_r = \overrightarrow{n}_\pi = (1, 0, -2)$) y, sabiendo que pasa por el origen de coordenadas, sus ecuaciones paramétricas son:

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda, \\ y = 0, \\ z = -2\lambda. \end{cases}$$

Finalmente, el área del triángulo ABC es

$$A = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \frac{1}{2} \left| (8, 0, -16) \right| = \frac{8}{2} \left| (1, 0, -2) \right| = 4\sqrt{5} \text{ u.c.s.}$$

■

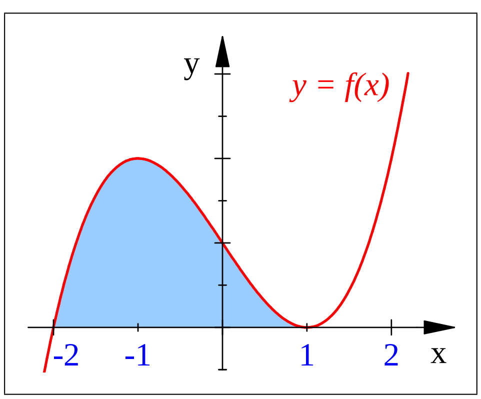
1.5. Modelo 5

1.5.1. Opción A

Ejercicio 1 Se sabe que la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ es la que aparece en el dibujo.

(a) *[**1'25 puntos**]* Determina f.

(b) *[**1'25 puntos**]* Calcula el área de la región sombreada.



Solución : Es claro que $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. Por lo observado en la representación gráfica, la función f se anula en $x = -2$ y en $x = 1$. Esto impone dos rectricciones sobre los parámetros a, b y c. La tercera condición hay que buscarla en el mínimo relativo, que está claramente en $x = 1$.

No se puede utilizar que en $x = -1$ haya un máximo relativo porque, realmente, la gráfica no lo deja del todo claro (aunque, *a posteriori*, es cierto). Entonces tenemos las condiciones:

$$\begin{cases} f(-2) = 0 & \Leftrightarrow\ 4a - 2b + c = 8, \\ f(1) = 0 & \Leftrightarrow\ a + b + c = -1, \\ f'(1) = 0 & \Leftrightarrow\ 2a + b = -3. \end{cases}$$

Resolvemos el sistema utilizando el método de Gauss:

$$\left\| \begin{array}{cccc} 4 & -2 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \end{array} \right\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & -3 & 12 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{array} \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 18 \end{array} \right\|$$

Entonces $c = 2$, $b = -3$ y $a = 0$ y la función resulta ser $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Además, el área pedida es

$$A = \int_{-2}^{1} \left(x^3 - 3x + 2\right) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{x=-2}^{x=1} = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2\right) - (4 - 6 - 4) =$$
$$= \frac{3}{4} - (-6) = \frac{27}{4}.$$

■

Ejercicio 2 Sea f la función definida para $x \neq 2$ por $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}$.

(a) *[**1 punto**]* Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

(b) *[**0'75 puntos**]* Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

(c) *[**0'75 puntos**]* Calcula, si existen, el máximo y el mínimo absolutos de f en el intervalo $[0, 2)$ (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función)

Solución : El dominio de f es $\mathbb{R} - \{2\}$. Dado que el denominador de f se anula para $x = 2$, pero en este punto no se anula el numerador, es claro que hay una asíntota vertical en $x = 2$, siendo

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{(x-1)(x-3)}{x-2} = +\infty, \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty.$$

Como el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador, la función racional f posee una asíntota oblícua a ambos lados, cuya ecuación, $y = mx + n$, se determina con los parámetros

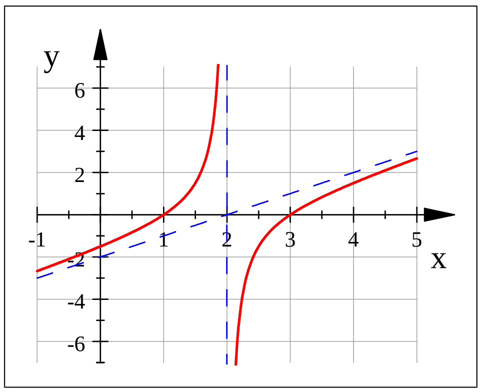
$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x} = 1,$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 4x + 3 - \left(x^2 - 2x\right)}{x - 2} = -2.$$

Entonces la asíntota oblícua a ambos lados es la recta de ecuación $y = x - 2$. Para estudiar su monotonía, calculamos su primera derivada:

$$f'(x) = \frac{(2x-4)(x-2) - \left(x^2 - 4x + 3\right)}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 5}{(x-2)^2} > 0,$$

(porque el numerador no tiene raíces reales) lo que implica que la función f es estrictamente creciente en su dominio, $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} - \{2\}$. Con estos datos ya podemos dibujarla para tener una idea de su comportamiento:



Se puede observar entonces que f no posee máximo en el intervalo $[0, 2)$ ya que, como sabíamos, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$. Sin embargo, sí posee mínimo absoluto en $[0, 2)$, ya que es estrictamente creciente (el mínimo lo tendría en el extremo inferior y el máximo en el superior) y el intervalo es cerrado por su extremo inferior:

$$\min(f, [0, 2)) = f(0) = -\frac{3}{2}.$$

■

Ejercicio 3 ***[2'5 puntos]*** Álvaro, Marta y Guillermo son tres hermanos. Álvaro dice a Marta: si te doy la quinta parte del dinero que tengo, los tres hermanos tendremos la misma cantidad. Calcula lo que tiene cada uno si entre los tres juntan 84 euros.

SOLUCIÓN: Llamemos a, m y g a las cantidades que poseen Álvaro, Marta y Guillermo, respectivamente. Las condiciones del problema determinan tres ecuaciones distintas, aunque las dos últimas vienen juntas porque los tres hermanos poseerían el mismo dinero.

$$\begin{cases} a + m + g = 84, \\ a - \dfrac{a}{5} = m + \dfrac{a}{5} = g. \end{cases}$$

Escribimos estas tres ecuaciones de la forma usual y resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$\left\{\begin{array}{l} a+m+g=84, \\ a-\dfrac{a}{5}=m+\dfrac{a}{5}, \\ a-\dfrac{a}{5}=g, \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} a+m+g=84, \\ 3a-5m=0, \\ 4a-5g=0. \end{array}\right.$$

$$\left\|\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 84 \\ 3 & -5 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 84 \\ 0 & -8 & -3 & -252 \\ 0 & -4 & -9 & -336 \end{array}\left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 84 \\ 0 & 4 & 9 & 336 \\ 0 & 0 & 15 & 420 \end{array}\right\|$$

La única solución de este sistema es $a = 35$, $g = 28$ y $m = 21$, por lo que concluimos que Álvaro tiene 35 euros, Marta 21 euros y Guillermo 28 euros. ■

Ejercicio 4 Considera el punto $A\,(0, -3, 1)$, el plano $\pi \equiv 2x - 2y + 3z = 0$ y la recta $r \equiv x + 3 = y = \dfrac{z-3}{2}$.

(a) *[**1 punto**]* Determina la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r.

(b) *[**1'5 puntos**]* Determina la ecuación de la recta que pasa por A, es paralela a π y corta a r.

Solución: Llamemos α al plano que contiene al punto A y a la recta r. Este plano está determinado porque pasa por el punto $A\,(0, -3, 1)$ y su dirección está generada por los vectores $\overrightarrow{u}_r = (1, 1, 2)$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{A_rA}$, donde A_r es cualquier punto de la recta r (por ejemplo, podemos elegir $A_r\,(-3, 0, 3)$). Entonces $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{A_rA} = (0, -3, 1) - (-3, 0, 3) = (3, -3, -2)$. Así, un vector normal al plano α es

$$\overrightarrow{n}_\alpha \parallel \overrightarrow{u}_r \times \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, el plano α tiene una ecuación de la forma $2x + 4y - 3z + k = 0$, y para contener al punto $A\,(0, -3, 1)$ debe ser $k = 15$. Así, deducimos que el plano que contiene a A y a r es el plano $\alpha \equiv 2x + 4y - 3z + 15 = 0$.

Llamemos ahora s a la recta que pasa por A, es paralela a π y corta a r. Por ser paralela a π, cualquier vector director de s debe ser perpendicular al vector normal a π ($\overrightarrow{u}_s \perp \overrightarrow{n}_\pi$). Como sabemos que s corta a r, llamemos B al único punto de intersección entre las rectas (si hubiese más, las rectas serían iguales y lo descubriríamos más adelante). Como $B = r \cap s$, el punto B debe ser de la forma

$$B \in r \quad \Rightarrow \quad \Big/ \; r \equiv \left\{\begin{array}{l} x = -3 + \lambda, \\ y = \lambda, \\ z = -3 + 2\lambda, \end{array}\right. \Big/ \quad \Rightarrow \quad B = (\lambda - 3, \lambda, 2\lambda - 3)\,.$$

Entonces un posible vector director de s es

$$\overrightarrow{u}_s = \overrightarrow{AB} = (\lambda - 3, \lambda + 3, 2\lambda + 2)\,.$$

Como sabemos que este vector es ortogonal a $\overrightarrow{n}_\pi$, podemos determinar el parámetro λ:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u}_s \perp \overrightarrow{n}_\pi \quad &\Leftrightarrow \quad (\lambda - 3, \lambda + 3, 2\lambda + 2) \cdot (2, -2, 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad 6\lambda - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1. \end{aligned}$$

Entonces $\overrightarrow{u}_s = (-2, 4, 4) \parallel (1, -2, -2)$ y como sabemos que s pasa por el punto $A\,(0, -3, 1)$, concluimos que

$$s \equiv \begin{cases} x = \lambda, \\ y = -3 - 2\lambda, \\ z = 1 - 2\lambda. \end{cases}$$

■

1.5.2. Opción B

Ejercicio 1 De la función $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f\,(x) = \dfrac{ax^2 + b}{x}$ se sabe que la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ viene dada por $y = -2$.

(a) *[**1'5 puntos**]* Calcula a y b.

(b) *[**1 punto**]* Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Solución : Como la recta tangente en $x = 1$ es $y = -2$, tenemos dos datos: $f\,(1) = -2$ y $f'\,(1) = 0$. Con estos dos datos y sabiendo que $f'\,(x) = \frac{ax^2 - b}{x^2}$, podemos determinar los parámetros a y b:

$$\begin{cases} f\,(1) = -2 \quad \Leftrightarrow \quad a + b = -2, \\ \\ f'\,(1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a - b = 0. \end{cases}$$

Así, $a = b = -1$ y la función f es

$$f\,(x) = -\frac{x^2 + 1}{x}.$$

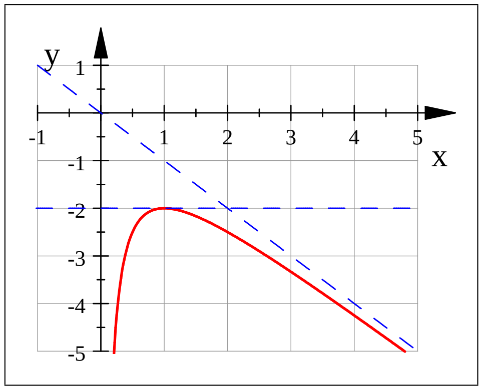
Para estudiar su monotonía, calculamos su primera derivada:

$$f'\,(x) = -\frac{2xx - \left(x^2 + 1\right)}{x^2} = -\frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{1 - x^2}{x^2}.$$

Sus únicos puntos críticos son $x = \pm 1$, pero como su dominio $]\,0, +\infty\,[$, despreciamos el valor negativo. Estudiamos el signo de la derivada en la siguiente tabla.

$$\begin{array}{c|cccc} f' & & + & \text{Mín} & - \\ \hline f & 0 & \nearrow & 1 & \searrow \end{array}$$

Concluimos que f es creciente en $]\,0, 1\,[$ y decreciente en $]\,1, +\infty\,[$. Concretamente, su gráfica es



■

Ejercicio 2 *[2'5 puntos]* Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(2x)$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0, 1)$.

Solución : Determinamos la integral indefinida de f integrando por partes dos veces:

$$\int x^2 \operatorname{sen} 2x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^2, & du = 2x\, dx \\ dv = \operatorname{sen} 2x\, dx, & v = -\dfrac{\cos 2x}{2} \end{array} \right| = -\frac{x^2 \cos 2x}{2} - \int (-x \cos 2x)\, dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = x, & du = dx \\ dv = \cos 2x\, dx, & v = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2} \end{array} \right| = -\frac{x^2 \cos 2x}{2} + \frac{x \operatorname{sen} 2x}{2} - \frac{1}{2} \int \operatorname{sen} 2x\, dx =$$

$$= -\frac{x^2 \cos 2x}{2} + \frac{x \operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C = \frac{\left(1 - 2x^2\right) \cos 2x + 2x \operatorname{sen} 2x}{4} + C$$

Para que $f(0) = 1$ la constante C debe valer

$$1 = f(0) = \frac{1}{4} + C \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{3}{4},$$

y así la función f es

$$f(x) = \frac{3 + \left(1 - 2x^2\right) \cos 2x + 2x \operatorname{sen} 2x}{4}.$$

■

Ejercicio 3 Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} x+my+z & = & 0, \\ x+y+mz & = & 2, \\ mx+y+z & = & m. \end{array}\right\}$$

(a) *[**1 punto**]* ¿Para qué valor de m el sistema tiene al menos dos soluciones?

(b) *[**1'5 puntos**]* ¿Para qué valores de m el sistema admite solución en la que $x=1$?

Solución: Para que el sistema tenga, al menos, dos soluciones distintas, debe ser compatible indeterminado. En este caso, el determinante de la matriz del sistema se anulará:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = \Big/ \begin{array}{c} F_2' = F_2 - F_1 \\ F_3' = F_3 - mF_1 \end{array} \Big/ = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 0 & 1-m & m-1 \\ 0 & 1-m^2 & 1-m \end{vmatrix} =$$

$$= (1-m)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1+m & 1 \end{vmatrix} = (1-m)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1+m & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-m)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ m+2 & 0 \end{vmatrix} = (1-m)^2 \, (m+2) \, .$$

Los únicos valores que anulan al determinante son $m_1 = 1$ y $m_2 = -2$. Estudiamos cada caso con el método de Gauss.

$$m_1 = 1, \qquad \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \qquad \text{Sistema incompatible,}$$

$$m_2 = -2, \qquad \left\| \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right\| \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \end{array} \left\| \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \qquad \text{Comp. indet.}$$

Por consiguiente, el único caso en el que el sistema posee dos soluciones distintas es el caso en el que $m=-2$.

Supongamos ahora que hay alguna solución en la que $x=1$. Desde luego, $m \neq 1$ porque si $m=1$ el sistema es incompatible. En este caso, si $x=1$, el sistema queda como sigue:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1+my+z=0, \\ 1+y+mz=2, \\ m+y+z=m, \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} my+z=-1, \\ y+mz=1, \\ y+z=0. \end{array} \right.$$

Utilizando el proceso de Gauss, tenemos:

$$\left\| \begin{array}{ccc} m & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-m & -1 \\ 0 & m-1 & 1 \end{array} \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-m & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

Así, sabiendo que $m \neq 1$, la matriz del sistema y la matriz ampliada tienen el mismo rango (dos), y entonces el *teorema de Rouché-Fröbenius* garantiza que el sistema es compatible, es decir, existe alguna solución. Concluimos pues que si $m \in \mathbb{R} - \{1\}$, siempre existe una solución en la que $x = 1$ que, aunque no se pida en el ejercicio, podemos decir que es

$$x = 1, \quad y = -z = \frac{1}{1-m}.$$

■

Ejercicio 4 Se sabe que las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = b + t \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 6x + 2z = 2 \end{cases}$$

están contenidas en un mismo plano.

(a) *[**1'25 puntos**]* Calcula b.

(b) *[**1'25 puntos**]* Halla la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s.

Solución : Llamemos π al plano que contiene a las rectas r y s, y vamos a calcularlo directamente. Un punto de r es $A_r\,(1,-1,b)$ y un vector director, $\overrightarrow{u}_r = (1,-1,1)$. Igualmente, un punto de s es $A_s\,(0,-2,1)$ y un vector director, $\overrightarrow{u}_s \parallel (1,-1,1) \times (3,0,1) = (-1,2,3) \parallel (1,-2,-3)$. Como $r, s \subset \pi$, los vectores $\overrightarrow{u}_r$ y $\overrightarrow{u}_s$ están sobre el plano, por lo que un vector normal a π es

$$\overrightarrow{n}_\pi = \overrightarrow{u}_r \times \overrightarrow{u}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Así π es de la forma $5x+4y-z+k=0$, y como contiene al punto $A_s\,(0,-2,1)$, obligatoriamente $k = 9$. Concluimos que el plano que contiene a r y a s es el plano $\pi \equiv 5x + 4y - z + 9 = 0$.

Además, para que π contenga a la recta r, también debe contener al punto $A_r\,(1,-1,b)$, por lo que

$$5 - 4 - b + 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = 10.$$

■

1.6. Modelo 6 - SEPTIEMBRE

1.6.1. Opción A

Ejercicio 1 De una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se sabe que $f(0) = 2$ y que $f'(x) = 2x$.

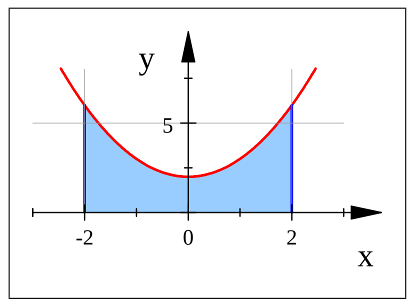
(a) *[**1 punto**]* Determina f.

(b) *[**1'5 puntos**]* Calcula el área de la región limitada por la gráfica de f, por el eje de abscisas y por las rectas de ecuación $x = -2$ y $x = 2$.

Solución: Dado que f está definida en $\mathbb{R}$ y su derivada es $f'(x) = 2x$, sabemos, integrando indefinidamente, que $f(x) = x^2 + C$, donde C es una constante de integración. La condición inicial $f(0) = 2$ nos dice que $C = 2$, por lo que se concluye que $f(x) = x^2 + 2$.

El área de la región pedida, utilizando la simetría par de f, es

$$A = \int_{-2}^{2} \left(x^2 + 2\right)\, dx = 2\left(\frac{x^3}{3} + 2x\right]_{x=0}^{x=2} = 2\left(\frac{8}{3} + 4\right) = \frac{40}{3}.$$



■

Ejercicio 2 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x-1)^2 e^{-x}$.

(a) *[**0'5 puntos**]* Halla las asíntotas de la gráfica de f.

(b) *[**1'5 puntos**]* Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula, si exsten, sus extremos relativos o locales y sus extremos absolutos o globales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función)

(c) *[**0'5 puntos**]* Esboza la gráfica de f.

Solución: Dado que $f(x) = (x-1)^2 e^{-x} = \frac{(x-1)^2}{e^x}$ y la exponencial es estrictamente positiva, la función f es continua en $\mathbb{R}$ y, por lo tanto, no posee ninguna asíntota vertical. Estudiemos qué ocurre en $\pm\infty$. Por un lado, en $-\infty$, no hay indeterminación.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x-1)^2 e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} (-x-1)^2 e^{x} = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty.$$

Igualmente, no hay asíntota oblícua en $-\infty$, ya que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{(x-1)^2 e^{-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(-x-1)^2 e^{x}}{-x} = \\ &= -\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+1}{x}\, e^{x} = -(+\infty)\cdot(+\infty) = -\infty.\end{aligned}$$

Sin embargo, a la derecha se produce una indeterminación que se salva utilizando dos veces la regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)^2}{e^x} = \Big/ \text{ Indet. } \frac{\infty}{\infty} \Big/ = \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2(x-1)}{e^x} = \Big/ \text{ Indet. } \frac{\infty}{\infty} \Big/ = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x} = 0.\end{aligned}$$

Por tanto, solamente $y=0$ es asíntota horizontal a la derecha.

Para estudiar su monotonía y sus extremos relativos, calculamos su primera derivada:

$$f'(x) = 2(x-1)e^{-x} + (x-1)^2\left(-e^{-x}\right) = (x-1)e^{-x}(2-(x-1)) = e^{-x}(x-1)(3-x).$$

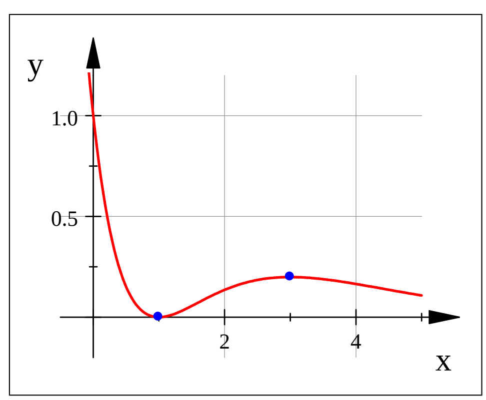
Dado que la exponencial no se anula, los únicos puntos críticos de f son $x=1$ y $x=3$. Analizamos su monotonía utilizando el signo de f' con la siguiente tabla (téngase en cuenta que la exponencial es estrictamente positiva)

f'	$-$	Mín	$+$	Máx	$-$
f	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$

$$\text{Monotonía}\begin{cases} f \text{ creciente en }]1,3[\,, \\ f \text{ decreciente en }]-\infty,1[\,\cup\,]3,+\infty[\,. \end{cases}$$

Es claro ahora que en $(1, f(1)) = (1,0)$ hay un mínimo, y en $(3, f(3)) = \left(3, \frac{4}{e^3}\right)$ hay un máximo. El primero es un mínimo absoluto porque $f(1)=0$ y la función f es no negativa (siempre $f(1) = 0 \le (x-1)^2 e^{-x} = f(x)$). Sin embargo, en $x=3$ hay un máximo relativo, ya que f toma valores arbitrariamente grandes al ser $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

$$\text{Extremos}\begin{cases} \text{Máximo relativo en } \left(3, \dfrac{4}{e^3}\right), \\ \text{Mínimo absoluto en } \ (1,0). \end{cases}$$



■

Ejercicio 3 ***[2'5 puntos]*** En una excavación arqueológica se han encontrado sortijas, monedas y pendientes. Una sortija, una moneda y un pendiente pesan conjuntamente 30 gramos. Además, 4 sortijas, 3 monedas y 2 pendientes han dado un peso total de 90 gramos. El peso de un objeto deformado e irreconocible es de 18 gramos. Determina si el mencionado objeto es una sortija, una moneda o un pendiente, sabiendo que los objetos que son del mismo tipo pesan lo mismo.

Solución: Llamemos s al peso de una sortija, m al peso de una moneda y p al peso de un pendiente. Las condiciones del problema nos indican que se verifican las relaciones

$$\begin{cases} s+m+p=30, \\ 4s+3m+2p=90. \end{cases}$$

Dado que tenemos dos ecuaciones independientes con tres incógnitas, el sistema es compatible indeterminado. Podemos pensar que el problema tiene infinitas soluciones pero realmente no es cierto, ya que hay condiciones intrínsecas al enunciado (como que el peso no puede ser negativo, $s, m, p \geq 0$) que nos van a permitir resolver la cuestión que se nos plantea. Si restamos a la segunda ecuación el triple de la primera, encontramos que $s-p=0$, o lo que es lo mismo, $s=p$ (una sortija pesa lo mismo que un pendiente). Entonces la primera ecuación dice que $2s+m=30$. ¿Puede una sortija o un pendiente pesar 18 gramos? Si fuese así, se tendría que $s=p=18$, pero entonces la primera ecuación afirma que $36+m=30$, lo que es imposible ya que $m \geq 0$ (el peso de una moneda no puede ser negativo). Por consiguiente, el objeto irreconocible que pesa 18 gramos es una moneda. ∎

Ejercicio 4 Considera un plano $\pi \equiv x+y+mz=3$ y la recta $r \equiv x=y-1=\dfrac{z-2}{2}$.

(a) ***[0'75 puntos]*** Halla m para que r y π sean paralelos.

(b) ***[0'75 puntos]*** Halla m para que r y π sean perpendiculares.

(c) ***[1 punto]*** ¿Existe algún valor de m para que la recta r esté contenida en el plano π?

Solución: Un vector normal al plano es $\overrightarrow{n}_\pi=(1,1,m)$ y un vector director de la recta r es $\overrightarrow{u}_r=(1,1,2)$. Entonces

$$\begin{cases} r \parallel \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{u}_r \perp \overrightarrow{n}_\pi \Leftrightarrow \overrightarrow{u}_r \cdot \overrightarrow{n}_\pi = 0 \Leftrightarrow 1+1+2m=0 \Leftrightarrow m=-1. \\ r \perp \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{u}_r \parallel \overrightarrow{n}_\pi \Leftrightarrow \overrightarrow{u}_r \times \overrightarrow{n}_\pi = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} m-2 \\ m-2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow m=2. \end{cases}$$

Por otro lado, para que $r \subset \pi$, es necesario que $r \parallel \pi$ y que un punto de r esté contenido en π. Como ya hemos demostrado, la primera condición implica que $m=-1$. Entonces π sería el plano $\pi \equiv x + y - z = 3$. Un punto de la recta r es $A_r(0,1,2)$. Dado que $0+1-2=-1 \neq 3$, el punto A_r no pertenece a π, y así la recta r nunca puede estar contenida en el plano π. ■

1.6.2. Opción B

Ejercicio 1 De una función $f:[0,5] \to \mathbb{R}$ se sabe que $f(3)=6$ y que su función derivada está dada por

$$f'(x) = \begin{cases} 5x-2, & \text{si} \quad 0 < x < 1, \\ x^2-6x+8, & \text{si} \quad 1 \leq x < 5. \end{cases}$$

(a) *[**1 punto**]* Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=3$.

(b) *[**1'5 puntos**]* Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

Solución : Dado que $f(3)=6$ (porque lo dice el problema) y $f'(3)=3^2-6\cdot 3+8=-1$, tenemos todos los datos necesarios para encontrar la recta tangente

$$y - f(3) = f'(3) \quad (x-3) \;\Leftrightarrow\; y-6 = -(x-3) \;\Leftrightarrow\; y = 9-x.$$

Para estudiar la monotonía y los extremos de f, estudiamos el signo de f'. Para ello, calculemos sus puntos críticos

$$\begin{cases} x \in \left]0,1\right[\;, & f'(x)=0 \Leftrightarrow 5x-2=0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{5}. \\ x \in \left]1,5\right[\;, & f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-6x+8=0 \Leftrightarrow x \in \{2,4\}. \end{cases}$$

Entonces la siguiente tabla nos indica su monotonía y sus extremos

f'		$-$	Mín	$+$		$+$	Máx	$-$	Mín	$+$	
f	0	$\searrow$	$\frac{2}{5}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	4	$\nearrow$	5

Deducimos que f es creciente en $\left]\frac{2}{5},2\right[\cup \left]4,5\right[$ y es decreciente en $\left]0,\frac{2}{5}\right[\cup \left]2,4\right[$. Además, f posee mínimos relativos en $x=\frac{2}{5}$ y en $x=4$, y un máximo relativo en $x=2$. Para calcular sus correspondientes imágenes por f, no queda más remedio que integrarla.

Como el enunciado afirma que $f'(1)=3$, la función f es derivable en $x=1$ y, por tanto, continua en $x=1$ (en particular, sabemos que es continua y derivable en $]0,5[$, aunque el enunciado no da nada a entender de lo que ocurre en los extremos). Integrando la función derivada tenemos que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5x^2}{2} - 2x + C_1, & \text{si} \quad 0 < x < 1, \\[2ex] \dfrac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x + C_2, & \text{si} \quad 1 \leq x < 5, \end{cases}$$

donde C_1 y C_2 son sendas constantes de integración. Podemos determinarlas utilizando la condición inicial $f(3) = 6$ y el hecho de que f es continua en $x = 1$.

$$\begin{cases} f(3) = 6 \;\Leftrightarrow\; 6 + C_2 = 6 \;\Leftrightarrow\; C_2 = 0, \\[2ex] f(1^-) = f(1^+) \;\Leftrightarrow\; \dfrac{1}{2} + C_1 = \dfrac{16}{3} + C_2 \;\Leftrightarrow\; C_1 = \dfrac{29}{6}. \end{cases}$$

Por tanto,

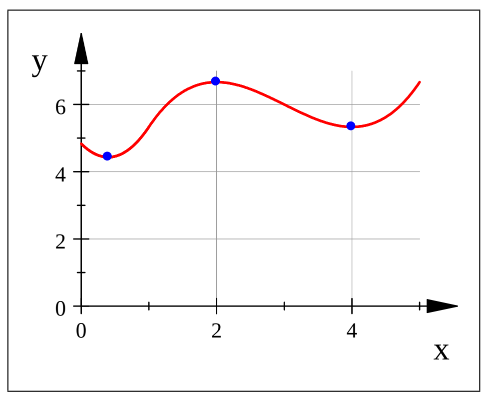
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5x^2}{2} - 2x + \dfrac{29}{6}, & \text{si} \quad 0 < x < 1, \\[2ex] \dfrac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x, & \text{si} \quad 1 \leq x < 5, \end{cases}$$

y tenemos las imágenes

$$f\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{133}{30}, \qquad f(2) = \frac{20}{3}, \qquad f(4) = \frac{16}{3},$$

que nos garantizan que

$$\begin{cases} \text{Máximo relativo en } \left(2, \dfrac{20}{3}\right), \\[2ex] \text{Mínimos relativos en } \left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{133}{30}\right) \text{ y } \left(4, \dfrac{16}{3}\right). \end{cases}$$



En los extremos $x = 0$ y $x = 5$ no sabemos si f alcanza un valor óptimo porque no sabemos si es continua en dichos puntos (obsérvese que la derivada sólo está definida en $]0, 5[$). ■

Ejercicio 2 Considera la integral definida $I = \displaystyle\int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x} - 1}\, dx$.

(a) *[**1'25 puntos**]* Exprésala mediante el cambio de variable $\sqrt{1+x} - 1 = t$.

(b) *[**1'25 puntos**]* Calcula I.

SOLUCIÓN : Si $t = \sqrt{1+x} - 1$, podemos despejar x como sigue

$$\sqrt{1+x} = t+1 \;\Leftrightarrow\; 1+x = (t+1)^2 \;\Leftrightarrow\; x = \left(t^2+2t+1\right) - 1 = t^2 + 2t.$$

Entonces $dx = (2t+2)\,dt = 2\,(t+1)\,dt$. Además, si $x = 3$, $t\,(3) = \sqrt{4} - 1 = 1$, y si $x = 8$, entonces $t\,(8) = \sqrt{9} - 1 = 2$. Así, la integral I queda de la forma

$$I = \int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x} - 1}\; dx = \int_1^2 \frac{1}{t}\; 2\,(t+1)\; dt.$$

Para calcular I utilizamos las propiedades de linealidad de la integral definida:

$$I = 2\int_1^2 \frac{t+1}{t}\; dt = 2\int_1^2 \left(1 + \frac{1}{t}\right) dt = 2\left(t + \ln|t| \right]_{t=1}^{t=2} =$$

$$= 2\left[\; (2+\ln 2) - (1 + \ln 1) \right] = 2\,(1+\ln 2)\,.$$

■

Ejercicio 3 Sabiendo que $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$, calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

(a) *[**1 punto**]* $|-3A|$ y $\left|A^{-1}\right|$.

(b) *[**0'75 puntos**]* $\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 2i & 2h & 2g \end{vmatrix}$.

(c) *[**0'75 puntos**]* $\begin{vmatrix} a & b & a-c \\ d & e & d-f \\ g & h & g-i \end{vmatrix}$.

SOLUCIÓN : Es claro que

$$|-3A| = \begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ -3d & -3e & -3f \\ -3g & -3h & -3i \end{vmatrix} = (-3)^{\dim A} \cdot |A| = (-3)^3 \cdot 2 = -54,$$

donde se ha utilizado tres veces que si un mismo número multiplica a todos los elementos de una línea (fila o columna) de una matriz cuadrada, entonces su determinante queda multiplicado por dicho número. Por otro lado, como $|A| = 2 \neq 0$, la matriz A tiene inversa. Ésta debe verificar, por definición, que $A \cdot A^{-1} = I_3$, siendo I_3 la matriz identidad de orden 3. Como el determinante de un producto de matrices cuadradas es el producto de sus determinantes, se tiene

$$|A| \cdot \left|A^{-1}\right| = |I_3| = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}.$$

Por otro lado,

$$\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 2i & 2h & 2g \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ i & h & g \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 = -4,$$

donde la segunda igualdad se justifica en el hecho de que al intercambiar dos líneas paralelas (filas o columnas) de una matriz, su determinante cambia de signo. Finalmente, dado que al sumarle a una línea (fila o columna) de un determinante una combinación lineal de las restantes líneas paralelas el determinante no varía, tenemos que

$$\begin{vmatrix} a & b & a-c \\ d & e & d-f \\ g & h & g-i \end{vmatrix} = \Big/ \; C_3' = C_3 - C_1 \; \Big/ = \begin{vmatrix} a & b & -c \\ d & e & -f \\ g & h & -i \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$$

■

Ejercicio 4 Sean los planos $\pi_1 \equiv 2x + y - z + 5 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + 2y + z + 2 = 0$.

(a) *[**1'5 puntos**]* Calcula las coordenadas de punto P sabiendo que está en el plano π_1 y que su proyección ortogonal sobre el plano π_2 es el punto $(1, 0, -3)$.

(b) *[**1 punto**]* Calcula el punto simétrico de P respecto de π_2.

Solución : Llamemos $Q\,(1, 0, -3) \in \pi_2$ al punto sobre el que se proyecta ortogonalmente el punto $P \in \pi_1$ y llamemos r a la recta que pasa por los punto P y Q. Evidentemente, como P se proyecta sobre π_2 ortogonalmente sobre el punto Q, la recta r es ortogonal al plano π_2, luego posee como vector director al vector normal al plano π_2 ($\overrightarrow{u}_r = \overrightarrow{n}_{\pi_2} = (1, 2, 1)$). Si tenemos en cuenta que $Q \in r$, la recta r queda determinada por las ecuaciones paramétricas

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 2\lambda, \\ z = -3 + \lambda. \end{cases}$$

Como $P \in r$, este punto debe ser de la forma $(1 + \lambda, 2\lambda, \lambda - 3)$, pero como también $P \in \pi_1$, podemos determinar P como la intersección entre r y π_1:

$$P = r \cap \pi_1 \equiv \{\; 2\,(1 + \lambda) + 2\lambda - (\lambda - 3) + 5 = 0 \;\}.$$

La única solución de esta ecuación, $3\lambda + 10 = 0$, es $\lambda = -\frac{10}{3}$, lo que nos proporciona el punto $P\left(-\dfrac{7}{3}, -\dfrac{20}{3}, -\dfrac{19}{3}\right)$.

Llamemos ahora P' al punto simétrico de P respecto de la recta r. Entonces Q es el punto medio entre P y P', por lo que

$$\overrightarrow{PP'} = 2\overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{p'} = \overrightarrow{p} + 2\overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{7}{3}, -\frac{20}{3}, -\frac{19}{3}\right) + 2\left(\frac{10}{3}, \frac{20}{3}, \frac{10}{3}\right) = \left(\frac{13}{3}, \frac{20}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

de donde se deduce que $P'\left(\dfrac{13}{3}, \dfrac{20}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$. ■