Resolución del examen de Matemáticas II de Selectividad en Andalucía – Septiembre de 2005

Antonio Francisco Roldán López de Hierro *

de septiembre de 2005

Opción A

Ejercicio 1 De una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se sabe que $f(0) = 2$ y que $f'(x) = 2x$.

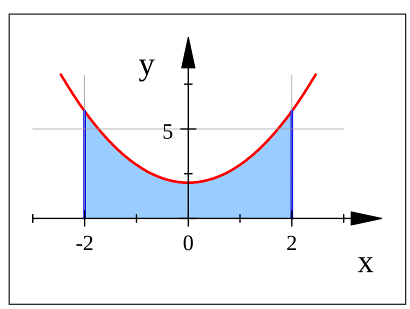
(a) *[**1 punto**]* Determina f.

(b) *[**1'5 puntos**]* Calcula el área de la región limitada por la gráfica de f, por el eje de abscisas y por las rectas de ecuación $x = -2$ y $x = 2$.

Solución: Dado que f está definida en $\mathbb{R}$ y su derivada es $f'(x) = 2x$, sabemos, integrando indefinidamente, que $f(x) = x^2 + C$, donde C es una constante de integración. La condición inicial $f(0) = 2$ nos dice que $C = 2$, por lo que se concluye que $f(x) = x^2 + 2$.

El área de la región pedida, utilizando la simetría par de f, es

$$A = \int_{-2}^{2} \left(x^2 + 2\right) dx = 2 \left(\frac{x^3}{3} + 2x \right]_{x=0}^{x=2} = 2 \left(\frac{8}{3} + 4 \right) = \frac{40}{3}.$$



■

*Profesor del *I.E.S. Acci* de Guadix (Granada) - http://www.ies-acci.com/antonioroldan/

Ejercicio 2 Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=(x-1)^2\,e^{-x}$.

(a) *[**0'5 puntos**]* Halla las asíntotas de la gráfica de f.

(b) *[**1'5 puntos**]* Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula, si exsten, sus extremos relativos o locales y sus extremos absolutos o globales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función)

(c) *[**0'5 puntos**]* Esboza la gráfica de f.

Solución : Dado que $f(x)=(x-1)^2\,e^{-x}=\frac{(x-1)^2}{e^x}$ y la exponencial es estrictamente positiva, la función f es continua en $\mathbb{R}$ y, por lo tanto, no posee ninguna asíntota vertical. Estudiemos qué ocurre en $\pm\infty$. Por un lado, en $-\infty$, no hay indeterminación.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-1)^2\,e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}(-x-1)^2\,e^{x}=(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty.$$

Igualmente, no hay asíntota oblícua en $-\infty$, ya que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}&=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-1)^2\,e^{-x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(-x-1)^2\,e^{x}}{-x}=\\&=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+1}{x}\;e^x=-(+\infty)\cdot(+\infty)=-\infty.\end{aligned}$$

Sin embargo, a la derecha se produce una indeterminación que se salva utilizando dos veces la regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)^2}{e^x}=\Big/\text{ Indet. }\frac{\infty}{\infty}\Big/=\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(x-1)}{e^x}=\Big/\text{ Indet. }\frac{\infty}{\infty}\Big/=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0.\end{aligned}$$

Por tanto, solamente $y=0$ es asíntota horizontal a la derecha.

Para estudiar su monotonía y sus extremos relativos, calculamos su primera derivada:

$$f'(x)=2(x-1)\,e^{-x}+(x-1)^2\left(-e^{-x}\right)=(x-1)\,e^{-x}\,(2-(x-1))=e^{-x}\,(x-1)\,(3-x)\,.$$

Dado que la exponencial no se anula, los únicos puntos críticos de f son $x=1$ y $x=3$. Analizamos su monotonía utilizando el signo de f' con la siguiente tabla (téngase en cuenta que la exponencial es estrictamente positiva)

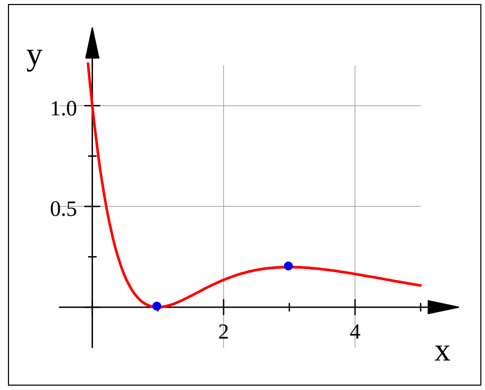
f'	$-$	Mín	$+$	Máx	$-$
f	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$

$$\text{Monotonía}\begin{cases} f \text{ creciente en }]\,1,3\,[\,,\\[2ex] f \text{ decreciente en }]-\infty,1\,[\,\cup\,]\,3,+\infty\,[\,.\end{cases}$$

Es claro ahora que en $(1,f(1))=(1,0)$ hay un mínimo, y en $(3,f(3))=\left(3,\frac{4}{e^3}\right)$ hay un máximo. El primero es un mínimo absoluto porque $f(1)=0$ y la función f es no negativa (siempre

$f(1) = 0 \leq (x-1)^2 e^{-x} = f(x)$). Sin embargo, en $x = 3$ hay un máximo relativo, ya que f toma valores arbitrariamente grandes al ser $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

$$\text{Extremos} \begin{cases} \text{Máximo relativo en } \left(3, \dfrac{4}{e^3}\right), \\ \\ \text{Mínimo absoluto en } \ (1,0). \end{cases}$$



■

Ejercicio 3 ***[2'5 puntos]*** En una excavación arqueológica se han encontrado sortijas, monedas y pendientes. Una sortija, una moneda y un pendiente pesan conjuntamente 30 gramos. Además, 4 sortijas, 3 monedas y 2 pendientes han dado un peso total de 90 gramos. El peso de un objeto deformado e irreconocible es de 18 gramos. Determina si el mencionado objeto es una sortija, una moneda o un pendiente, sabiendo que los objetos que son del mismo tipo pesan lo mismo.

Solución: Llamemos s al peso de una sortija, m al peso de una moneda y p al peso de un pendiente. Las condiciones del problema nos indican que se verifican las relaciones

$$\begin{cases} s + m + p = 30, \\ \\ 4s + 3m + 2p = 90. \end{cases}$$

Dado que tenemos dos ecuaciones independientes con tres incógnitas, el sistema es compatible indeterminado. Podemos pensar que el problema tiene infinitas soluciones pero realmente no es cierto, ya que hay condiciones intrínsecas al enunciado (como que el peso no puede ser negativo, $s, m, p \geq 0$) que nos van a permitir resolver la cuestión que se nos plantea. Si restamos a la segunda ecuación el triple de la primera, encontramos que $s - p = 0$, o lo que es lo mismo, $s = p$ (una sortija pesa lo mismo que un pendiente). Entonces la primera ecuación dice que $2s + m = 30$. ¿Puede una sortija o un pendiente pesar 18 gramos? Si fuese así, se tendría que $s = p = 18$, pero entonces la primera ecuación afirma que $36 + m = 30$, lo que es imposible ya que $m \geq 0$ (el peso de una moneda no puede ser negativo). Por consiguiente, el objeto irreconocible que pesa 18 gramos es una moneda. ■

Ejercicio 4 Considera un plano $\pi \equiv x + y + mz = 3$ y la recta $r \equiv x = y - 1 = \dfrac{z-2}{2}$.

(a) ***[0'75 puntos]*** Halla m para que r y π sean paralelos.

(b) *[0'75 puntos]* Halla m para que r y π sean perpendiculares.

(c) *[1 punto]* ¿Existe algún valor de m para que la recta r esté contenida en el plano π?

Solución: Un vector normal al plano es $\overrightarrow{n}_\pi = (1, 1, m)$ y un vector director de la recta r es $\overrightarrow{u}_r = (1, 1, 2)$. Entonces

$$\begin{cases} r \parallel \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{u}_r \perp \overrightarrow{n}_\pi \Leftrightarrow \overrightarrow{u}_r \cdot \overrightarrow{n}_\pi = 0 \Leftrightarrow 1 + 1 + 2m = 0 \Leftrightarrow m = -1. \\ \\ r \perp \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{u}_r \parallel \overrightarrow{n}_\pi \Leftrightarrow \overrightarrow{u}_r \times \overrightarrow{n}_\pi = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} m-2 \\ m-2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow m = 2. \end{cases}$$

Por otro lado, para que $r \subset \pi$, es necesario que $r \parallel \pi$ y que un punto de r esté contenido en π. Como ya hemos demostrado, la primera condición implica que $m = -1$. Entonces π sería el plano $\pi \equiv x + y - z = 3$. Un punto de la recta r es $A_r(0, 1, 2)$. Dado que $0 + 1 - 2 = -1 \neq 3$, el punto A_r no pertenece a π, y así la recta r nunca puede estar contenida en el plano π. ■

Opción B

Ejercicio 1 De una función $f : [0, 5] \to \mathbb{R}$ se sabe que $f(3) = 6$ y que su función derivada está dada por

$$f'(x) = \begin{cases} 5x - 2, & \text{si } \ 0 < x < 1, \\ \\ x^2 - 6x + 8, & \text{si } \ 1 \leq x < 5. \end{cases}$$

(a) *[1 punto]* Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$.

(b) *[1'5 puntos]* Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

Solución: Dado que $f(3) = 6$ (porque lo dice el problema) y $f'(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = -1$, tenemos todos los datos necesarios para encontrar la recta tangente

$$y - f(3) = f'(3) \ (x - 3) \ \Leftrightarrow \ y - 6 = -(x - 3) \ \Leftrightarrow \ y = 9 - x.$$

Para estudiar la monotonía y los extremos de f, estudiamos el signo de f'. Para ello, calculemos sus puntos críticos

$$\begin{cases} x \in \,]0, 1[\ , & f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{5}. \\ \\ x \in \,]1, 5[\ , & f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x \in \{2, 4\}. \end{cases}$$

Entonces la siguiente tabla nos indica su monotonía y sus extremos

f'		$-$	Mín	$+$		$+$	Máx	$-$	Mín	$+$	
f	0	$\searrow$	$\frac{2}{5}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	4	$\nearrow$	5

Deducimos que f es creciente en $\left]\frac{2}{5},2\right[\cup]4,5[$ y es decreciente en $\left]0,\frac{2}{5}\right[\cup]2,4[$. Además, f posee mínimos relativos en $x=\frac{2}{5}$ y en $x=4$, y un máximo relativo en $x=2$. Para calcular sus correspondientes imágenes por f, no queda más remedio que integrarla.

Como el enunciado afirma que $f'(1)=3$, la función f es derivable en $x=1$ y, por tanto, continua en $x=1$ (en particular, sabemos que es continua y derivable en $]0,5[$, aunque el enunciado no da nada a entender de lo que ocurre en los extremos). Integrando la función derivada tenemos que

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{5x^2}{2}-2x+C_1, & \text{si} \quad 0<x<1, \\[2ex] \dfrac{x^3}{3}-3x^2+8x+C_2, & \text{si} \quad 1\le x<5, \end{cases}$$

donde C_1 y C_2 son sendas constantes de integración. Podemos determinarlas utilizando la condición inicial $f(3)=6$ y el hecho de que f es continua en $x=1$.

$$\begin{cases} f(3)=6 \;\Leftrightarrow\; 6+C_2=6 \;\Leftrightarrow\; C_2=0, \\[2ex] f\left(1^-\right)=f\left(1^+\right) \;\Leftrightarrow\; \dfrac{1}{2}+C_1=\dfrac{16}{3}+C_2 \;\Leftrightarrow\; C_1=\dfrac{29}{6}. \end{cases}$$

Por tanto,

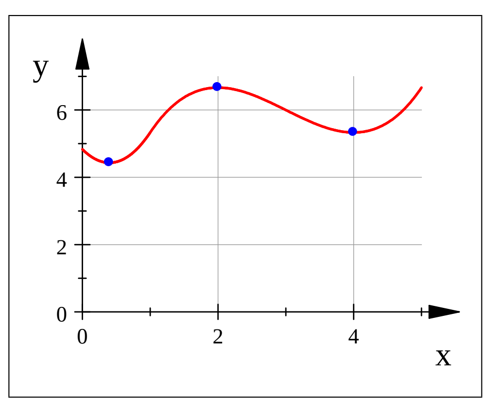
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{5x^2}{2}-2x+\dfrac{29}{6}, & \text{si} \quad 0<x<1, \\[2ex] \dfrac{x^3}{3}-3x^2+8x, & \text{si} \quad 1\le x<5, \end{cases}$$

y tenemos las imágenes

$$f\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{133}{30}, \qquad f(2)=\frac{20}{3}, \qquad f(4)=\frac{16}{3},$$

que nos garantizan que

$$\begin{cases} \text{Máximo relativo en } \left(2,\dfrac{20}{3}\right), \\[2ex] \text{Mínimos relativos en } \left(\dfrac{2}{5},\dfrac{133}{30}\right) \text{ y } \left(4,\dfrac{16}{3}\right). \end{cases}$$



En los extremos $x = 0$ y $x = 5$ no sabemos si f alcanza un valor óptimo porque no sabemos si es continua en dichos puntos (obsérvese que la derivada sólo está definida en $]0, 5[$). ■

Ejercicio 2 Considera la integral definida $I = \displaystyle\int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}\, dx$.

(a) *[**1'25 puntos**]* Exprésala mediante el cambio de variable $\sqrt{1+x} - 1 = t$.

(b) *[**1'25 puntos**]* Calcula I.

Solución : Si $t = \sqrt{1+x} - 1$, podemos despejar x como sigue

$$\sqrt{1+x} = t + 1 \;\Leftrightarrow\; 1 + x = (t+1)^2 \;\Leftrightarrow\; x = \left(t^2 + 2t + 1\right) - 1 = t^2 + 2t.$$

Entonces $dx = (2t+2)\, dt = 2\,(t+1)\, dt$. Además, si $x = 3$, $t\,(3) = \sqrt{4} - 1 = 1$, y si $x = 8$, entonces $t\,(8) = \sqrt{9} - 1 = 2$. Así, la integral I queda de la forma

$$I = \int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}\, dx = \int_1^2 \frac{1}{t}\, 2\,(t+1)\; dt.$$

Para calcular I utilizamos las propiedades de linealidad de la integral definida:

$$I = 2\int_1^2 \frac{t+1}{t}\, dt = 2\int_1^2 \left(1 + \frac{1}{t}\right) dt = 2\left(t + \ln|t| \right]_{t=1}^{t=2} =$$

$$= 2\left[\; (2 + \ln 2) - (1 + \ln 1) \right] = 2\,(1 + \ln 2)\,.$$

■

Ejercicio 3 Sabiendo que $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$, calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

(a) *[**1 punto**]* $\quad |-3A|$ y $\left|A^{-1}\right|$.

(b) *[**0'75 puntos**]* $\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 2i & 2h & 2g \end{vmatrix}$.

(c) *[**0'75 puntos**]* $\begin{vmatrix} a & b & a-c \\ d & e & d-f \\ g & h & g-i \end{vmatrix}$.

Solución : Es claro que

$$|-3A| = \begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ -3d & -3e & -3f \\ -3g & -3h & -3i \end{vmatrix} = (-3)^{\dim A} \cdot |A| = (-3)^3 \cdot 2 = -54,$$

donde se ha utilizado tres veces que si un mismo número multiplica a todos los elementos de una línea (fila o columna) de una matriz cuadrada, entonces su determinante queda multiplicado por dicho número. Por otro lado, como $|A| = 2 \neq 0$, la matriz A tiene inversa. Ésta debe verificar, por definición, que $A \cdot A^{-1} = I_3$, siendo I_3 la matriz identidad de orden 3. Como el determinante de un producto de matrices cuadradas es el producto de sus determinantes, se tiene

$$|A| \cdot \left|A^{-1}\right| = |I_3| = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}.$$

Por otro lado,

$$\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 2i & 2h & 2g \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ i & h & g \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 = -4,$$

donde la segunda igualdad se justifica en el hecho de que al intercambiar dos líneas paralelas (filas o columnas) de una matriz, su determinante cambia de signo. Finalmente, dado que al sumarle a una línea (fila o columna) de un determinante una combinación lineal de las restantes líneas paralelas el determinante no varía, tenemos que

$$\begin{vmatrix} a & b & a-c \\ d & e & d-f \\ g & h & g-i \end{vmatrix} = \big/\ C_3' = C_3 - C_1\ \big/ = \begin{vmatrix} a & b & -c \\ d & e & -f \\ g & h & -i \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$$

■

Ejercicio 4 Sean los planos $\pi_1 \equiv 2x + y - z + 5 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + 2y + z + 2 = 0$.

(a) *[**1'5 puntos**]* Calcula las coordenadas de punto P sabiendo que está en el plano π_1 y que su proyección ortogonal sobre el plano π_2 es el punto $(1, 0, -3)$.

(b) *[**1 punto**]* Calcula el punto simétrico de P respecto de π_2.

Solución : Llamemos $Q\,(1, 0, -3) \in \pi_2$ al punto sobre el que se proyecta ortogonalmente el punto $P \in \pi_1$ y llamemos r a la recta que pasa por los punto P y Q. Evidentemente, como P se proyecta sobre π_2 ortogonalmente sobre el punto Q, la recta r es ortogonal al plano π_2, luego posee como vector director al vector normal al plano π_2 ($\overrightarrow{u}_r = \overrightarrow{n}_{\pi_2} = (1,2,1)$). Si tenemos en cuenta que $Q \in r$, la recta r queda determinada por las ecuaciones paramétricas

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 2\lambda, \\ z = -3 + \lambda. \end{cases}$$

Como $P \in r$, este punto debe ser de la forma $(1+\lambda, 2\lambda, \lambda - 3)$, pero como también $P \in \pi_1$, podemos determinar P como la intersección entre r y π_1:

$$P = r \cap \pi_1 \equiv \{ \; 2\,(1+\lambda) + 2\lambda - (\lambda - 3) + 5 = 0 \; \} .$$

La única solución de esta ecuación, $3\lambda + 10 = 0$, es $\lambda = -\frac{10}{3}$, lo que nos proporciona el punto $P\left(-\dfrac{7}{3}, -\dfrac{20}{3}, -\dfrac{19}{3}\right)$.

Llamemos ahora P' al punto simétrico de P respecto de la recta r. Entonces Q es el punto medio entre P y P', por lo que

$$\overrightarrow{PP'} = 2\overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{p'} = \overrightarrow{p} + 2\overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{7}{3}, -\frac{20}{3}, -\frac{19}{3}\right) + 2\left(\frac{10}{3}, \frac{20}{3}, \frac{10}{3}\right) = \left(\frac{13}{3}, \frac{20}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

de donde se deduce que $P'\left(\dfrac{13}{3}, \dfrac{20}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$. ∎