Resolución del examen de Matemáticas II de Selectividad en Andalucía – Junio de 2005

Antonio Francisco Roldán López de Hierro *

de junio de 2005

Opción A

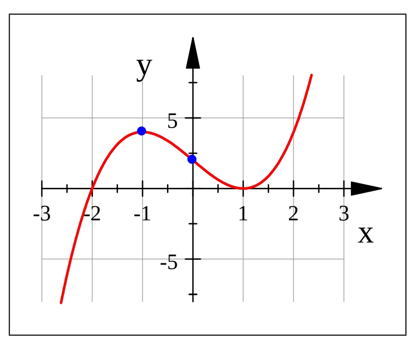
Ejercicio 1 ***[2'5 puntos]*** De la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo en $x = -1$, y que su gráfica corta en el punto de abscisa $x = -2$ y tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 0$. Calcula a, b, c y d sabiendo, además, que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene pendiente 9.

SOLUCIÓN: Es claro que $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ y que $f''(x) = 6ax + 2b$. Transformamos los datos del problema en cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$\begin{array}{llllll} \text{Máximo en } x=-1 & \Rightarrow & f'(-1)=0 & \Leftrightarrow & 3a-2b+c=0, \\ \text{Corta } OX \text{ en } x=-2 & \Leftrightarrow & f(-2)=0 & \Leftrightarrow & -8a+4b-2c+d=0, \\ \text{Punto inflexión en } x=0 & \Rightarrow & f''(0)=0 & \Leftrightarrow & 2b=0, \\ \text{Pendiente 9 en } x=2 & \Leftrightarrow & f'(2)=9 & \Leftrightarrow & 12a+4b+c=9. \end{array}$$

De la tercera condición se deduce que $b = 0$. Así, las condiciones primera y cuarta se transforman en $3a + c = 0$ y $12a + c = 9$, cuya única solución es $a = 1$ y $c = -3$. Por último, la segunda condición nos obliga a que $d = 8a - 4b + 2c = 2$. Así

$$a = 1,\ b = 0,\ c = -3,\ d = 2 \quad \Rightarrow \quad f(x) = x^3 - 3x + 2.$$



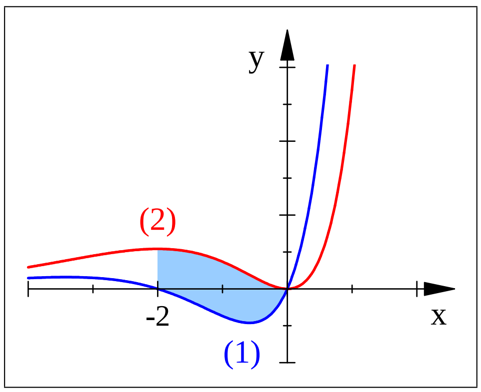
*Profesor del *I.E.S. Acci* de Guadix (Granada) - http://www.ies-acci.com/antonioroldan/

■

Ejercicio 2 Se sabe que las dos gráficas del dibujo corresponden a la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2\,e^x$ y a su función derivada f'.

(a) *[***1 punto***]* Indica, razonando la respuesta, cuál es la gráfica de f y cuál la de f'.

(b) *[***1'5 puntos***]* Calcula el área de la región sombreada.



Solución : La forma más rápida de determinar cuál es f es mirar sus puntos de corte con el eje OX, ya que se ve en la gráfica que la función (1) se anula dos veces (en $x=-2$ y en $x=0$), mientras que la función (2) sólo se anula en un único punto ($x=0$). Dado que la función $f(x)=x^2\,e^x$ sólo se anula si $x=0$ (porque la exponencial es estrictamente positiva), podemos afirmar que obligatoriamente f ha de ser la función (2). Su función derivada, $f'(x)=\left(x^2+2x\right)e^x$, se anula dos veces, en $x=-2$ y en $x=0$, por lo que debe ser la función (1). Coherentemente, donde f tiene un mínimo ($x=0$) y un máximo ($x=-2$), la función f' se anula.

El área pedida es

$$A=\int_{-2}^{0}\left(f(x)-f'(x)\right)\,dx=\int_{-2}^{0}\left(x^2\,e^x-\left(x^2+2x\right)\,e^x\right)\,dx=-2\int_{-2}^{0}x\,e^x\,dx.$$

Utilizando el método de integración por partes, el área anterior es

$$A=\left|\begin{array}{ll} u=x, & du=dx \\ dv=e^x\,dx, & v=e^x \end{array}\right|=-2\left[\left(\left. x\,e^x\right]_{x=-2}^{x=0}-\int_{-2}^{0}e^x\,dx\right]=\right.$$

$$=-2\left(\left.(x-1)\,e^x\right]_{x=-2}^{x=0}\right.==-2\left(-e^0-\left(-3e^{-2}\right)\right)=2\left(1-\frac{3}{e^2}\right)=\frac{2\left(e^2-3\right)}{e^2}.$$

■

Ejercicio 3 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) *[**1 punto**]* ¿Tiene A inversa? En caso afirmativo, calcúlala.

(b) *[**1'5 puntos**]* Determina la matriz X que cumple que $A \cdot X + C \cdot B^t = B \cdot B^t$, siendo B^t la matriz transpuesta de B.

Solución : Dado que $\det A = -7 \neq 0$, la matriz A es inversible y su inversa es

$$A^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

La ecuación matricial es muy secilla, pues

$$\begin{aligned} A \cdot X + C \cdot B^t = B \cdot B^t \; &\Leftrightarrow \; A \cdot X = B \cdot B^t - C \cdot B^t = (B - C) \cdot B^t \; \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \; X = A^{-1} \cdot (B - C) \cdot B^t. \end{aligned}$$

Haciendo operaciones con matrices

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 1 & -26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{4}{7} & \dfrac{6}{7} \\ \dfrac{1}{7} & -\dfrac{26}{7} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■

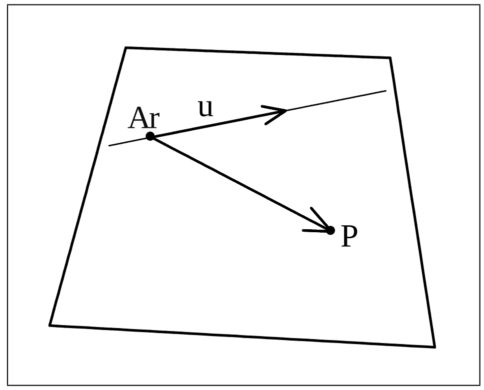
Ejercicio 4 Considera el punto $P\,(2, 0, 1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + 2y = 6, \\ z = 2. \end{cases}$

(a) *[**1 punto**]* Halla la ecuación del plano que contiene a P y a r .

(b) *[**1'5 puntos**]* Calcula el punto simétrico de P respecto de la recta r.

Solución : Llamemos π al plano que contiene a P y a r. Evidentemente, π viene determinado por el punto P y los vectores $\vec{u}_r$ (director de la recta r) y $\overrightarrow{A_r P}$, donde A_r es cualquier punto de la recta r. Elijamos, por ejemplo, $A_r\,(2,2,2)$, de donde $\overrightarrow{A_rP} = (0,-2,-1)$, y elijamos como vector director de r al producto vectorial

$$\vec{u}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



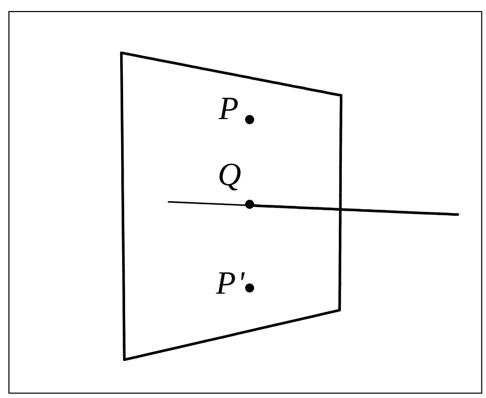
Un vector normal al plano π puede elegirse así:

$$\vec{n}_\pi = \vec{u}_r \times \overrightarrow{A_rP} = (2,-1,0) \times (0,-2,-1) = (1,2,-4)\,.$$

Entonces una ecuación general del plano π es de la forma $x + 2y - 4z + k = 0$, y para que el punto $P\,(2,0,1)$ pertenezca a este plano, obligatoriamente $k = 2$ y, así, una ecuación de π es $\pi \equiv x + 2y - 4z + 2 = 0$.

Para calcular el punto P', simétrico de P respecto de r, llamemos α al plano perpendicular a r que pasa por P. Cualquier vector normal a α es paralelo a cualquier vector director de r, por lo que podemos tomar $\vec{n}_\alpha = \vec{u}_r = (2,-1,0)$. Así $\alpha \equiv 2x - y + k' = 0$, y para que $P\,(2,0,1)$ pertenezca a α es necesario que $k' = -4$, por lo que $\alpha \equiv 2x - y - 4 = 0$. Llamemos Q al único punto donde r corta a α. Sus coordenadas vienen dadas por

$$Q = r \cap \alpha \equiv \left\{ \begin{array}{c} x + 2y = 6, \\ z = 2, \\ 2x - y = 4\ . \end{array} \right\} = \left(\frac{14}{5}, \frac{8}{5}, 2 \right).$$



Entonces $\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}, 1 \right)$, y dado que Q es el punto medio entre P y P', se concluye que

$$\overrightarrow{PP'} = 2\overrightarrow{PQ} \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{p'} = \overrightarrow{p} + 2\overrightarrow{PQ} = (2,0,1) + 2\,\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}, 1 \right) = \left(\frac{18}{5}, \frac{16}{5}, 3 \right),$$

lo que significa que $P' \left(\frac{18}{5}, \frac{16}{5}, 3 \right)$. ∎

Opción B

Ejercicio 1 Sea f la función definida para $x \neq 0$ por $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.

(a) *[***1 punto***]* Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

(b) *[***1 punto***]* Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

(c) *[***0'5 puntos***]* Esboza la gráfica de f.

Solución: Como en el punto $x = 0$ se anula el denominador de f pero no el numerador, el eje de ordenadas $x = 0$ es una asíntota vertical de f, siendo

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \ , \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.$$

Además, dado que $f(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}$, la recta $y = x$ es asíntota oblícua de f a la izquierda y a la derecha, lo cual también se puede demostrar observando que

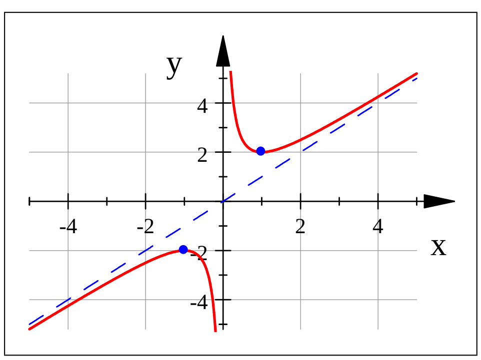
$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1, \qquad n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1-x^2}{x} = 0.$$

Por otro lado, dado que $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$, los únicos puntos críticos de f son $x = \pm 1$. Un sencillo estudio del signo de la derivada de f (teniendo en cuenta que su denominador es siempre positivo) demuestra que

f'	$+$	Máx	$-$		$-$	Mín	$+$
f	$\nearrow$	-1	$\searrow$	0	$\searrow$	1	$\nearrow$

$$\text{Monotonía} \begin{cases} f \text{ creciente en }]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[\,, \\ f \text{ es decreciente en }]-1,0[\,\cup\,]0,1[\,. \end{cases} \qquad \text{Extremos} \begin{cases} \text{Máximo rel. en } (-1,-2), \\ \text{Mínimo rel. en } (1,2). \end{cases}$$

Así, la gráfica de f es la adjunta.



■

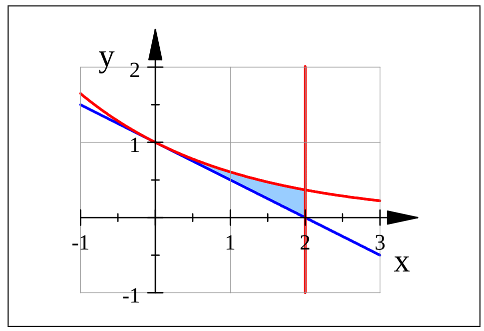
Ejercicio 2 Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^{-x/2}$.

(a) *[**0'75 puntos**]* Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$.

(b) *[**1'75 puntos**]* Calcula el área de la región acotada que está limitada por la gráfica de f, la recta de ecuación $x=2$ y la recta tangente obtenida en **(a)**.

Solución: Dado que $f'(x)=-\frac{1}{2}\,e^{-x/2}$, se tiene que $f'(0)=-\frac{1}{2}$. Como $f(0)=1$, la recta tangente es:

$$y-f(0)=f'(0)\ (x-0)\ \Leftrightarrow\ y=1-\frac{1}{2}x=\frac{2-x}{2}.$$



Entonces el área pedida es

$$A=\int_0^2\left(e^{-x/2}-\frac{2-x}{2}\right)\,dx=\left(-2e^{-x/2}-x+\frac{x^2}{4}\right]_{x=0}^{x=2}=$$

$$=\left(-\frac{2}{e}-2+1\right)-(-2-0+0)=1-\frac{2}{e}=\frac{e-2}{e}.$$

■

Ejercicio 3 Considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{aligned} x+y+z&=-2,\\ -\lambda x+3y+z&=-7,\\ x+2y+(\lambda+2)\,z&=-5.\end{aligned}\right.$$

(a) *[**1'5 puntos**]* Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.

(b) *[**1 punto**]* Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

Solución : Calculamos el determinante de la matriz del sistema utilizando las propiedades de los determinantes.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\lambda & 3 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \qquad \Big/ \begin{array}{l} F_2' = F_2 - 3F_1 \\ F_3' = F_3 - 2F_1 \end{array} \Big/$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\lambda-3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \qquad / \text{ desarrollando por la segunda columna } /$$

$$= - \begin{vmatrix} -\lambda-3 & -2 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda\ (\lambda+3) + 2 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2).$$

Evidentemente, el determinante sólo se anula si $\lambda \in \{-2,-1\}$, por lo que es inmediato que si $\lambda \in \mathbb{R} - \{-2,-1\}$, el sistema es compatible determinado. Analizamos los dos casos que quedan utilizando el método de Gauss:

$$\lambda = -1, \quad \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & -5 \end{array} \right\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{array} \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \quad \text{Incompatible.}$$

$$\lambda = -2, \quad \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{array} \right\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array} \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \quad \text{Comp. indeterminado.}$$

La clasificación completa del sistema es

- Si $\lambda \in \mathbb{R} - \{-2,-1\}$, el sistema es compatible determinado.
- Si $\lambda = -1$, el sistema es incompatible.
- Si $\lambda = -2$, el sistema es compatible indeterminado.

En particular, el sistema es compatible indeterminado cuando $\lambda = -2$, y su solución en este caso es

$$\left\{ \begin{array}{r} x+y+z = -2, \\ y - z = -3, \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad / \ \mu = z \ / \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = -2\mu + 1, \\ y = \mu - 3 \\ z = \mu. \end{array} \right.$$

■

Ejercicio 4 Sean los vectores $\vec{v}_1 = (0,1,0)$, $\vec{v}_2 = (2,1,-1)$ y $\vec{v}_3 = (2,3,-1)$.

(a) *[**0'75 puntos**]* ¿Son los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ linealmente dependientes?

(b) *[**0'75 puntos**]* ¿Para qué valor de a el vector $(4, a+3, -2)$ puede expresarse como combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$?

(c) *[**1 punto**]* Calcula un vector unitario y perpendicular $\vec{v}_1$ y a $\vec{v}_2$.

SOLUCIÓN: Para estudiar la dependencia o independencia lineal de los vectores, calculamos su determinante:

$$\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

porque la primera y la tercera columnas son proporcionales. Por consiguiente, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ son linealmente dependientes. Es claro ahora que $\vec{v}_3$ es combinación lineal de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$. Así, para ver si $\vec{u} = (4, a+3, -2)$ puede expresarse como combinación lineal de $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$, estudiamos si puede expresarse en función de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ estudiando el siguiente determinante

$$\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & a+3 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Al ser este determinante siempre nulo, el conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u}\}$ es linealmente dependiente, por lo que siempre se puede expresar $\vec{u}$ como combinación lineal de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$. *A posteriori*, parece obvio observar que $\vec{u} = (a-3)\,\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$, y ahora la conclusión es obvia (son l.d.).

Finalmente, un vector perpendicular a $\vec{v}_1$ y a $\vec{v}_2$ es su producto vectorial

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \| \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{w}.$$

Como $\mid \vec{w} \mid = \sqrt{5}$, los únicos dos vectores unitarios y perpendiculares a la vez a $\vec{v}_1$ y a $\vec{v}_2$ son los vectores

$$\pm\vec{v} = \pm\frac{1}{\mid \vec{w} \mid}\vec{w} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2) = \left(\pm\frac{\sqrt{5}}{5}, 0, \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}\right).$$

■