Resolución del examen de Selectividad de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Andalucía – Septiembre* de 2008

Antonio Francisco Roldán López de Hierro **

18 de septiembre de 2008

Opción A

Ejercicio 1 a) *(**1'5 puntos**)* Plantee y resuelva el sistema de ecuaciones dado por:

$$\begin{pmatrix} 1+3x & 2 \\ x & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

b) *(**1'5 puntos**)* Calcule la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN : **Apartado (a).** Multiplicando las matrices obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1+3x & 2 \\ x & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,(1+3x)+2y \\ 3x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x+2y+3 \\ 3x-y \end{pmatrix}.$$

Para que dos matrices sean iguales, además de ser del mismo orden, deben poseer los mismos elementos colocados en las mismas posiciones. Por tanto,

$$\begin{pmatrix} 1+3x & 2 \\ x & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 9x+2y+3 \\ 3x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

* Por equivocación, algunos alumnos y alumnas recibieron en Septiembre el examen de la convocatoria de Junio. Pueden consultar la solución de este examen en esta misma página.

** Profesor del *I.E.S. Acci* de Guadix (Granada) - http://www.ies-acci.com/antonioroldan/

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 9x+2y+3=5, \\ 3x-y=4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 9x+2y=2, \\ 3x-y=4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 9x+2y=2, \\ 6x-2y=8 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 9x+2y=2, \\ 15x=10. \end{cases}$$

De aquí, $x = 10/15 = 2/3$, y sustituyendo en la primera ecuación:

$$y = \frac{2-9x}{2} = \frac{2-9\cdot\frac{2}{3}}{2} = \frac{2-6}{2} = \frac{-4}{2} = -2.$$

Por tanto, la única solución del sistema es:

$$\boxed{x = \frac{2}{3}, \quad y = -2.}$$

Apartado (b). Existen diversos métodos para calcular la matriz inversa de una matriz. Por ejemplo, vamos a aplicar el método de *Gauss-Jordan* por filas.

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \qquad \Big/ F_3' = F_3 - F_1 \Big/$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \qquad \Big/ F_3'' = F_3' - 2F_2' \Big/$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \qquad \Big/ F_3''' = -F_3'' \Big/$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \qquad \Big/ F_1^{iv} = F_1''' - F_3''' \Big/$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right).$$

Por consiguiente, la matriz inversa de la matriz dada es:

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.}$$

■

Ejercicio 2 a) *(**1'5 puntos**)* Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{3}{x}$ en el punto de abscisa $x = -1$.

b) *(**1'5 puntos**)* Halle los valores de a y b para que la función $g(x) = ax + \dfrac{b}{x}$ tenga un extremo relativo en el punto $(1, 2)$.

Solución : **Apartado (a).** La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $x = a$ en el que f sea derivable es:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Como $a = -1$, los únicos datos que nos hacen falta son:

$$f(a) = f(-1) = \frac{3}{-1} = -3,$$

$$f'(x) = \frac{0 \cdot x - 3 \cdot 1}{x^2} = \frac{-3}{x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \Rightarrow \qquad f'(a) = f'(-1) = \frac{-3}{(-1)^2} = -3.$$

Por consiguiente:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \quad \Leftrightarrow \quad y - (-3) = -3(x - (-1)) \quad \Leftrightarrow \quad y + 3 = -3(x + 1) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad y = -3 - 3x - 3 = -3x - 6.$$

De esta forma, deducimos que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$ es:

$$\boxed{y = -3x - 6.}$$

Apartado (b). Vamos a encontrar a y b estableciendo y resolviendo un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas en base a los datos del problema. En primer lugar, debemos observar que g es (continua y) derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (su máximo dominio de definición), siendo su función primera derivada:

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad g'(x) = a + \frac{0 \cdot x - b \cdot 1}{x^2} = a + \frac{-b}{x^2} = a - \frac{b}{x^2}.$$

Para que g posea un extremo relativo en el punto $(1, 2)$, es necesario que ocurran dos cosas: que la gráfica de la función g pase por el punto $(1, 2)$, en cuyo caso $g(1) = 2$, y que su primera derivada en dicho punto se anule, es decir, $g'(1) = 0$ (la cual es una condición necesaria para que exista un extremo relativo). Estas dos condiciones nos llevan al sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 = g(1) = a \cdot 1 + \dfrac{b}{1} = a + b, \\ 0 = g'(1) = a - \dfrac{b}{1^2} = a - b \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} a + b = 2, \\ a - b = 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad a = b = 1.$$

Por tanto, para que g cumpla las condiciones del enunciado, los valores de a y de b deben ser:

$$\boxed{a = 1 \qquad \text{y} \qquad b = 1.}$$

■

Ejercicio 3 El examen de Matemáticas de un alumno consta de dos ejercicios. La probabilidad de que resuelva el primero es del 30 %, la de que resuelva ambos es del 10 % y la de que no resuelva ninguno es del 35 %. Calcule las probabilidades de los siguientes sucesos.

a) *(**1 punto**)* Que el alumno resuelva el segundo ejercicio.

b) *(**1 punto**)* Que resuelva el segundo ejercicio, sabiendo que no ha resuelto el primero.

Solución : **Apartado (a).** Llamemos A_1 al suceso "presentado un/a alumno/a al azar al primer examen, resulta que éste/a aprueba dicho examen", y lo mismo significará A_2 respecto del segundo examen. Los datos del problema son entonces los siguientes. Como la probabilidad de que apruebe el primer examen es del 30 %, se tiene que $p(A_1) = 0'3$. Para que apruebe los dos exámenes, debe cumplirse $A_1 \cap A_2$, de donde $p(A_1 \cap A_2) = 0'1$. Finalmente, la probabilidad de que no apruebe ni el primer ni el segundo examen, es decir, $A_1^C \cap A_2^C$, es del 35 %, por lo que $p\left(A_1^C \cap A_2^C\right) = 0'35$. Aplicando las *leyes de De Morgan*, $A_1^C \cap A_2^C = (A_1 \cup A_2)^C$, y aplicando la ley del suceso complementario,

$$0'35 = p\left(A_1^C \cap A_2^C\right) = p\left((A_1 \cup A_2)^C\right) = 1 - p(A_1 \cup A_2) \quad \Rightarrow \quad p(A_1 \cup A_2) = 0'65.$$

Por consiguiente:

$$p(A_1 \cup A_2) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_1 \cap A_2) \quad \Leftrightarrow \quad 0'65 = 0'3 + p(A_2) - 0'1 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad p(A_2) = 0'65 - 0'3 + 0'1 = 0'45.$$

Así, hemos deducido que

$$\boxed{\text{la probabilidad de que el/la alumno/a apruebe el segundo examen es del 45 \%.}}$$

Apartado (b). Sabiendo que el/la alumno/a no ha resuelto el primer examen, la probabilidad de que apruebe el segundo examen es:

$$p\left(\frac{A_2}{A_1^C}\right) = \frac{p\left(A_1^C \cap A_2\right)}{p\left(A_1^C\right)} = \frac{p(A_2) - p(A_1 \cap A_2)}{1 - p(A_1)} = \frac{0'45 - 0'1}{1 - 0'3} = \frac{0'35}{0'7} = 0'5.$$

Por consiguiente,

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{la probabilidad de que el/la alumno/a apruebe el segundo examen,} \\ \text{sabiendo que no ha aprobado el primer examen, es del 50 \%.}\end{array}}$$

■

Ejercicio 4 La longitud de los cables de los auriculares que fabrica una empresa es una variable aleatoria que sigue una ley Normal con desviación típica 4.5 *cm*. Para estimar la longitud media se han medido los cables de una muestra aleatoria de 9 auriculares y se han obtenido las siguientes longitudes, en *cm*:

$$205, \quad 198, \quad 202, \quad 204, \quad 197, \quad 195, \quad 196, \quad 201, \quad 202.$$

a) *(**1 punto**)* Halle un intervalo de confianza, al 97 %, para la longitud media de los cables.

b) *(**1 punto**)* Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra de estos auriculares para que el error de estimación de la longitud media sea inferior a 1 *cm*, con el mismo nivel de confianza del apartado anterior.

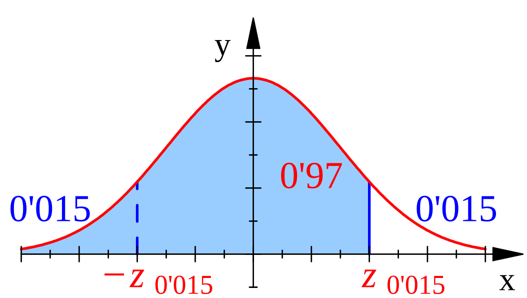
Solución : **Apartado (a).** Sea X la variable aleatoria que mide la longitud (en cm) de los cables de unos auriculares tomados al azar. Según indica el problema, de esta variable sabemos que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma = 4'5)$, siendo la media μ desconocida. Se elige una muestra aleatoria de tamaño $n = 9$, que arroja una media muestral que hemos de calcular:

$$\bar{x} = \frac{205 + 198 + 202 + 204 + 197 + 195 + 196 + 201 + 202}{9} = 200 \ cm.$$

Como la población de partida es Normal, a pesar de que la muestra no es de tamaño mayor o igual que 30, podemos afirmar que el intervalo de confianza solicitado es:

$$I.C. = \left] \ \bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \right[.$$

Para aplicar esta fórmula, es necesario calcular el valor crítico $z_{\alpha/2}$ al nivel de confianza del 97 % (o lo que es lo mismo, a un nivel de significación $\alpha = 3\ \% = 0'03$). Para ello, recordamos que el número $z_{\alpha/2}$ es el único número real que cumple que $p\left(Z > z_{\alpha/2}\right) = \alpha/2 = 0'015$, siendo Z una variable con distribución Normal estándar. Como disponemos de una tabla de colas a la izquierda, traducimos esta condición con el suceso opuesto, es decir, $p\left(Z \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - 0'015 = 0'985$. Buscamos este valor en la tabla de la distribución Normal estándar, encontrando el valor crítico $z_{\alpha/2} = z_{0'015} = 2'17$, como se aprecia en el siguiente gráfico.



$Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$

De esta forma, el intervalo de confianza es:

$$I.C. = \left] \; \bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; \right[= \left] \; 200 \pm 2'17 \, \frac{4'5}{\sqrt{9}} \; \right[= \left] \; 200 \pm 3{,}255 \; \right[= \left] \; 196'745, 203'255 \; \right[.$$

$$\boxed{I.C. = \left] \; 196'745, \; 203'255 \; \right[.}$$

Esto significa que la longitud media, μ, de los cables de los auriculares que fabrica esa empresa varía entre 196'7 y 203'3 cm, al 97 % de confianza.

Apartado (b). Por otro lado, supongamos que queremos determinar un intervalo de confianza para la media μ con un error máximo de $E = 1$ cm al 97 % de confianza. Entonces debemos tomar una muestra aleatoria de un tamaño n que verifique:

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2} \; \sigma}{E} \right)^2 ,$$

donde $z_{\alpha/2}$ es el mismo valor crítico que en el apartado anterior. Con estos datos, el tamaño mínimo n que debemos tomar en una muestra es:

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2} \; \sigma}{E} \right)^2 = \left(\frac{2'17 \cdot 4'5}{1} \right)^2 = \left(9'765 \right)^2 \approx 95'355.$$

Por consiguiente, para que el error cometido por el correspondiente intervalo de confianza para μ sea inferior a un centímetro, al 97 % de confianza, el menor número de auriculares que debemos tomar en una muestra aleatoria es de 96 de ellos.

$$\boxed{\text{96 auriculares.}}$$

■

Opción B

Ejercicio 1 *(***3 puntos***)* Un nutricionista informa a un individuo que, en cualquier tratamiento que siga, no debe ingerir más de 240 *mg* de hierro ni más de 200 *mg* de vitamina B. Para ello, están disponibles píldoras de dos marcas, P y Q. Cada píldora de la marca P contiene 40 *mg* de hierro y 10 *mg* de vitamina B, y cuesta 6 céntimos de euro; cada píldora de la marca Q contiene 10 *mg* de hierro y 20 *mg* de vitamina B, y cuesta 8 céntimos de euro.

Entre los distintos tratamientos, ¿cuál sería el de máximo coste diario?

Solución : Hacemos una tabla como la siguiente para representar los datos.

	Píldora P	Píldora Q	Máximo
Hierro	40	10	240
Vitamina B	10	20	200
Precio (cént.)	6	8	

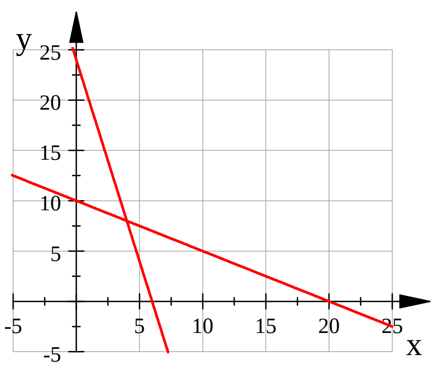
Llamemos x e y al número de píldoras de tipo P y de tipo Q (respectivamente) que vamos a ingerir diariamente. Evidentemente, $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Por otro lado, x pastillas de P contienen $40x$ miligramos de hierro e y pastillas de Q contienen $10y$ miligramos de hierro. Como no podemos tomar más de 240 mg de hierro al día, es obligatoria la condición $40x + 10y \leq 240$, que podemos simplificar a la desigualdad $4x + y \leq 24$. Razonando de la misma manera con las cantidades de vitamina B, llegamos a la inecuación $10x + 20y \leq 200$, que es equivalente a $x + 2y \leq 20$. Por consiguiente, las restricciones del problema nos indican que los números x e y deben satisfacer las inecuaciones:

$$R \equiv \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ 4x + y \leq 24, \\ x + 2y \leq 20, \end{cases}$$

que definen un recinto R sobre el plano. Vamos a dibujarlo calculando los puntos de corte de las rectas $4x + y = 24$ y $x + 2y = 20$ con los ejes coordenados.

$$4x + y = 24 \rightarrow \begin{cases} (6, 0)\,, \\ (0, 24)\,; \end{cases} \qquad x + 2y = 20 \rightarrow \begin{cases} (20, 0)\,, \\ (0, 10)\,. \end{cases}$$

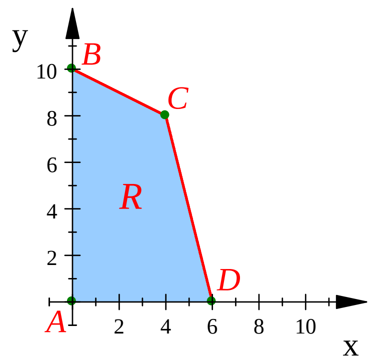
Con estos puntos, ya podemos dibujar los bordes del recinto.



El primer cuadrante (delimitado por las inecuaciones $x \geq 0$ e $y \geq 0$) queda así dividido en cuatro recintos, tres de ellos acotados y uno no acotado. Comprobando cuál de ellos verifica, a la vez, las cuatro inecuaciones del sistema, determinamos que el recinto R que buscamos es el único recinto del primer cuadrante que posee al punto $A\,(0, 0)$ como vértice. Otros dos de sus vértices son $B\,(0, 10)$ y $D\,(6, 0)$, pues son puntos que ya hemos calculado. Calculamos su otro vértice encontrando dónde se cortan las rectas distintas de los ejes coordenados:

$$\begin{cases} 4x + y = 24 \\ x + 2y = 20 \end{cases}$$

$$x = 4, \quad y = 8$$



De esta forma, podemos afirmar que los vértices de la región R determinada por las restricciones dadas son:

$$A\,(0,0)\,, \quad B\,(0,10)\,, \quad C\,(4,8)\,, \quad D\,(6,0)\,.$$

La función que define el coste de x píldoras de P e y píldoras de Q es $F\,(x,y) = 6x + 8y$, expresada en céntimos de euro. El *Teorema Fundamental de la Programación Lineal* afirma que la función $F\,(x,y) = 6x + 8y$ alcanza máximo (y mínimo) absoluto en la región acotada R, y que este extremo debe estar situado en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores:

$$F\,(0,0) = 0, \qquad F\,(0,10) = 80, \qquad F\,(4,8) = 24 + 64 = 88, \qquad F\,(6,0) = 36.$$

Observamos entonces que el valor máximo de F en el recinto R es 88 (no se nos pide el valor mínimo), que se alcanza en el punto $(4,8)$. Esto significa que el coste máximo diario que podemos conseguir con las restricciones del problema es de 88 céntimos, por lo que el tratamiento de máximo coste está formado por:

$$\boxed{\text{4 píldoras de P y 8 píldoras de Q.}}$$

■

Ejercicio 2 Dada la función $f\,(x) = 4 - 3x^2 + x^3$, determine:

a) *(**1'5 puntos**)* La monotonía y la curvatura de f.

b) *(**0'5 puntos**)* Los puntos donde la función alcanza sus extremos relativos.

c) *(**1 punto**)* La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$.

Solución : **Apartado (a).** Es claro que el máximo dominio posible en el que se puede considerar la función f es $\mathbb{R}$, ya que es polinómica, lo que además nos dice que es derivable en $\mathbb{R}$ (tantas veces como se quiera) y sus dos primeras derivadas son:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2), \qquad f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1).$$

Los únicos puntos en los que se anula la primera derivada de f son $x = 0$ y $x = 2$, por lo que hacemos una tabla como la siguiente para estudiar la monotonía de f.

f'	$+$		$-$		$+$
f	$\nearrow$	0	$\searrow$	2	$\nearrow$

Igualmente, el único punto en el que se anula la segunda derivada de f es $x = 1$, por lo que la siguiente tabla nos indica la curvatura de f.

f''	$-$		$+$
f	$\cap$	1	$\cup$

Concluimos entonces lo siguiente.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Monotonía} & \begin{cases} f \text{ es (estrict.) creciente en }]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[\,, \\ f \text{ es (estrict.) decreciente en }]0, 2[\,. \end{cases} \\ \text{Curvatura} & \begin{cases} f \text{ es cóncava en }]-\infty, 1[\,, \\ f \text{ es convexa en }]1, +\infty[\,. \end{cases} \end{array}}$$

Apartado (b). La tabla que hemos hecho para estudiar la monotonía nos dice, además, que en $x = 0$ hay un máximo relativo y en $x = 2$ hay un mínimo relativo. Como $f(0) = 4$ y $f(2) = 0$, afirmamos lo siguiente.

$$\boxed{\text{Extremos} \begin{cases} f \text{ posee un máximo relativo en } (0, 4)\,, \\ f \text{ posee un mínimo relativo en } (2, 0)\,. \end{cases}}$$

Apartado (c). La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $x = a$ en el que f sea derivable es:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Como $a = -1$, los únicos datos que nos hacen falta son:

$$f(a) = f(-1) = 4 - 3 - 1 = 0, \qquad f'(a) = f'(-1) = 3(-1)^2 - 6(-1) = 9.$$

Por consiguiente:

$$y - f(a) = f'(a)(x-a) \quad \Leftrightarrow \quad y - 0 = 9(x-(-1)) \quad \Leftrightarrow \quad y = 9(x+1).$$

De esta forma, deducimos que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$ es:

$$\boxed{y = 9x + 9.}$$

■

Ejercicio 3 Se consideran los sucesos A y B.

a) ***(*1 punto*)*** Exprese, utilizando las operaciones con sucesos, los siguientes sucesos:

1. Que no ocurra ninguno de los dos.
2. Que ocurra al menos uno de los dos.
3. Que ocurra B, pero no ocurra A.

b) ***(*1 punto*)*** Sabiendo que $p(A) = 0{,}5$, $\quad p(B) = 0{,}5 \quad$ y $\quad p(A/B) = 0{,}3$, $\quad$ halle $p(A \cup B)$.

Solución : **Apartado (a).** Que no ocurra ningún suceso significa que no ocurre A ni B, es decir, $A^C \cap B^C$ (aplicando las *leyes de De Morgan*, también vale $(A \cup B)^C$). Que ocurra alguno de ellos significa que se presenta $A \cup B$. Finalmente, que ocurra B pero no A se escribe como $B \setminus A$, o lo que es lo mismo, $A^C \cap B$.

$$\boxed{1.\ A^C \cap B^C. \qquad 2.\ A \cup B. \qquad 3.\ A^C \cap B.}$$

Apartado (b). Despejando de la definición de probabilidad condicionada,

$$p\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \quad \Rightarrow \quad p(A \cap B) = p(B) \cdot p\left(\frac{A}{B}\right) = 0'5 \cdot 0'3 = 0'15.$$

Así, aplicando la archiconocida fórmula de la probabilidad del suceso unión:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0'5 + 0'5 - 0'15 = 0'85.$$

Hemos deducido, entonces, que:

$$\boxed{p(A \cup B) = 0'85.}$$

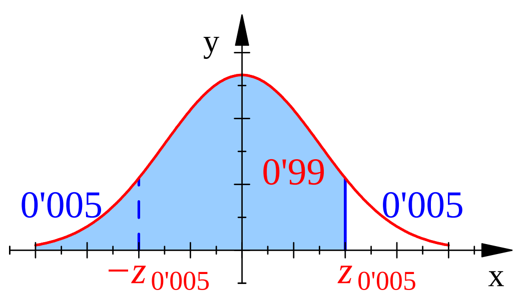
■

Ejercicio 4 *(***2 puntos***)* Se ha aplicado un medicamento a una muestra de 200 enfermos y se ha observado una respuesta positiva en 140 de ellos. Estímese, mediante un intervalo de confianza del 99 %, la proporción de enfermos que responderían positivamente si este medicamento se aplicase a la población de la que se ha extraído la muestra.

Solución: Como hay 140 personas que han mejorado en una muestra de tamaño $n = 200$, la proporción muestral de personas que han observado una respuesta positiva es $\hat{p} = 140/200 = 0'7$. Dado que $n \geq 30$, $n \cdot \hat{p} = 200 \cdot 0'7 = 140 \geq 5$ y $n \cdot (1 - \hat{p}) = 200 \cdot 0'3 = 60 \geq 5$, podemos utilizar la aproximación de *De Moivre* para obtener la fórmula de intervalo del confianza para la proporción poblacional de personas que mejorarían tras la administración del medicamento, que es:

$$I.C. = \left] \ \hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}} \ \right[.$$

Para aplicar esta fórmula, es necesario calcular el valor crítico $z_{\alpha/2}$ al nivel de confianza del 99 % (o lo que es lo mismo, a un nivel de significación $\alpha = 1\ \% = 0'01$). Para ello, recordamos que el número $z_{\alpha/2}$ es el único número real que cumple que $p\left(Z > z_{\alpha/2}\right) = \alpha/2 = 0'005$, siendo Z una variable con distribución Normal estándar. Como disponemos de una tabla de colas a la izquierda, traducimos esta condición con el suceso opuesto, es decir, $p\left(Z \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - 0'005 = 0'995$. Buscamos este valor en la tabla de la distribución Normal estándar, encontrando el valor crítico $z_{\alpha/2} = 2'575$ (también serían aceptables las aproximaciones por defecto $2'57$ y por exceso $2'58$).



$Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

De esta forma, el intervalo de confianza es:

$$I.C. = \left] \ \hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}} \ \right[= \left] \ 0'7 \pm 2'575 \sqrt{\frac{0'7 \cdot 0'3}{200}} \ \right[\approx \left] \ 0'7 \pm 0'083 \ \right[= \left] \ 0'617, 0'783 \ \right[.$$

Esto significa que, al 99 % de confianza, la proporción de personas que mejorarían tras tomar el medicamento está en el intervalo:

$$\boxed{I.C. = \left] \ 0'617,\ 0'783 \ \right[,}$$

es decir, entre el 61'7 % y el 78'3 %. ■