Resolución del examen de Selectividad de

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Andalucía – Septiembre de 2007

Antonio Francisco Roldán López de Hierro *

20 de septiembre de 2007

Opción A

Ejercicio 1 De un problema de programación lineal se deducen las siguientes restricciones:

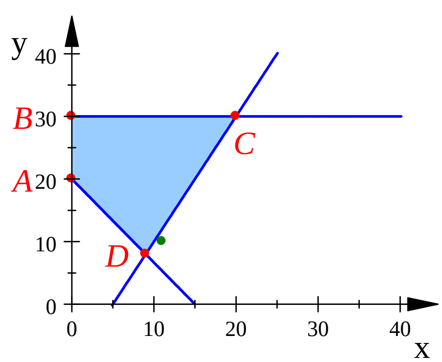
$$4x + 3y \geq 60, \qquad y \leq 30, \qquad x \leq \frac{10+y}{2}, \qquad x \geq 0, \qquad y \geq 0.$$

a) *(**2 puntos**)* Represente gráficamente la región factible del problema y calcule sus vértices.

b) *(**0'5 puntos**)* Maximice en esa región la función objetivo $F(x, y) = x + 3y$.

c) *(**0'5 puntos**)* ¿Pertenece el punto $(11, 10)$ a la región factible?

Solución : Dibujamos las rectas que definirán la región factible R, y elegimos entre las regiones que se forman.



*Profesor del *I.E.S. Acci* de Guadix (Granada) - http://www.ies-acci.com/antonioroldan/

Calculamos los puntos de corte de las rectas:

$$\left\{\begin{array}{l} 4x+3y=60 \\ y=30 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} 4x+3y=60 \\ 2x-y=10 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} 2x-y=10 \\ y=30 \end{array}\right.$$

$$x=-\frac{15}{2},\ y=30 \qquad x=9,\ y=8 \qquad x=20,\ y=30$$

Resulta entonces que los vértices del recinto son $A\,(0,20)$, $B\,(0,30)$, $C\,(20,30)$ y $D\,(9,8)$. El *Teorema Fundamental de la P.L.* nos garantiza que la función $F\,(x,y)=x+3y$ alcanza máximo y mínimo absolutos en la región acotada R, y que estos extremos deben estar situados en sendos vértices del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores:

$$F\,(0,20)=60, \quad F\,(0,30)=90, \quad F\,(20,30)=110, \quad F\,(9,8)=33.$$

Deducimos, pues, que el máximo absoluto de la función F en el recinto R es 110, que se alcanza en el punto $(20,30)$.

Finalmente, observamos que el punto $(11,10)$ no pertenece a la región factible, pues no cumple que $x\leq(10+y)/2$ (se ha dibujado en la representación anterior). ■

Ejercicio 2 Sea la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f\,(x)=\left\{\begin{array}{ll} 2^x, & \text{si } x\leq 1, \\ x^2+mx+5, & \text{si } x>1. \end{array}\right.$

a) *(**1 punto**)* Calcule m para que la función sea continua en $x=1$.

b) *(**1 punto**)* Para ese valor de m, ¿es derivable la función en $x=1$?

c) *(**1 punto**)* Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x=0$.

Solución: Para que la función sea continua en $x=1$, deben coincidir los límites laterales en $x=1$ entre sí y con el valor de la función en el punto. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} f\,(1^-)=f\,(1)=2^1=2 \\ f\,(1^+)=1+m+5=m+6 \end{array}\right\} \quad f\left(1^-\right)=f\left(1^+\right)=f\,(1) \quad\Leftrightarrow\quad m+6=2 \quad\Leftrightarrow\quad m=-4.$$

Por tanto f es continua en $x=1$ si, y sólo si, $m=-4$. Para este valor, la función derivada de f es, al menos:

$$x\neq 1, \qquad f'\,(x)=\left\{\begin{array}{ll} 2^x\cdot\ln 2, & \text{si } x<1, \\ 2x-4, & \text{si } x>1. \end{array}\right.$$

Para que f sea derivable en $x = 1$, los límites laterales de f' en $x = 1$ deben coincidir, pero eso no ocurre ya que:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (2^x \cdot \ln 2) = 2\ln 2 \\ f'(1^+) = \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (2x-4) = -2 \end{array}\right\} \quad f'\left(1^-\right) \neq f'\left(1^+\right).$$

Como estos límites laterales son distintos, la función f no es derivable (en ningún caso) en $x = 1$.

Finalmente, la recta tangente a f en $x = 0$ se calcula con los valores $f(0) = 2^0 = 1$ y $f'(x) = 2^0 \ln 2 = \ln 2$, y resulta ser:

$$y - f(0) = f'(0)(x-0) \quad \Leftrightarrow \quad y - 1 = (\ln 2)\, x \quad \Leftrightarrow \quad y = 1 + x\ln 2.$$

Así, la la recta tangente a f en $x = 0$ es $y = 1 + x\ln 2$. ■

Ejercicio 3 En un espacio muestral se sabe que para dos sucesos A y B se verifica:

$$p(A\cap B) = 0'1, \qquad p\left(A^C \cap B^C\right) = 0'6, \qquad p(A/B) = 0'5.$$

a) *(**0'75 puntos**)* Calcule $p(B)$.

b) *(**0'75 puntos**)* Calcule $p(A\cup B)$.

c) *(**0'5 puntos**)* ¿Son A y B independientes?

Solución : Despejamos la probabilidad de B de la fórmula de la probabilidad condicionada:

$$p\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} \quad \Rightarrow \quad p(B) = \frac{p(A\cap B)}{p(A/B)} = \frac{0'1}{0'5} = 0'2.$$

La probabilidad de la unión de A y B se puede calcular aplicando las leyes de *De Morgan* y la probabilidad del suceso contrario, pues:

$$0'6 = p\left(A^C \cap B^C\right) = p\left((A\cup B)^C\right) = 1 - p(A\cup B) \quad \Rightarrow \quad p(A\cup B) = 1 - 0'6 = 0'4.$$

Finalmente, calculamos la probabilidad del suceso A con la fórmula de la probablidad del suceso unión:

$$p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad p(A) = p(A\cup B) + p(A\cap B) - p(B) = 0'4 + 0'1 - 0'2 = 0'3.$$

Como $p(A) = 0'3$ y $p(A/B) = 0'5$, los sucesos A y B no son independientes, porque sus valores no coinciden. ■

Ejercicio 4 Se sabe que las puntuaciones de un test siguen una ley Normal de media 36 y desviación típica 4'8.

a) *(**1 punto**)* Si se toma una muestra aleatoria de 16 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que la media de esta muestra sea superior a 35 puntos?

b) *(**1 punto**)* ¿Qué porcentaje de muestras de tamaño 25 tiene una media comprendida entre 34 y 36?

SOLUCIÓN : Sea X la variable aleatoria que mide la puntuación obtenida en el test por una persona elegida al azar. De esta variable sabemos que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu = 36, \sigma = 4'8)$. Llamemos $\bar{X}_{16}$ a la variable aleatoria que mide la media obtenida al tomar muestras independientes de tamaño 16. Entonces sabemos que:

$$\bar{X}_{16} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(36, \frac{4'8}{\sqrt{16}}\right) = \mathcal{N}\left(36, 1'2\right),$$

y tras tipificar la variable aleatoria,

$$Z = \frac{\bar{X}_{16} - 36}{1'2} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

Entonces la probabilidad de que la media de una muestra de tamaño 16 sea superior a 35 puntos es:

$$p\left(\bar{X}_{16} > 35\right) = p\left(\frac{\bar{X}_{16} - 36}{1'2} > \frac{35 - 36}{1'2}\right) = p\left(Z > -0'83\right) = p\left(Z \leq 0'83\right) =$$

$$= \left[\text{ mirando la tabla de la normal } \mathcal{N}(0,1) \right] = 0'7967.$$

Llamemos ahora $\bar{X}_{25}$ a la variable aleatoria que mide la media obtenida al tomar muestras independientes de tamaño 25. Razonando como antes, sabemos que:

$$\bar{X}_{25} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(36, \frac{4'8}{\sqrt{25}}\right) = \mathcal{N}\left(36, 0'96\right) \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{\bar{X}_{25} - 36}{0'96} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

Entonces, el porcentaje de muestras de tamaño 25 que tiene una media muestral comprendida entre 34 y 36 es:

$$p\left(34 < \bar{X}_{25} < 36\right) = p\left(\frac{34 - 36}{0'96} < \frac{\bar{X}_{25} - 36}{0'96} < \frac{36 - 36}{0'96}\right) = p\left(-2'08 < Z < 0\right) =$$

$$= p\left(0 < Z < 2'08\right) = p\left(Z \leq 2'08\right) - p\left(Z \leq 0\right) =$$

$$= 0'9812 - 0'5 = 0'4812 = 48'12\ \%.$$

■

Opción B

Ejercicio 1 a) *(**1'5 puntos**)* Halle la matriz A que verifica $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 9 \\ 28 \end{pmatrix}$.

b) *(**1'5 puntos**)* Clasifique y resuelva el sistema formado por las tres ecuaciones siguientes:
$x - 3y + 2z = 0; \quad -2x + y - z = 0; \quad x - 8y + 5z = 0.$

Solución : Podemos expresar la igualdad dada como $B \cdot A = C$, donde:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad C = \begin{pmatrix} 9 \\ 28 \end{pmatrix}.$$

La matriz B posee inversa, ya que su determinate es no nulo, y su inversa se puede calcular con la conocida fórmula:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \operatorname{adj} B^t = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces la matriz A se puede despejar de la siguiente forma:

$$A = B^{-1} \cdot C = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 28 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -39 \\ 65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, el sistema:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 0, \\ -2x + y - z = 0, \\ x - 8y + 5z = 0 \end{cases}$$

siempre tiene alguna solución porque es homogéneo (sus términos independientes son todos nulos y el sistema admite la solución trivial $x = y = z = 0$). Lo resolvemos utilizando el *método de Gauss-Jordan*.

$$\left\| \begin{array}{cccc} 1 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -8 & 5 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{cccc} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \end{array} \left\| \begin{array}{cccc} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \qquad \begin{cases} x - 3y + 2z = 0, \\ 5y - 3z = 0. \end{cases}$$

Deducimos que el sistema es compatible indeterminado uniparamétrico. Para resolverlo, podemos asignar a z el valor de una variable indeterminada m. Pero entonces al despejar la incógnita y nos aparecerían fracciones. Para evitar esto, vamos a llamar $z = 5m$, donde $m \in \mathbb{R}$, y así podemos despejar:

$$\begin{aligned} &5y - 3z = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3z}{5} = \frac{15m}{5} = 3m, \\ &x = 3y - 2z = 9m - 10m = -m. \end{aligned}$$

Por tanto, todas las soluciones del sistema son:

$$\left\{\begin{array}{l} x=-m, \\ y=3m, \\ z=5m, \end{array}\right.$$

donde $m \in \mathbb{R}$ es cualquier número real. ■

Ejercicio 2 a) *(**2 puntos**)* Sea f la función definida para todo número real x por $f(x)=ax^3+bx$. Determine a y b sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(1,1)$ y que en ese punto la pendiente de la recta tangente es -3.

b) *(**1 punto**)* Si en la función anterior $a=\dfrac{1}{3}$ y $b=-4$, determine sus intervalos de monotonía y sus extremos.

Solución : Como la gráfica de f pasa por el punto $(1,1)$, sabemos que $f(1)=1$. Además, la pendiente de la recta tangente en $x=1$ es -3, por lo que $f'(1)=-3$. Como $f'(x)=3ax^2+b$, traducimos estas dos condiciones en ecuaciones que cumplen los coeficientes a y b:

$$\left.\begin{array}{rcl} f(1)=1 & \Leftrightarrow & a+b=1 \\ f'(1)=-3 & \Leftrightarrow & 3a+b=-3 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad a=-2, \quad b=3.$$

Por otro lado, si $a=1/3$ y $b=-4$, la función f y su primera derivada son:

$$f(x)=\frac{1}{3}\,x^3-4x, \qquad f'(x)=\frac{1}{3}\,3x^2-4=x^2-4.$$

Como f' se anula en $x=\pm 2$, hacemos una tabla como la siguiente para estudiar la monotonía de la función f y sus extremos relativos.

f'	$\oplus$	Máx	$\ominus$	Mín	$\oplus$
f	$\nearrow$	-2	$\searrow$	2	$\nearrow$

Como

$$f(-2)=\frac{(-2)^3}{3}-4(-2)=\frac{16}{3}, \qquad f(2)=\frac{2^3}{3}-4\cdot 2=-\frac{16}{3},$$

podemos describir la monotonía y los extremos relativos de f como sigue:

$$\text{Monotonía} \quad \left\{\begin{array}{l} f \text{ es creciente en } \left]-\infty,-2\right[\cup\left]2,+\infty\right[, \\ f \text{ es decreciente en } \left]-2,2\right[. \end{array}\right.$$

$$\text{Extremos relativos} \quad \left\{\begin{array}{l} f \text{ posee un máximo relativo en } \left(-2,\dfrac{16}{3}\right), \\ f \text{ posee un mínimo relativo en } \left(2,-\dfrac{16}{3}\right). \end{array}\right.$$

■

Ejercicio 3 Una urna A contiene tres bolas azules y cuatro rojas y otra urna B contiene dos bolas azules, dos rojas y dos negras. Se extrae, al azar, una bola de una de las urnas.

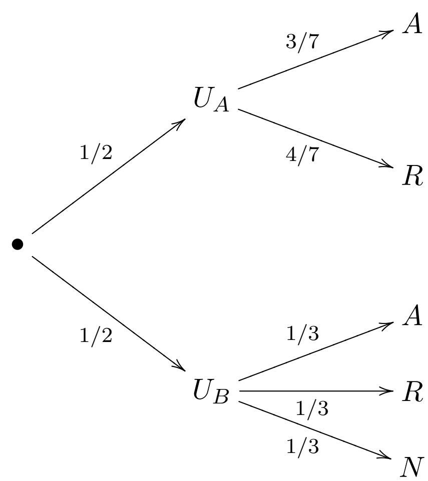
a) *(**1 punto**)* Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea roja.

b) *(**1 punto**)* Si la bola extraída resulta ser azul, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

SOLUCIÓN: Llamemos A, R y N a los sucesos aleatorios “extraída una bola al azar, ésta resulta sea azul”, “roja” o “negra”, respectivamente, y llamemos U_A y U_B a los sucesos “elegida una urna al azar, ésta resulta ser la urna A” o “la urna B”, según sea el caso. Como no se indica lo contrario, la probabilidad de elegir una u otra urna es la misma, por lo que $p(U_A) = p(U_B) = 0'5$. Dada la composición de las urnas, conocemos las probabilidades *a priori*:

$$p\left(\frac{A}{U_A}\right) = \frac{3}{7}, \quad p\left(\frac{R}{U_A}\right) = \frac{4}{7}, \quad p\left(\frac{A}{U_B}\right) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad p\left(\frac{R}{U_B}\right) = \frac{1}{3}, \quad p\left(\frac{N}{U_B}\right) = \frac{1}{3},$$

que representamos en el siguiente diagrama en árbol:



Por consiguiente, aplicando el *teorema de la probabilidad total*, la probabilidad de que la bola extraída sea roja es:

$$p(R) = p(U_A) \cdot p\left(\frac{R}{U_A}\right) + p(U_B) \cdot p\left(\frac{R}{U_B}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{19}{42}.$$

De la misma forma, podemos calcular la probabilidad de que la bola extraída sea azul:

$$p(A) = p(U_A) \cdot p\left(\frac{A}{U_A}\right) + p(U_B) \cdot p\left(\frac{A}{U_B}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{21},$$

y esta probabilidad nos sirve para aplicar el *teorema de Bayes* en el cálculo de la probabilidad de que, extraída una bola azul, ésta provenga de la urna B:

$$p\left(\frac{U_B}{A}\right) = \frac{p\left(U_b\right) \cdot p\left(\frac{A}{U_B}\right)}{p\left(A\right)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{8}{21}} = \frac{7}{16}.$$

■

Ejercicio 4 Se sabe que $(45'13, 51'03)$ es un intervalo de confianza, al 95 %, para la media de una variable aleatoria que sigue una distribución Normal con desviación típica 15.

a) *(**0'5 puntos**)* ¿Cuál es el error cometido?

b) *(**1'5 puntos**)* Calcule, con el mismo nivel de confianza, el tamaño muestral mínimo necesario para que el error cometido no sea superior a $1'8$.

Solución: Como el intervalo de confianza para la media es $(45'13, 51'03)$, la media muestral obtenida es el punto medio entre sus extremos:

$$\bar{x} = \frac{45'13 + 51'03}{2} = 48'08,$$

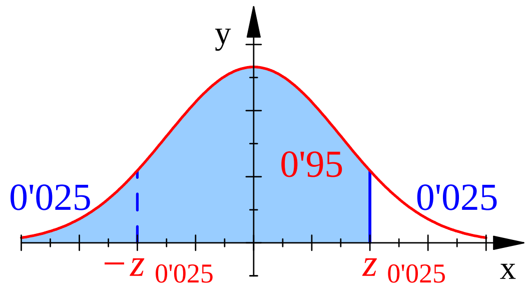
y el error máximo cometido al calcular el intervalo es la distancia entre la media y cualquiera de los extremos del intervalo de confianza, es decir:

$$E = 48'08 - 45'13 = 2'95.$$

Por otra parte, supongamos que queremos cometer un error máximo $E \leq E_0 = 1'8$ al $p = 1 - \alpha = 95\ \%$ de confianza. Entonces el tamaño mínimo muestral n que se debe tomar debe cumplir:

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E_0}\right)^2,$$

donde $\sigma = 15$ es la desviación típica, $E_0 = 1'8$ es el máximo error admisible y $z_{\alpha/2}$ es el único número real que cumple que $p\left(Z > z_{\alpha/2}\right) = \alpha/2 = 0'025$, siendo Z una variable con distribución Normal estándar. Como disponemos de una tabla de colas a la izquierda, traducimos esta condición con el suceso complementario, es decir, $p\left(Z \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - 0'025 = 0'975$. Buscamos este valor en la tabla de la distribución Normal estándar, encontrando el valor crítico $z_{\alpha/2} = 1'96$.



$Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

Así, el tamaño mínimo muestral debe cumplir:

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E_0}\right)^2 = \left(\frac{1'96 \cdot 15}{1'8}\right)^2 = \left(\frac{49}{3}\right)^2 = \frac{2401}{9} \approx 266'78,$$

por lo que tomaremos una muestra de, al menos, 267 individuos. ■