Resolución del examen de Selectividad de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Andalucía – Junio de 2008

Antonio Francisco Roldán López de Hierro *

19 de junio de 2008

Opción A

Ejercicio 1 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

a) *(**1'5 puntos**)* Calcule los valores de a y b para que $A \cdot B = B \cdot A$.

b) *(**1'5 puntos**)* Para $a = 1$ y $b = 0$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot B - A = I_2$.

Solución : Calculemos los productos $A \cdot B$ y $B \cdot A$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3a & 3b \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b & 2a \\ 3 & 12 \end{pmatrix}.$$

Para que estas dos matrices sean iguales, deben coincidir elemento a elemento, y ello ocurrirá únicamente si $3a = 3$ y $3b = 12$, de donde concluimos que A y B conmutan si, y sólo si, $a = 1$ y $b = 4$.

Por otro lado, si $a = 1$ y $b = 0$, la matriz B es

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

* Profesor del *I.E.S. Acci* de Guadix (Granada) - http://www.ies-acci.com/antonioroldan/

De esta forma, el determinante de la matriz B es distinto de cero (de hecho, $\det B = 1$), lo que significa que es una matriz regular, y precisamente su matriz inversa es:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot \widetilde{B}^T = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así, la ecuación matricial se resuelve despejando la matrix X:

$$X \cdot B - A = I_2 \quad \Leftrightarrow \quad X \cdot B = A + I_2 \quad \Leftrightarrow \quad X = (A + I_2) \cdot B^{-1} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad X = \left[\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -11 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz $X = \begin{pmatrix} -11 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ es la única solución de la ecuación matricial dada. ■

Ejercicio 2 Sea la función definida de la forma $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x-1}, & \text{si} \quad x < 2, \\ 2x^2 - 10x, & \text{si} \quad x \geq 2, \end{cases}$

a) *(**0'5 puntos**)* Halle el dominio de f.

b) *(**1'25 puntos**)* Estudie la derivabilidad de f en $x = 2$.

c) *(**1'25 puntos**)* Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución : En el intervalo $[2, +\infty[$, la función f está definida de una forma polinómica, por lo que podemos asegurar que está bien definida y además es continua en el subintervalo abierto $]2, +\infty[$ (en el extremo inferior $x = 2$ aún no sabemos si es o no continua porque no hemos estudiado el límite puntual por la izquierda). Por otro lado, si $x < 2$, la función pretende estar definida de manera racional, pero el denominador se anula en el punto $x = 1$, por lo que debemos excluir este punto del dominio de f. En consecuencia, podemos afirmar que el mayor dominio posible en el que se puede considerar la función f correctamente definida es:

$$\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Para estudiar la derivabilidad de f en $x = 2$, hemos de estudiar primeramente si es continua en dicho punto. En primer lugar, observamos que el punto está en el dominio, es decir, $x = 2 \in$

$\operatorname{dom} f$ y su imagen por f es $f(2) = 8 - 20 = -12$. Veamos ahora si f posee límite en $x = 2$ estudiando sus límites laterales en dicho punto:

$$f\left(2^-\right) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{2x}{x-1} = \frac{4}{2-1} = 4,$$

$$f\left(2^+\right) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \left(2x^2 - 10x\right) = 8 - 20 = -12.$$

Como los límites laterales de f en $x = 2$ existen pero son distintos, podemos afirmar que la función f no es continua en $x = 2$ y, por consiguiente, tampoco es derivable en $x = 2$ (si fuese derivable, entonces sería continua en dicho punto, lo cual no ocurre).

Finalmente, la ecuación de la recta tangente a f en el punto de abscisa $x = 0$, si existe, es:

$$y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0).$$

Por un lado, es sencillo calcular $f(0) = 0/(-1) = 0$. Por otro lado, debemos calcular $f'(0)$, si existe. Dado el carácter local de la derivación, para derivar f en $x = 0$ basta con derivar la expresión $2x/(x-1)$, pues coincide con f en el intervalo abierto $]-\infty, 2[$, que contiene al punto $x = 0$. De esta forma:

$$x < 2, \qquad \left[\frac{2x}{x-1}\right]' = \frac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}.$$

Así, $f'(0) = -2/(-1)^2 = -2$, y la ecuación de la recta buscada es:

$$y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \quad \Leftrightarrow \quad y - 0 = -2(x - 0) \quad \Leftrightarrow \quad y = -2x.$$

Concluimos entonces que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es la recta de ecuación $y = -2x$. ■

Ejercicio 3 a) ***(1 punto)*** Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que $p(A) = 0'5$, que $p(B) = 0'4$ y que $p(A \cup B) = 0'8$, determine $p(A/B)$.

b) ***(1 punto)*** Sean C y D dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que $p(C) = 0'3$, que $p(D) = 0'8$ y que C y D son independientes, determine $p(C \cup D)$.

Solución : Esencialmente, la fórmula que se utiliza en este ejercicio es la relación:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B),$$

válida para cualesquiera sucesos A y B de un mismo espacio de probabilidad. Esta igualdad nos permite despejar:

$$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 0'5 + 0'4 - 0'8 = 0'1,$$

y de aquí, la probabilidad condicionada $p(A/B)$ es:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0'1}{0'4} = \frac{1}{4}.$$

De la misma forma, sabemos que una de las posibles caracterizaciones de la independencia de sucesos es:

$$C \text{ y } D \text{ son independientes} \quad \Leftrightarrow \quad p(C \cap D) = p(C) \cdot p(D).$$

Utilizando este hecho, podemos deducir la siguiente probabilidad:

$$p(C \cup D) = p(C) + p(D) - p(C \cap D) = p(C) + p(D) - p(C) \cdot p(D) =$$

$$= 0'3 + 0'8 - 0'3 \cdot 0'8 = 1'1 - 0'24 = 0'86.$$

Esto acaba el ejercicio. ■

Ejercicio 4 El número de días de permanencia de los enfermos en un hospital sigue una ley Normal de media μ días y de desviación típica 3 días.

a) *(**1 punto**)* Determine un intervalo de confianza para estimar μ, a un nivel del 97 %, con una muestra aleatoria de 100 enfermos cuya media es de 8'1 días.

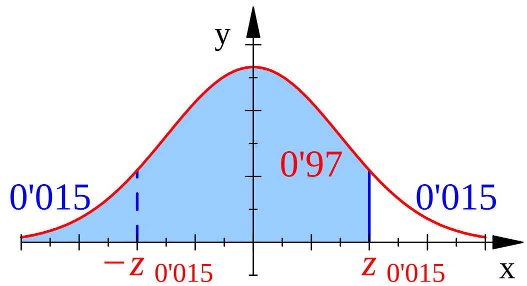
b) *(**1 punto**)* ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria para poder estimar μ con un error máximo de 1 día y un nivel de confianza del 92 %?

Solución : Sea X la variable aleatoria que mide el tiempo (en días) de permanencia en el hospital de un enfermo tomado al azar. Según indica el problema, de esta variable sabemos que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma = 3)$, siendo la media μ desconocida. Se elige una muestra aleatoria de tamaño $n = 100$, que arroja una media muestral de $\bar{x} = 8'1$ días. Como la población de partida es Normal, el intervalo de confianza solicitado es:

$$I.C. = \left] \bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[.$$

Para aplicar esta fórmula, es necesario calcular el valor crítico $z_{\alpha/2}$ al nivel de confianza del 97 % (o lo que es lo mismo, a un nivel de significación $\alpha = 3\ \% = 0'03$). Para ello, recordamos que el número $z_{\alpha/2}$ es el único número real que cumple que $p\left(Z > z_{\alpha/2}\right) = \alpha/2 = 0'015$, siendo Z una variable con distribución Normal estándar. Como disponemos de una tabla de colas a la izquierda, traducimos esta condición con el suceso opuesto, es decir, $p\left(Z \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - 0'015 = 0'985$. Buscamos este valor en la tabla de la distribución Normal estándar, encontrando el valor crítico

$z_{\alpha/2} = z_{0'015} = 2'17$, como se aprecia en el siguiente gráfico.



$Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

De esta forma, el intervalo de confianza es:

$$I.C. = \left]\ \bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \right[= \left]\ 8'1 \pm 2'17\ \frac{3}{\sqrt{100}}\ \right[= \left]\ 8'1 \pm 0'651\ \right[= \left]\ 7'449, 8'751\ \right[.$$

Esto significa que el tiempo medio de permanencia en el hospital, μ, al 97 % de confianza, varía entre 7'45 y 8'75 días, aproximadamente.

Por otro lado, supongamos que queremos determinar un intervalo de confianza para la media μ con un error máximo de $E = 1$ día al 92 % de confianza. Entonces debemos tomar una muestra aleatoria de un tamaño n que verifique

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2}\ \sigma}{E}\right)^2,$$

donde $z_{\alpha/2}$ es el valor crítico correspondiente a un nivel de confianza $p = 1 - \alpha = 92\ \%$ (o lo que es lo mismo, a un nivel de significación $\alpha = 0'08$). Razonando como antes, sabemos que $p\left(Z > z_{\alpha/2}\right) = \alpha/2 = 0'04$, lo que se traduce en que $p\left(Z \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - 0'04 = 0'96$. Buscamos este valor en la tabla de colas a la izquierda de la distribución Normal estándar, y encontramos el valor crítico $z_{\alpha/2} = 1'75$. Con estos datos, el tamaño mínimo n que debemos tomar en una muestra es:

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2}\ \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1'75 \cdot 3}{1}\right)^2 = 27'5625.$$

Por consiguiente, para que el error cometido por el correspondiente intervalo de confianza para μ sea inferior a un día, al 92 % de confianza, el menor número de personas que debemos tomar en una muestra aleatoria es de 28 individuos. ∎

Opción B

Ejercicio 1 a) *(**2 puntos**)* Representa gráficamente la región determinada por las siguientes restricciones:

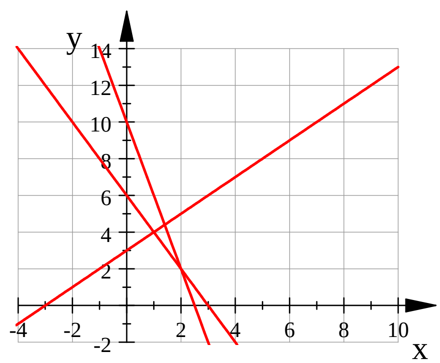
$$2x + y \leq 6\ ; \quad 4x + y \leq 10\ ; \quad -x + y \leq 3\ ; \quad x \geq 0\ ; \quad y \geq 0.$$

b) *(**1 punto**)* Calcule el máximo de la función $f\,(x, y) = 4x + 2y - 3$ en el recinto anterior e indique dónde se alcanza.

Solución: Llamemos R al recinto buscado. Una forma de dibujar sus bordes consiste en hacer igualdades las desigualdades y calcular los puntos en los que estas rectas cortan a los ejes de coordenadas.

$$2x + y \leq 6 \to \left\{ \begin{array}{c} (3,0) \\ (0,6) \end{array} \right. \qquad 4x + y \leq 10 \to \left\{ \begin{array}{c} (2'5,0) \\ (0,10) \end{array} \right. \qquad -x + y \leq 3 \to \left\{ \begin{array}{c} (-3,0) \\ (0,3) \end{array} \right.$$

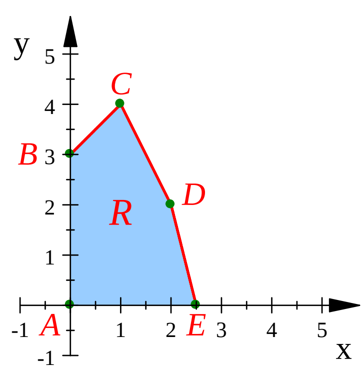
Con estos puntos, ya podemos dibujar los bordes del recinto.



El primer cuadrante (delimitado por las inecuaciones $x \geq 0$ e $y \geq 0$) queda así dividido en siete recintos, cinco de ellos acotados y dos no acotados. Comprobando cuál de ellos verifica, a la vez, las cinco inecuaciones del sistema, determinamos que el recinto R que buscamos es el único recinto del primer cuadrante que posee al punto $A\,(0,0)$ como vértice. Otros dos de sus vértices son $B\,(0,3)$ y $E\,(2'5,0)$. Calculamos sus otros dos vértices encontrando dónde se cortan las rectas distintas de los ejes coordenados:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 6 \\ 4x + y = 10 \end{array} \right. \qquad\qquad \left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 6 \\ -x + y = 3 \end{array} \right.$$

$$x = 2,\ y = 2 \qquad\qquad x = 1,\ y = 4$$



De esta forma, podemos afirmar que los vértices de la región R determinada por las restricciones dadas son:

$$A(0,0), \quad B(0,3), \quad C(1,4), \quad D(2,2), \quad E\left(2'5,0\right).$$

El *Teorema Fundamental de la Programación Lineal* afirma que la función $f(x,y) = 4x+2y-3$ alcanza máximo y mínimo absolutos en la región acotada R, y que estos extremos deben estar situados en sendos vértices del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores:

$$f(0,0) = -3, \quad f(0,3) = 6-3 = 3, \quad f(1,4) = 4+8-3 = 9,$$
$$f(2,2) = 8+4-3 = 9, \quad f\left(2'5,0\right) = 10-3 = 7.$$

Observamos entonces que el valor máximo de f en el recinto R es 9 (no se nos pide el valor mínimo). No obstante, este valor extremo no se alcanza en un único vértice, sino que observamos que hay dos vértices consecutivos del recinto en los que se alcanza dicho valor máximo. Entonces sabemos la función f toma el mismo valor en todos los puntos del segmento cerrado que une vértices consecutivos al mismo nivel. Esto nos permite concluir que la función f alcanza su valor máximo (que es 9) en el recinto R en todos los puntos del segmento cerrado de extremos $C(1,4)$ y $D(2,2)$. ■

Ejercicio 2 Sea la función f definida mediante $f(x) = \begin{cases} x^2+ax+b, & \text{si} \quad x<1, \\ \mathrm{L}(x), & \text{si} \quad x \geq 1. \end{cases}$

a) ***(1'5 puntos)*** Determine a y b sabiendo que f es continua y tiene un mínimo en $x=-1$.

b) ***(1'5 puntos)*** Para $a=-1$ y $b=1$, estudie la derivabilidad de f en $x=-1$ y en $x=1$.

Solución : La función f está definida en el intervalo abierto $]-\infty,1[$ como una función polinómica, y en el intervalo abierto $]1,+\infty[$ como la función logaritmo neperiano. Por tanto, dado el carácter local de la continuidad y de la derivabilidad, de entrada, podemos afirmar que f es continua y derivable en $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. El único punto en el que puede fallar la continuidad es en el punto $x=1$. Estudiemos qué relación deben verificar los coeficientes a y b para que f sea continua en $x=1$. Para ello, calculamos los límites laterales de f en $x=1$ y establecemos que sean iguales.

$$f\left(1^-\right) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(x^2+ax+b\right) = 1+a+b,$$

$$f\left(1^+\right) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \mathrm{L}(x) = \mathrm{L}(1) = 0.$$

Para que f sea continua en $x=1$, es necesario (y suficiente) que $1+a+b=0$, es decir, $a+b=-1$. Por otro lado, si f alcanza un mínimo en $x=-1$, entonces debe cumplirse que $f'(-1)=0$, ya que se ha comentado que f es derivable en dicho punto. Dado que si $x<1$ se tiene que:

$$f'(x) = \left[\ x^2+ax+b\ \right]' = 2x+a,$$

entonces:

$$f'(-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 + a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2.$$

Sabiendo ahora que f es continua en $x = 1$, podemos despejar:

$$a + b = -1 \quad \Rightarrow \quad b = -a - 1 = -2 - 1 = -3.$$

Por consiguiente, concluimos que los valores que hacen que f sea continua y, a la vez, tenga un mínimo en $x = -1$, son $a = 2$ y $b = -3$.

Supongamos ahora que $a = -1$ y $b = 1$. Entonces podemos afirmar lo siguiente.

- La función f es derivable en $x = -1$, pues ya se ha expuesto antes que, sean cuales sean los valores de a y de b, la función f es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- La función f no es derivable en $x = 1$ ya que en dicho punto no es continua. Para ser continua en $x = 1$, hemos visto que los valores a y b deben verificar la relación $a + b = -1$, y los valores $a = -1$ y $b = 1$ no la cumplen. Así, f no es continua en $x = 1$ y, en consecuencia, no puede ser derivable en dicho punto.

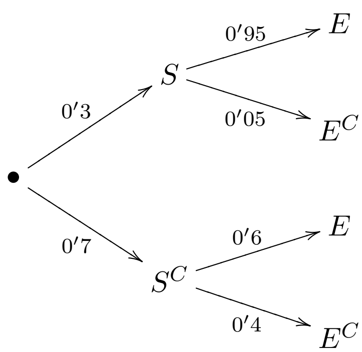
Esto acaba el ejercicio. ■

Ejercicio 3 Se sabe que el 30 % de los individuos de una población tiene estudios superiores; también se sabe que, de ellos, el 95 % tiene empleo. Además, de la parte de la población que no tiene estudios superiores, el 60 % tiene empleo.

a) *(**1 punto**)* Calcule la probabilidad de que un individuo, elegido al azar, tenga empleo.

b) *(**1 punto**)* Se ha elegido un individuo aleatoriamente y tiene empleo; calcule la probabilidad de que tenga estudios superiores.

Solución : Llamemos S al suceso “elegido un individuo al azar en la población, éste tiene estudios superiores”, y llamemos E al suceso “elegido un individuo al azar en la población, éste tiene empleo”. Como hay un 30 % de personas con estudios superiores, sabemos que $p(S) = 0'3$, y sin estudios superiores habrá un 70 %, es decir, $p\left(S^C\right) = 1 - p(S) = 0'7$. Entre los que tienen estudios superiores, hay un 95 % de personas con empleo, lo que nos indica la probabilidad condicionada $p(E/S) = 0'95$. Igualmente, entre las personas que no tienen estudios superiores, hay un 60 % que tienen empleo, y así $p\left(E/S^C\right) = 0'6$. Con estas verosimilitudes y probabilidades *a priori*, podemos completar el siguiente diagrama en árbol.



Aplicando entonces el *Teorema de la Probabilidad Total*, deducimos que la probabilidad de que un individuo, seleccionado al azar, tenga empleo es:

$$p(E) = p(S) \cdot p\left(\frac{E}{S}\right) + p\left(S^C\right) \cdot p\left(\frac{E}{S^C}\right) =$$

$$= 0'3 \cdot 0'95 + 0'7 \cdot 0'6 = 0'705.$$

Por otro lado, aplicando el *Teorema de Bayes* (o bien directamente la definición de probabilidad condicionada), seleccionado un individuo al azar que tiene empleo, la probabilidad de que tenga estudios superiores es:

$$p\left(\frac{S}{E}\right) = \frac{p(S \cap E)}{p(E)} = \frac{p(S) \cdot p\left(\frac{E}{S}\right)}{p(S) \cdot p\left(\frac{E}{S}\right) + p\left(S^C\right) \cdot p\left(\frac{E}{S^C}\right)} = \frac{0'3 \cdot 0'95}{0'3 \cdot 0'95 + 0'7 \cdot 0'6} =$$

$$= \frac{0'285}{0'705} = \frac{285}{705} = \frac{19}{47}.$$

Aproximadamente, esta probabilidad es del 40'43 %. ■

Ejercicio 4 Sea la población $\left\{ \; 1, \; 2, \; 3, \; 4 \; \right\}$.

a) *(**1 punto**)* Construya todas las muestras posibles de tamaño 2, mediante muestreo aleatorio simple.

b) *(**1 punto**)* Calcule la varianza de las medias muestrales.

Solución: Llamemos $\bar{X}_2$ a la variable aleatoria que mide la media muestral de los dos números obtenidos mediante muestreo aleatorio simple en la población indicada. Salvo que se indique lo contrario, el muestreo aleatorio simple se entiende con reemplazamiento. Por consiguiente, todas las muestras posibles de tamaño dos son:

$$\left\{ \begin{array}{c} (1,1), \; (1,2), \; (1,3), \; (1,4), \; (2,1), \; (2,2), \; (2,3), \; (2,4) \\ (3,1), \; (3,2), \; (3,3), \; (3,4), \; (4,1), \; (4,2), \; (4,3), \; (4,4) \end{array} \right\}.$$

El elemento $(1,1)$ significa que en la primera extracción sacamos un 1 y en la segunda extracción, después de devolver a la población el número encontrado, volvemos a sacar un 1. Igualmente, el elemento $(3,2)$ indica que primero sacamos un 3 y, después de devolverlo a la población, sacamos un 2. Haciendo la media de los dos números obtenidos en cada una de las posibilidades anteriores, tenemos la siguiente tabla de frecuencias, con la que podemos determinar la varianza de las medias muestrales:

$\bar{x}_i$	n_i	$\bar{x}_i \cdot n_i$	$\bar{x}_i^2 \cdot n_i$
1	1	1	1
$1'5$	2	3	$4'5$
2	3	6	12
$2'5$	4	10	25
3	3	9	27
$3'5$	2	7	$24'5$
4	1	4	16
	16	40	110

$$\begin{cases} \mu_{\bar{X}_2} = \dfrac{\sum_i \bar{x}_i \cdot n_i}{N} = \dfrac{40}{16} = \dfrac{5}{2}, \\[2ex] \sigma^2_{\bar{X}_2} = \dfrac{\sum_i \bar{x}_i^2 \cdot n_i}{N} - \mu^2_{\bar{X}_2} = \dfrac{110}{16} - \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{8}. \end{cases}$$

Esto concluye que la varianza de las medias muestrales de tamaño 2 es 5/8. ■

Nota 1 *Hay una segunda forma de resolver el ejercicio anterior que es especialmente sencilla. Basta con calcular la media y la varianza de la población* $\{1, 2, 3, 4\}$ *con las fórmulas usuales:*

$$\mu = \frac{1+2+3+4}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2'5,$$

$$\sigma^2 = \frac{(1-2'5)^2 + (2-2'5)^2 + (3-2'5)^2 + (4-2'5)^2}{4} = \frac{1'5^2 + 0'5^2 + 0'5^2 + 1'5^2}{4} = \frac{5}{4}.$$

Recordemos que el ***Teorema Central del Límite*** *establece lo siguiente:* "Dada una población de media μ y desviación típica σ (no necesariamente Normal), la distribución de las medias muestrales $\bar{X}_n$ de tamaño n verifica*:*

$$\mu_{\bar{X}_n} = \mu, \qquad \sigma^2_{\bar{X}_n} = \frac{\sigma^2}{n},$$

y, a medida que n crece, dicha distribución se aproxima a una distribución Normal (es casi Normal cuando $n \geq 30$)". *No obstante, hay ocasiones en que los parámetros muestrales siguen cumpliendo las relaciones anteriores aun cuando la población de partida ni es Normal ni se toma una muestra suficientemente grande. Es el caso de la población que aquí manejamos, que cumple:*

$$\mu_{\bar{X}_2} = \mu = \frac{5}{2}, \qquad \sigma^2_{\bar{X}_2} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{5/4}{2} = \frac{5}{8}.$$

Este segundo procedimiento también nos lleva a demostrar que la varianza de las medias muestrales de tamaño 2 *es* 5/8*.*