Ejercicios propuestos en 2009

1.- [2009-1-A-1] a) **[1'5]** En un comercio de bricolaje se venden listones de madera de tres longitudes: 0.90 m, 1.50 m y 2.40 m, cuyos precios respectivos son 4 euros, 6 euros y 10 euros. Un cliente ha comprado 19 listones, con una longitud total de 30 m, que le han costado 126 euros.

Plantee, sin resolver, el sistema de ecuaciones necesario para determinar cuántos listones de cada longitud ha comprado ese cliente.

b) **[1'5]** Clasifique el siguiente sistema de ecuaciones y resuélvalo, si es posible:

$$\left.\begin{array}{llll} 3x & -\ y & -z & =0 \\ 2x & -\ 2y & +z & =18 \\ x & & -3z & =0 \end{array}\right\}.$$

2.- [2009-2-B-1, Sept] Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. a) **[1]** Calcule A^2 y $2B+I_2$.

b) **[2]** Resuelva la ecuación matricial $A\cdot X-I_2=2B^2$.

3.- [2009-3-A-1, Jun] Sea la igualdad $A\cdot X+B=A$, donde A, X y B son matrices cuadradas de la misma dimensión.

a) **[1]** Despeje la matriz X en la igualdad anterior, sabiendo que A tiene inversa.

b) **[2]** Obtenga la matriz X en la igualdad anterior, siendo $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4.- [2009-4-A-1] a) **[2]** Plantee y resuelva el sistema de ecuaciones $\begin{pmatrix} 3 & 1-2x & 0 \\ 2 & x+1 & 2 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) **[1]** Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, calcule la matriz $M=A^t\cdot A^{-1}$

5.- [2009-5-B-1] Una tienda dispone de latas de conserva de tomate de tres fabricantes: A, B y C. El fabricante A envasa el tomate en latas de 250 g, el fabricante B lo envasa en latas de 500 g y el fabricante C en latas de 1 kg. Esas latas de tomate se venden a 1, 1.8 y 3.3 euros, respectivamente. Compramos un total de 20 latas, que pesan un total de 10 kg y nos cuestan 35.6 euros. Queremos saber cuántas latas de cada fabricante hemos comprado.

a) **[1]** Plantee el sistema de ecuaciones que resolvería el problema anterior.

b) **[2]** Resuelva el problema.

6.- [2009-6-A-1] **[3]** Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Determine X en la ecuación matricial $X\cdot A-2B=C$.

Ejercicios propuestos en 2008

7.- [2008-1-A-1] a) **[1]** Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$, calcule el valor de a para que A^2 sea la matriz nula. b) **[2]** Dada la matriz $M=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcule la matriz $\left(M^{-1}\cdot M^t\right)^2$.

2.- [2008-2-A-1, Sept] a) **[1'5]** Plantee y resuelva el sistema de ecuaciones lineales dado por:

$\begin{pmatrix} 1+3x & 2 \\ x & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$. b) **[1'5]** Calcule la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

3.- [2008-3-A-1, Jun] Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **[1'5]** Calcule los valores de a y b para que $A \cdot B = B \cdot A$.
b) **[1'5]** Para $a = 1$ y $b = 0$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot B - A = I_2$.

4.- [2008-4-B-1] a) **[1]** Dadas las matrices $F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, calcule los productos $C \cdot F$ y $F \cdot C$.

b) **[2]** Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, calcule la matriz X que verifique la ecuación $X \cdot A^{-1} - B = C$.

5.- [2008-5-B-1] a) **[2]** Halle la matriz X que verifica la ecuación $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$.

b) **[1]** Determine los valores de x e y que cumplen la igualdad $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6.- [2008-6-B-1] Sean A y B las matrices siguientes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

a) **[1]** Calcule $(A+B) \cdot (A-B)$.
b) **[2]** Determine la matriz X, cuadrada de orden 2, en la ecuación matricial $(A+2B) \cdot X = 3I_2$.

Ejercicios propuestos en 2007

13.- [2007-1-A-1] Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) **[1p]** Encuentre el valor o valores de x de forma que $B^2 = A$.
b) **[1p]** Igualmente para que $B + C = A^{-1}$.
c) **[1p]** Determine x para que $A + B + C = 3I_2$.

14.- [2007-2-A-1, Jun] Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} -x \\ 2 \\ z \end{pmatrix}$.

a) **[1'5p]** Determine la matriz inversa de A.
b) **[1'5p]** Halle los valores de x, y, z para los que se cumple $A \cdot X = Y$

15.- [2007-3-B-1, Sept] a) **[1'5p]** Halle la matriz A que verifica $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 9 \\ 28 \end{pmatrix}$.

b) **[1'5p]** Clasifique y resuelva el sistema: $x-3y+2z=0$; $-2x+y-z=0$; $x-8y+5z=0$.

16.- [2007-4-A-1] a) **[1p]** Sea la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$. Calcule el valor de b para que $B^2 = I_2$.

b) **[2p]** Resuelva y clasifique el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{lcl} x+y & = & 1+z \\ 2x+z & = & 2+y \\ y & = & z \end{array}\right\}$.

17.- [2007-5-A-1] a) **[1p]** Un taller de carpintería ha vendido 15 muebles, entre sillas, sillones y butacas, por un total de 1600 euros. Se sabe que cobra 50 euros por cada silla, 150 euros por cada sillón y 200 euros por cada butaca, y que el número de butacas es la cuarta parte del número que suman los demás muebles. Plantee, sin resolver, el sistema de ecuaciones adecuado que permite calcular cuántos muebles de cada clase ha vendido ese taller.

b) **[2p]** Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, resuelva la ecuación matricial $A \cdot X + B^t = B$, donde X es una matriz cuadrada de orden 2.

18.- [2007-6-A-1] Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a) [1'5p] Calcule $B \cdot B^t - A \cdot A^t$.

b) [1'5p] Halle la matriz X que verifica $\left(A \cdot A^t\right) \cdot X = B$.

Ejercicios propuestos en 2006

19.- [2006-1-A-1] Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) **[1'5p]** Calcule $A^{-1} \cdot (2B + 3I_2)$.

b) **[1'5p]** Determine la matriz X para que $X \cdot A = A + I_2$.

20.- [2006-2-B-1] **[3p]** El cajero de un banco sólo dispone de billetes de 10, 20 y 50 euros. Hemos sacado 290 euros del banco y el cajero nos ha entregado exactamente 8 billetes. El número de billetes de 10 euros que nos ha dado es el doble del de 20 euros.

Plantee y resuelva el sistema de ecuaciones lineales asociado a este problema para obtener el número de billetes de cada tipo que nos ha entregado el cajero.

21.- [2006-3-A-1] Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **[1p]** Encuentre el valor o valores de x de forma que $B^2 = A$.

b) **[1p]** Igualmente para que $A - I_2 = B^{-1}$.

c) **[1p]** Determine x para que $A \cdot B = I_2$

22.- [2006-4-A-1] a) **[1'5p]** Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calcule $A^{-1} \cdot (B - A^t)$.

b) **[1'5p]** Resuelva y clasifique el sistema $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

23.- [2006-5-B-1] [3p] Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Calcule los valores de los números reales x, y y z para que se verifique la siguiente igualdad entre matrices: $E - x \cdot A \cdot B = y \cdot C + z \cdot D$.

24.- [2006-6-A-1] a) **[2p]** Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Explique qué dimensión debe tener la matriz X para que tenga sentido la ecuación matricial $X \cdot A + 2B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$. Resuelva dicha ecuación.

b) **[1p]** Plantee, sin resolver, el sistema de ecuaciones que permita encontrar la solución del siguiente problema:

"En un examen de Matemáticas que constaba de tres problemas, un alumno obtuvo una calificación total de 7.2. La puntuación del primer problema fue un 40 % más que la del segundo, y la del tercero fue el doble de la suma de las puntuaciones del primero y el segundo. ¿Cuál fue la puntuación de cada problema?"

Ejercicios propuestos en 2005

25.- [2005-1-A-1] a) **[2'25p]** Resuelva el siguiente sistema y clasifíquelo atendiendo al número de soluciones.
b) **[0'75p]** A la vista del resultado anterior, ¿podemos afirmar que hay una ecuación que es combinación lineal de las otras dos?

$$\left\{ \begin{array}{r} x + y + z = 0, \\ 2x + 3y - z = 17, \\ 4x + 5y + z = 17. \end{array} \right.$$

26.- [2005-2-A-1] Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **[1p]** Calcule la matriz $C = B \cdot A - A^t \cdot B^t$.

b) **[2p]** Halle la matriz X que verifique $A \cdot B \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

27.- [2005-3-B-1] Sea el sistema de ecuaciones:
a) **[2p]** Resuélvalo y clasifíquelo en cuanto a sus soluciones.
b) **[0'5p]** ¿Tiene inversa la matriz de coeficientes del sistema? Justifíquelo.
c) **[0'5p]** Obtenga, si existe, una solución del sistema que verifique $x = 2y$

$$\left\{ \begin{array}{r} x + y - z = -2, \\ 2x \qquad - z = 0, \\ -2y + z = 4. \end{array} \right.$$

28.- [2005-4-A-1] a) **[1p]** Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. De las siguientes operaciones, algunas no se pueden realizar; razone por qué. Efectúe las que se puedan realizar.

$$A + B \; ; \; A^t + B \; ; \; A \cdot B \; ; \; A \cdot B^t.$$

b) **[2p]** Resuelva y clasifique, atendiendo al número de soluciones, el sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

29.- [2005-5-A-1] Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & x \end{pmatrix}$.

a) **[1’5p]** Determine el valor de x en la matriz B para que se verifique la igualdad $A \cdot B = B \cdot A$.

b) **[1’5p]** Obtenga la matriz C tal que $A^t \cdot C = I_2$.

30.- [2005-6-B-1] Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) **[1p]** Calcule, si existe, la matriz inversa de B.

b) **[2p]** Si $A \cdot B = B \cdot A$ y $A + A^t = 3 \cdot I_2$, calcule x e y.

Ejercicios propuestos en 2004

31.- [2004-1-B-1] Sea el sistema de ecuaciones lineales:
a) **[2p]** Clasifique y resuelva el sistema.
b) **[1p]** Escriba la matriz de coeficientes del sistema y, si es posible, calcule su matriz inversa.

$$\begin{cases} x - y - z = -2, \\ 2x + 3y - z = 2, \\ 4x + y - 3z = -2. \end{cases}$$

32.- [2004-2-A-1] Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) **[1p]** Calcule $(A - I_2) \cdot B$, siendo I_2 la matriz identidad de orden 2.

b) **[1p]** Obtenga la matriz B^t (matriz traspuesta de B) y calcule, si es posible, $B^t \cdot A$.

c) **[1p]** Calcule la matriz X que verifica $A \cdot X + B = C$.

33.- [2004-3-B-1] **[3p]** De una matriz A se sabe que su segunda fila es $\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$, y su segunda columna es $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Halle los restantes elementos de A sabiendo que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

34.- [2004-4-A-1] a) **[2p]** Sabemos que el precio del kilo de tomates es la mitad que el del kilo de carne. Además, el precio del hilo de gambas es el doble que el de carne. Si pagamos 18 € por 3 kilos de tomates, 1 kilo de carne y 250 gramos de gambas, ¿cuánto pagaríamos por 2 kilos de carne, 1 kilo de tomates y 500 gramos de gambas?

b) **[1p]** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, halle A^{2004}.

35.- [2004-5-A-1] Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) **[2p]** Calcule la matriz P que verifica $B \cdot P - A = C^t$.

b) **[0’5p]** Determine la dimensión de la matriz M para que pueda efectuarse el producto $A \cdot M \cdot C$.

c) **[0’5p]** Determine la dimensión de la matriz N para que $C^t \cdot N$ sea una matriz cuadrada.

36.- [2004-6-B-1] a) **[1’5p]** Plantee, sin resolver, un sistema de ecuaciones asociado al siguiente problema: “Un monedero contiene 1 € en monedas de 2, 5 y 10 céntimos; en total, hay 22 monedas.

Sabiendo que el número de monedas de 5 y 10 céntimos juntas excede en 2 unidades al número de monedas de 2 céntimos, obtenga el número de monedas de cada tipo que hay en el monedero".

b) **[1'5p]** Resuelva el sistema formado por las ecuaciones $\begin{cases} x+y+z=6, \\ 2x-y+2z=3, \\ 3x+2y-3z=3. \end{cases}$