

UNIVERSIDAD DE GRANADA. Métodos Matemáticos de la Física IV
Convocatoria extraordinaria de septiembre. Primera parte. 20 de septiembre de 2013

- *Entrega los ejercicios en hojas separadas.*
- *Las respuestas han de ser justificadas adecuadamente.*
- *El examen ha de ser realizado a bolígrafo (azul o negro).*
- *Duración: 1 hora 45 minutos.*

Selecciona **SOLO TRES** ejercicios.

1. Se considera el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = \frac{t^2}{x-2t} + 2, \\ x(-1) = 2. \end{cases}$$

- a) Determina el dominio maximal para este problema.
- b) Sea el cambio de variables $y = x - 2t$. ¿Qué forma adopta el problema de valores iniciales tras el cambio? ¿Cómo transforma el cambio al dominio encontrado en el apartado (a)?
- c) Resuelve el problema de valores iniciales original.

2. Se considera el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'' + 2x = 0, \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 1. \end{cases}$$

- a) Resuelve este problema (indicando explícitamente el dominio maximal de la solución).
- b) Comprueba que la función definida por la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1}$ es solución del problema propuesto. Determina el radio de convergencia de la serie.
- c) Calcula el valor exacto de la sumatoria $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{(2k)!} 2^k \pi^{2k}$.

3. Consideramos el funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^1 [y'(x)^2 + y(x)^4] dx, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

- a) Escribe explícitamente su dominio.
- b) Escribe la ecuación de Euler-Lagrange asociada.
- c) La función $y(x) = \sin(x)$, ¿es una extremal?
- d) Encuentra el mínimo de \mathcal{F} . ¿Dónde se alcanza?

4. Consideramos la ecuación

$$x'' + 3x' - 5x = 0.$$

- a) Encuentra un sistema fundamental $\{\varphi_1, \varphi_2\}$.
- b) Calcula el wronskiano $W[\varphi_1, \varphi_2]$ del sistema fundamental anterior. ¿En cuántos puntos se anula?
- c) Encuentra una solución $x = x(t)$ que cumpla $x(0) = 0$. ¿Cuántas hay?