

*“Matemática aplicada”*

*Tema 7 (4ª parte). Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales  
(de primer orden)*

*(Ingeniería Civil - Administración y Dirección de Empresas)*

## *Tema 7 (4ª parte). Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales (de primer orden)*

- 4.1. Cuestiones previas.
- 4.2. Ejemplos sencillos.
- 4.3. Cálculo de soluciones: base teórica.
- 4.4. Ejemplos.
- 4.5. Aplicación: circuitos eléctricos (de primer orden) acoplados.
- 4.6. Añadido: sistemas de ecuaciones de orden superior.

## 4.1. Cuestiones previas

- Al igual que en el caso de las ecuaciones diferenciales lineales, el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales tiene estructura algebraica bien definida.
  - ▶ Diremos que un sistema de ecuaciones diferenciales lineales es homogéneo si está formado exclusivamente por ecuaciones lineales homogéneas.
  - ▶ El conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneo determina un espacio vectorial.
  - ▶ Si el sistema está formado  $n$  ecuaciones lineales homogéneas de primer orden, entonces el espacio vectorial de soluciones tiene dimensión  $n$ .
  - ▶ El conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneo (alguna ecuación es completa) conforma un espacio afín.
  - ▶ La estructura de espacio afín nos permite calcular el conjunto de soluciones sin más que conocer una solución particular del sistema y el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo asociado.

- Por lo comentado en el punto anterior, nos centraremos en los sistemas homogéneos de ecuaciones lineales de primer orden.
- En concreto, estudiaremos los sistemas de coeficientes constantes.
- Así, un sistema homogéneo de coeficientes constantes de dos ecuaciones con dos incógnitas viene dado por

$$\left. \begin{aligned} x_1'(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) \\ x_2'(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) \end{aligned} \right\}. \quad (1)$$

- Si tomamos  $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$  y  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , entonces el sistema (1) se expresa matricialmente de la forma  $X'(t) = AX(t)$  (que es muy similar a la expresión de las ecuaciones lineales de primer orden con coeficientes constantes).
- Por la analogía con las ecuaciones, podemos pensar que las soluciones de (1) serán múltiplos de  $e^{At}$ . Pero,
  - ¿qué significa  $e^{At}$ ?
  - ¿qué se entiende por múltiplo?

## 4.2. Ejemplos sencillos

### Ejemplo 1

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= 2x_1 + x_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X \quad (2)$$

- Este sistema se puede resolver directamente.
- En la primera ecuación:  $x_1(t) = K_1 e^t$ .
- Sustituyendo en la segunda,  $x_2' = x_2 + 2K_1 e^t$ , que es lineal completa.  
(¡OJO! Se deja  $2K_1$ , pues  $K_1$  ya está en  $x_1(t)$ .)
  - ▶ La solución de  $x_2' = x_2$  es  $x_{2h}(t) = K_2 e^t$ .
  - ▶ Una solución particular de  $x_2' = x_2 + 2K_1 e^t$  será del tipo  $x_{2p}(t) = \alpha t e^t$ , para un valor de  $\alpha$  adecuado. En este caso,  $\alpha = 2K_1$  (¡Compruébalo!)
- Por tanto, la solución del sistema (2) es

$$X(t) = \begin{pmatrix} K_1 e^t \\ K_2 e^t + 2K_1 t e^t \end{pmatrix} = K_1 \begin{pmatrix} e^t \\ 2t e^t \end{pmatrix} + K_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}.$$

- Concluimos que  $\left\{ \begin{pmatrix} e^t \\ 2t e^t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix} \right\}$  es un sistema fundamental de (2).

## Ejemplo 2

$$\left. \begin{array}{l} x_1' = x_2 \\ x_2' = 2x_1 + x_2 \end{array} \right\} \Rightarrow X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X \quad (3)$$

- En este sistema pasaremos a una ecuación lineal de segundo orden.
- Primero debemos observar que  $x_1, x_2 \in C^1$  y, por tanto,  $x_1', x_2' \in C^1$ . Concluimos que  $x_1, x_2 \in C^2$  y podemos derivar las ecuaciones del sistema, al menos, una vez.
  - ▶ Consideramos la primera ecuación y derivamos en ella:  $x_1' = x_2 \Rightarrow x_1'' = x_2'$ .
  - ▶ Usamos estas dos igualdades en la segunda ecuación para obtener una ecuación que sólo dependa de  $x_1$ :  $x_1'' = 2x_1 + x_1'$ .
  - ▶ La solución de esta última es  $x_1(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$ .
  - ▶ Obtenemos  $x_2(t)$  a partir de la primera ecuación:  $x_2(t) = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t}$ .
- Por tanto, la solución del sistema (3) es

$$X(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} \\ -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}.$$

- Concluimos que  $\left\{ \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} \right\}$  es un sistema fundamental de (3).

## Ejemplo 2 (de nuevo)

- Podemos resolver (3) operando de distinta forma.
  - Derivamos la segunda ecuación:  $x_2'' = 2x_1' + x_2'$ .
  - Sustituimos la primera en la nueva ecuación:  $x_2'' = 2x_2 + x_2'$ .
  - La solución de esta última es  $x_2(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$ .
  - Obtenemos  $x_1(t)$  a partir de la primera ecuación:  $x_1(t) = -c_1 e^{-t} + \frac{1}{2} c_2 e^{2t}$ .

- Por tanto, la solución del sistema (3) es

$$X(t) = \begin{pmatrix} -c_1 e^{-t} + \frac{1}{2} c_2 e^{2t} \\ c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

- Concluimos que  $\left\{ \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} \right\}$  es un sistema fundamental de (3).
- Por supuesto, el nuevo sistema fundamental es equivalente al obtenido antes.

### 4.3. Cálculo de soluciones: base teórica (1) (SE PUEDE OMBVIAR)

- A la vista de los ejemplos anteriores, comenzamos buscando condiciones para obtener soluciones del tipo  $X(t) = e^{\lambda t}v$ , donde  $v$  es un vector no nulo.
- Así pues, supongamos que, para  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , la función  $X(t) = e^{\lambda t}v$  es solución del sistema de coeficientes constantes  $X' = AX$ .
  - ▶ Por un lado,  $X'(t) = \lambda e^{\lambda t}v = e^{\lambda t}\lambda v$ .
  - ▶ Por otro lado,  $AX(t) = Ae^{\lambda t}v = e^{\lambda t}Av$ .
  - ▶ Por tanto,  $e^{\lambda t}\lambda v = e^{\lambda t}Av$ .
  - ▶ Operando sobre esta igualdad,
$$e^{\lambda t}\lambda v = e^{\lambda t}Av \Leftrightarrow e^{\lambda t}Av - e^{\lambda t}\lambda v = 0 \Leftrightarrow e^{\lambda t}(Av - \lambda v) = 0 \Leftrightarrow Av - \lambda v = 0 \Leftrightarrow Av = \lambda v.$$
- Podemos concluir que  $X(t) = e^{\lambda t}v$  será una solución del sistema  $X' = AX$  si y sólo si  $\lambda$  es un valor propio de  $A$  y  $v$  es un vector propio de  $A$  (asociado a  $\lambda$ ).
- (Debemos observar que seguimos sin saber qué es o cómo se calcula  $e^{At}$ .)



- Ejemplo 1.

$$\left. \begin{array}{l} x_1' = x_1 \\ x_2' = 2x_1 + x_2 \end{array} \right\} \Rightarrow X' = AX, \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- ▶ El polinomio característico de  $A$  es  $p(\lambda) = (1 - \lambda)^2$ .
- ▶ La matriz  $A$  admite como valor propio  $\lambda = 1$  (doble).
- ▶ El conjunto de vectores propios asociados a  $\lambda = 1$  es el de los múltiplos del vector  $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- ▶ Por tanto,  $e^{\lambda t} v = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$  es una solución del sistema dado.
- ▶ Pero hay un problema: necesitamos otra solución del sistema, que sea linealmente independiente con  $\begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$ , ya que la dimensión del espacio vectorial de soluciones es igual a 2.

- Ejemplo 2.

$$\left. \begin{array}{l} x_1' = x_2 \\ x_2' = 2x_1 + x_2 \end{array} \right\} \Rightarrow X' = AX, \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- ▶ El polinomio característico de  $A$  es  $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$  (observa que coincide con el polinomio característico asociado a las ecuaciones de segundo orden vistas en las páginas 6 y 7).
- ▶ La matriz  $A$  admite como valores propios  $\lambda = -1$  y  $\lambda = 2$ .
- ▶ El conjunto de vectores propios asociados a  $\lambda = -1$  es el de los múltiplos de  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .
- ▶ El conjunto de vectores propios asociados a  $\lambda = 2$  es el de los múltiplos de  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .
- ▶ Por tanto,  $\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$  son soluciones (linealmente independientes) del sistema dado.

- Veamos como solventar la pega que surgió en el ejemplo 1.

- En primer lugar, recordemos que  $e^s = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^n}{n!} = 1 + s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6} + \dots + \frac{s^n}{n!} + \dots$ , donde  $s$  es un número real cualquiera.

- Esta serie nos permite definir la exponencial de una matriz  $A$  como

$$e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} = 1 + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots$$

(Otra cuestión es cómo calcular las potencias de  $A$  de manera simple.)

- A partir de la serie, es fácil justificar que, si  $f(t) = e^{At}$ , entonces  $f'(t) = Ae^{At}$  (siendo  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ ).
- Por tanto, si  $X(t) = e^{At}v$  con  $v \in \mathbb{R}^n$ , entonces  $X'(t) = Ae^{At}v = AX(t)$ , es decir,  $e^{At}v$  es solución del sistema  $X' = AX$ .
- Por otra parte,

$$\begin{aligned} e^{At}v &= e^{At}e^{-\lambda t}e^{\lambda t}v = e^{At}e^{-\lambda t}e^{\lambda t}v = e^{At-\lambda t}e^{\lambda t}v = \\ e^{\lambda t}e^{(A-\lambda I)t}v &= e^{\lambda t} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(A-\lambda I)^n t^n}{n!} \right) v = e^{\lambda t} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n (A-\lambda I)^n v}{n!} \right). \end{aligned}$$

- En el ejemplo 1 tenemos  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  y  $\lambda = 1$ .
- Es claro que  $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$  y que  $(A - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
- Por tanto, existe un vector  $w$  tal que  $(A - \lambda I)w \neq 0$  y  $(A - \lambda I)^2 w = 0$ .
- Tenemos así que  $e^{At}w = e^{\lambda t} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n (A - \lambda I)^n w}{n!} \right) = e^{\lambda t} (I + t(A - \lambda I)) w$ .  
(Observa que  $(A - \lambda I)^n w = 0$  para  $n = 3, 4, \dots$ )
- En nuestro ejemplo, la elección más fácil es  $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , de donde

$$X(t) = e^t \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} t \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 2te^t \end{pmatrix}$$

es la solución que nos faltaba (además coincide con la obtenida en la página 5).

- En sistemas con más de dos ecuaciones pueden aparecer valores propios con multiplicidades mayores que 2. En estos casos se sigue la misma idea, es decir, se buscan vectores  $w$  tales que  $(A - \lambda I)^k w \neq 0$  para potencias menores o iguales que un adecuado valor de  $k$  y  $(A - \lambda I)^k w = 0$  para potencias mayores que dicho valor de  $k$ .

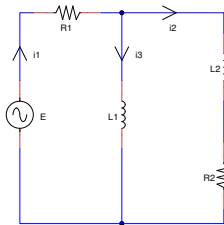
## 4.4. Ejemplos (Valores propios complejos)

- Consideremos el sistema  $X' = AX$  con  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ .
- El polinomio característico de  $A$  es  $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$ .
- La matriz  $A$  admite como valores propios  $\lambda = 1 + i$  y  $\lambda = 1 - i$ .
- Los vectores propios asociados a  $\lambda = 1 + i$  son los múltiplos del vector  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + i \end{pmatrix}$ .
- Los vectores propios asociados a  $\lambda = 1 - i$  son los múltiplos del vector  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix}$ .
- Por tanto, dos soluciones (linealmente independientes) del sistema son  $\begin{pmatrix} e^{(1+i)t} \\ (1+i)e^{(1+i)t} \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} e^{(1-i)t} \\ (1-i)e^{(1-i)t} \end{pmatrix}$ .
- Podemos comprobar que las soluciones obtenidas son conjugadas entre sí.
- Tomando la parte real y la parte imaginaria de la primera, tenemos que dos soluciones reales (linealmente independientes) del sistema dado son  $\begin{pmatrix} e^t \cos(t) \\ e^t (\cos(t) - \sin(t)) \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} e^t \sin(t) \\ e^t (\cos(t) + \sin(t)) \end{pmatrix}$ .

## 4.5. Circuitos eléctricos (de primer orden) acoplados (SE PUEDE OBLVIAR)

### Ejemplo 1

- Consideremos la red dada por el esquema



- El sistema de ecuaciones diferenciales, resultante de aplicar análisis de mallas, es

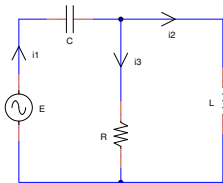
$$\left. \begin{aligned} R_1 i_1 + L_1 \frac{di_3}{dt} &= E(t) \\ R_1 i_1 + L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 &= E(t) \end{aligned} \right\}.$$

- Teniendo en cuenta que  $i_1 = i_2 + i_3$ , queda

$$\left. \begin{aligned} L_1 \frac{di_3}{dt} + R_1 i_2 + R_1 i_3 &= E(t) \\ L_2 \frac{di_2}{dt} + (R_1 + R_2) i_2 + R_1 i_3 &= E(t) \end{aligned} \right\}.$$

## Ejemplo 2

- Consideremos la red dada por el esquema



- El sistema de ecuaciones diferenciales, resultante de aplicar análisis de mallas, es

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{C}q + Ri_3 &= E(t) \\ \frac{1}{C}q + L\frac{di_2}{dt} &= E(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} Ri_3 + \frac{1}{C}q &= E(t) \\ L\frac{di_2}{dt} - Ri_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} R\frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C}i_1 &= \frac{dE}{dt}(t) \\ L\frac{di_2}{dt} - Ri_3 &= 0 \end{aligned} \right\},$$

donde se ha tenido en cuenta que  $\frac{dq}{dt} = i_1$ .

- Por último, ya que  $i_1 = i_2 + i_3$ , entonces

$$\left. \begin{aligned} R\frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C}i_2 + \frac{1}{C}i_3 &= \frac{dE}{dt}(t) \\ L\frac{di_2}{dt} - Ri_3 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

#### 4.6. Añadido: sistemas de ecuaciones de orden superior

- Consideremos dos masas  $m_1, m_2$  intercaladas entre tres muelles (con constantes de elasticidad  $k_1, k_2, k_3$ ) en un medio que no ofrece resistencia (esto es, no hay rozamiento).

- El sistema que determina el movimiento de ambas masas es

$$\left. \begin{aligned} m_1 x_1''(t) &= -(k_1 + k_2)x_1(t) + k_2 x_2(t) \\ m_2 x_2''(t) &= k_2 x_1(t) - (k_2 + k_3)x_2(t) \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

- Si suponemos  $m_1 = m_2 = m$ ,  $k_1 = k_2 = k_3 = k$  y consideramos  $\alpha^2 = \frac{k}{m}$ , el sistema sería

$$\left. \begin{aligned} x_1'' &= -2\alpha^2 x_1 + \alpha^2 x_2 \\ x_2'' &= \alpha^2 x_1 - 2\alpha^2 x_2 \end{aligned} \right\}. \quad (5)$$

- Para resolver (5) podemos pasar a una ecuación lineal de cuarto orden con coeficientes constantes.

- Despejamos  $x_2(t)$  en la primera ecuación y derivamos dos veces:

$$x_2 = \frac{1}{\alpha^2} x_1'' + 2x_1 \Rightarrow x_2'' = \frac{1}{\alpha^2} x_1^{(iv)} + 2x_1''.$$

- Sustituimos ambas expresiones en la segunda ecuación:

$$\frac{1}{\alpha^2} x_1^{(iv)} + 2x_1'' = \alpha^2 x_1 - 2(x_1'' + 2\alpha^2 x_1) \Rightarrow x_1^{(iv)} + 4\alpha^2 x_1'' + 3\alpha^4 x_1 = 0.$$

- Una vez hallada  $x_1(t)$ , recurrimos de nuevo la primera ecuación para calcular  $x_2(t)$ .

- (<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/acoplados/acoplados.html>.)



- R. Ortega. “Apuntes de Métodos matemáticos de la Física IV, Tema 6”. <http://www.ugr.es/~rortega/PDFs/Lec6.pdf>.
- G.F. Simmons. “Ecuaciones diferenciales. Con aplicaciones y notas históricas (Segunda edición)”. McGraw-Hill, 2002.
- D.G. Zill. “Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado (Octava edición)”. Cengage Learning, 2009.

Apuntes de clase elaborados por Aureliano M. Robles Pérez.

Licencia Creative Commons 3.0 España. <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es/>