UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Departamento de
Matemática Aplicada

Tema 7 (Parte 3). La ecuación diferencial lineal

"Matemática Aplicada"
Ingeniería Civil - Administración y Dirección de Empresas

31 de mayo de 2023

Índice

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Índice (cont.)

Definición 1.1

La ecuaciones diferenciales lineales de primer orden son ecuaciones diferenciales de la forma

$$x' = a(t)x + b(t), \tag{1}$$

donde $a, b : I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas en I (intervalo abierto).

Se llama ecuación lineal homogénea asociada a (1) a la ecuación

$$x' = a(t)x. \tag{2}$$

- Todas las soluciones de (1) y (2) están definidas en el intervalo I.
- Sean $Z_0 = \{\text{Soluciones de } (2)\}$ y $Z_b = \{\text{Soluciones de } (1)\}$.
  En cualquier ejemplo se puede comprobar que,
  i) si $x_h(t) \not\equiv 0$ es una solución de (2), entonces $Z_0 = \{Kx_h \mid K \in \mathbb{R}\}$;
  ii) si $x_p(t)$ es una solución de (1), entonces $Z_b = \{x_p + Kx_h \mid K \in \mathbb{R}\}$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

1. $x' = x + t^2 - 2t - 2$ (completa)
   - $x' = x$ (homogénea)
   - Ambas ecuaciones están definidas en $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
     - $Z_0 = \{Ke^t \mid K \in \mathbb{R}\}$
     - $Z_b = \{Ke^t - t^2 + 2 \mid K \in \mathbb{R}\}$
     - Todas las soluciones están definidas en $I = \mathbb{R}$.

2. $x' = x\,\mathrm{tg}(t) + 2$ (completa)
   - $x' = x\,\mathrm{tg}(t)$ (homogénea)
   - Ambas ecuaciones están definidas en $D = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times \mathbb{R}$.
     - $Z_0 = \left\{K \frac{1}{\cos(t)} \mid K \in \mathbb{R}\right\}$
     - $Z_b = \left\{K \frac{1}{\cos(t)} + 2\,\mathrm{tg}(t) \mid K \in \mathbb{R}\right\}$
     - Todas las soluciones están definidas en $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Cuando no conozcamos ninguna solución particular a priori, podemos resolver (1) mediante el siguiente proceso.

1. Resolvemos (2) como una ecuación en variables separadas. Así obtenemos

$$x(t) = Ke^{A(t)}, \ \forall t \in I, \ K \in \mathbb{R},$$

   donde $A(t)$ es una primitiva cualquiera de $a(t)$.

2. Aplicamos a (1) el cambio de variable $x = ye^{A(t)}$.

$$\left.\begin{array}{l} x' = y'e^{A(t)} + ye^{A(t)}A'(t) = y'e^{A(t)} + ye^{A(t)}a(t) \\ a(t)x + b(t) = a(t)ye^{A(t)} + b(t) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$y'e^{A(t)} + ye^{A(t)}a(t) = a(t)ye^{A(t)} + b(t) \Rightarrow y'e^{A(t)} = b(t) \Rightarrow$$

$$y' = b(t)e^{-A(t)} \Rightarrow y(t) = \int b(t)e^{-A(t)}\,dt + K, \ K \in \mathbb{R}.$$

3. Deshaciendo el cambio, tenemos la familia de soluciones de (1).

$$x(t) = Ke^{A(t)} + e^{A(t)} \int b(t)e^{-A(t)}\,dt, \ \forall t \in I, \ K \in \mathbb{R}.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Sea la ecuación $x' = x + t^2 - 2t - 2$ (definida en $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

1. Resolvemos la homogénea asociada.

$$x' = x \Rightarrow x(t) = Ke^t, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ K \in \mathbb{R}.$$

2. Aplicamos el cambio de variable $x = ye^t$ en la ecuación completa.

$$x' = y'e^t + ye^t = x + t^2 - 2t - 2 = ye^t + t^2 - 2t - 2 \Rightarrow$$
$$y'e^t = t^2 - 2t - 2 \Rightarrow y' = (t^2 - 2t - 2)e^{-t} \Rightarrow$$
$$y = \int (t^2 - 2t - 2)e^{-t}\, dt \Rightarrow$$
$$y(t) = (2 - t^2)e^{-t} + K, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ K \in \mathbb{R}.$$

3. Deshaciendo el cambio, las soluciones buscadas son

$$x(t) = 2 - t^2 + Ke^t, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ K \in \mathbb{R}.$$

Definición 2.1

La ecuaciones diferenciales lineales de orden n son ecuaciones diferenciales de la forma

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t), \tag{3}$$

donde $n \geq 1$ es un número natural y $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b : I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas en I (intervalo abierto).

Se llama ecuación lineal homogénea asociada a (3) a la ecuación

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0. \tag{4}$$

Diremos que (3) es completa si $b(t) \not\equiv 0$ (es decir, si $b(t)$ no es la función constantemente igual a cero).

Ejemplo 2.2

1) $x'' + x = \text{sen}(t)$ $\;(a_1(t) = 0,\ a_0(t) = 1,\ b(t) = \text{sen}(t),\ I = \mathbb{R})$

2) $x'' + x = 0$ $\;(a_1(t) = 0,\ a_0(t) = 1,\ b(t) = 0,\ I = \mathbb{R})$

3) $x' - \frac{1}{t}x = \ln(t)$ $\;(a_0(t) = -\frac{1}{t},\ b(t) = \ln(t),\ I = \mathbb{R}^+ =]0, +\infty[)$

4) $x''' + t^2x' + x = \cos(t)$ $\;(a_2(t) = 0,\ a_1(t) = t^2,\ a_0(t) = 1,\ b(t) = \cos(t),\ I = \mathbb{R})$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- Definimos el operador diferencial $L : C^n(I) \to C(I)$ como

$$L[x] = x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x.$$

- Recordemos que $C(I)$ y $C^n(I)$ son espacios vectoriales (con las operaciones habituales: suma de funciones y producto por números reales).

- Es fácil comprobar que L es una aplicación lineal.
$\big(L[x+y] = L[x] + L[y],\;\; L[\lambda x] = \lambda L[x],\;\; \forall x, y \in C^n(I),\; \forall \lambda \in \mathbb{R}\big)$

- Con esta notación, una ecuación diferencial lineal viene dada por la expresión

$$L[x] = b(t).$$

Ejemplo (2.2 cont.)

1) $L : C^2(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}),\;\; L[x] = x'' + x \quad \Rightarrow \quad L[x] = \operatorname{sen}(t)$

2) $L : C^2(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}),\;\; L[x] = x'' + x \quad \Rightarrow \quad L[x] = 0$

3) $L : C^1(\mathbb{R}^+) \to C(\mathbb{R}^+),\;\; L[x] = x' - \frac{1}{t}x \quad \Rightarrow \quad L[x] = \ln(t)$

4) $L : C^3(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}),\;\; L[x] = x''' + t^2x' + x \quad \Rightarrow \quad L[x] = \cos(t)$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 2.3

Definimos el operador diferencial $L : C^1(I) \to C(I), \;\; L[x] = x' + x$.

1) $L[e^t] = e^t + e^t = 2e^t$.

2) $L[\mathrm{sen}(t)] = \cos(t) + \mathrm{sen}(t)$.

3) Consideremos la función

$$f(t) = \begin{cases} -t, & \text{si } t < 0, \\ t, & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

- ⋆ Es claro que f pertenece a $C(\mathbb{R})$ pero no a $C^1(\mathbb{R})$.
- ⋆ $F(t) = \int_0^t f(s)\, ds$ es una función de $C^1(\mathbb{R})$ pero no de $C^2(\mathbb{R})$. (Recuerda el Teorema fundamental del cálculo).
- ⋆ $L(F) = f + F$ pertenece a $C(\mathbb{R})$ pero no a $C^1(\mathbb{R})$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Resultado 2.4 (Teorema de existencia y unicidad)

Sea el operador $L : C^n(I) \to C(I)$ (donde I es un intervalo abierto) definido por

$$L[x] = x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x.$$

Sea la función $b \in C(I)$. Supongamos que $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$ son valores prefijados y que $t_0 \in I$.

Entonces existe una única función $x \in C^n(I)$ que

i) *es solución de la ecuación $L[x] = b(t)$;*

ii) *cumple la condición inicial*

$$x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_1,\ \ldots\ ,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}.$$

Ejemplo 2.5

1) $x' - \frac{1}{t}x = \ln(t),\ \ x(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{t}{2}(\ln(t))^2,\ \forall t \in \mathbb{R}^+.$

2) $x'' + x = 0,\ \ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad x(t) = -\cos(t),\ \forall t \in \mathbb{R}.$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Consideremos la ecuación diferencial lineal de orden n

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t).$$

Sea el operador diferencial lineal $L : C^n(I) \to C(I)$ asociado

$$L[x] = x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x.$$

Sea el conjunto $Z_b = \{\text{Soluciones de } L[x] = b\}$.

Entonces

- $Z_0 = \{\text{Soluciones de } L[x] = 0\} = \{\text{Soluciones de la homogénea}\}$ tiene estructura de espacio vectorial.
  $\big(x + y, \lambda x \in Z_0, \ \forall x, y \in Z_0, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}\big)$.
- $Z_b = \{\text{Soluciones de } L[x] = b\} = \{\text{Soluciones de la completa}\}$ tiene estructura de espacio afín (supuesto $b \not\equiv 0$).
  $\big(Z_b = x_p + Z_0$, siendo x_p una solución particular de la completa, es decir, $L[x_p] = b\big)$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

La estructura de los conjuntos Z_b se puede justificar haciendo cuentas directamente.

En el caso Z_0 tenemos que

- la suma de dos soluciones es otra solución;
- el producto de una solución por un número (real) es otra solución.

Pero nosotros vamos a aplicar el Álgebra Lineal.

- Sean V, W espacios vectoriales y $L : V \to W$ una aplicación lineal. Entonces
  - ⋆ $\ker(L) = \{v \in V \mid L(v) = 0\}$ es un subespacio vectorial de V;
  - ⋆ $L^{-1}(w) = \{v \in V \mid L(v) = w\}$ es un subespacio afín (supuesto $w \neq 0$).
- En nuestro caso basta tomar

  $$V = C^n(I), \;\; W = C(I), \;\; Z_0 = \ker(L) \text{ y } Z_b = L^{-1}(b) \;\; (\text{para } b \not\equiv 0),$$

  siendo $L : C^n(I) \to C(I)$ el operador diferencial lineal asociado a la ecuación diferencial lineal.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Sabemos que el conjunto de soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea tiene estructura de espacio vectorial.

Vamos a usar de nuevo el Álgebra Lineal para justificar que, si tenemos una ecuación de orden n, entonces $\dim(Z_0) = n$.

Recordatorio:

- Sean V, W espacios vectoriales (de dimensión finita) y sea $L : V \to W$ un isomorfismo (es decir, una aplicación lineal y biyectiva). Entonces V y W tienen la misma dimensión.

En nuestro caso basta considerar el isomorfismo (fijado $t_0 \in I$)

$$\Phi_{t_0} : Z_0 \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \left(x(t_0), x'(t_0), \ldots, x^{(n-1)}(t_0) \right),$$

esto es, Φ_{t_0} asigna a cada solución su condición inicial en el punto t_0.

(Φ_{t_0} es un isomorfismo gracias al Teorema de existencia y unicidad).

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 3.1

Consideremos la ecuación diferencial $x' + x = 0$.

- $Z_0 = \left\{ke^{-t} \mid k \in \mathbb{R}\right\}$.
- $t_0 = 0 \Rightarrow \Phi_0 : Z_0 \to \mathbb{R},\ \ x(t) = ke^{-t} \mapsto x(0) = k$.
- $t_0 = 1 \Rightarrow \Phi_1 : Z_0 \to \mathbb{R},\ \ x(t) = ke^{-t} \mapsto x(1) = ke^{-1}$.

Ejemplo 3.2

Consideremos la ecuación diferencial $x'' + x = 0$.

- $Z_0 = \left\{k_1 \operatorname{sen}(t) + k_2 \cos(t) \mid k \in \mathbb{R}^2\right\}$.
- $t_0 = 0 \Rightarrow \Phi_0 : Z_0 \to \mathbb{R}^2$,
$$x(t) = k_1 \operatorname{sen}(t) + k_2 \cos(t) \mapsto (x(0), x'(0)) = (k_2, k_1).$$
- $t_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Phi_{\frac{\pi}{2}} : Z_0 \to \mathbb{R}^2$,
$$x(t) = k_1 \operatorname{sen}(t) + k_2 \cos(t) \mapsto \left(x\left(\tfrac{\pi}{2}\right), x'\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = (k_1, -k_2).$$

Recordemos que

- todos los espacios vectoriales (de dimensión finita) tienen una base (finita);
- en una base hay tantos elementos como dimensión del espacio vectorial considerado;
- una base nos permite conocer todos los elementos de un espacio vectorial a partir de unos pocos (justo los de la base);

Por tanto, dada una ecuación lineal homogénea, sería interesante saber calcular una base de Z_0.

Definición 3.3

Una base cualquiera de Z_0 se denomina *"sistema fundamental"* de la ecuación diferencial considerada.

Ejemplo 3.4

1) $\left\{e^{-t}\right\}$ es un sistema fundamental de la ecuación $x' + x = 0$.

2) $\{\mathrm{sen}(t), \cos(t)\}$ es un sistema fundamental de la ecuación $x'' + x = 0$.

3) $\{\mathrm{sen}(t) + \cos(t), \mathrm{sen}(t) - \cos(t)\}$ es un sistema fundamental de $x'' + x = 0$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Recordemos que los isomorfismos entre espacios vectoriales transforman bases en bases.

Ejemplo 3.5

Consideremos la ecuación diferencial $x' + x = 0$.

- $t_0 = 0 \Rightarrow \Phi_0 : Z_0 \to \mathbb{R},\ x(t) = e^{-t} \mapsto x(0) = 1$.
- $\{1\}$ es una base de $\mathbb{R} \Rightarrow \left\{e^{-t}\right\}$ es una base de $Z_0 = \left\{ke^{-t} \mid k \in \mathbb{R}\right\}$.

Ejemplo 3.6

Consideremos la ecuación diferencial $x'' + x = 0$.

- $t_0 = 0 \Rightarrow \Phi_0 : Z \to \mathbb{R}^2$,
  - $x(t) = \operatorname{sen}(t) \mapsto (\operatorname{sen}(0), \operatorname{sen}'(0)) = (0, 1)$.
  - $x(t) = \cos(t) \mapsto (\cos(0), \cos'(0)) = (1, 0)$.
- $\{(0,1), (1,0)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$

  $\{\operatorname{sen}(t), \cos(t)\}$ es una base de $Z_0 = \{k_1 \operatorname{sen}(t) + k_2 \cos(t) \mid k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Recordemos que, si V es un espacio vectorial de dimensión r,

- una base de V tiene r elementos;
- los elementos de una base son linealmente independientes.

Por tanto, r elementos de un espacio vectorial r-dimensional V, que sean linealmente independientes, forman una base de V.

Resultado 3.7

Dada una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n, si calculamos n soluciones linealmente independientes, entonces tendremos un sistema fundamental de dicha ecuación.

Pregunta

¿Que significa ser "linealmente independientes" cuando nos referimos a funciones?

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 3.8

Sean $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_r$ funciones pertenecientes a $C^n(I)$. Diremos que son linealmente independientes si la igualdad funcional

$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \cdots + c_r\varphi_r(t) = 0, \; \forall t \in I,$$

es solo posible si $c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0$.

Resultado 3.9

Dos funciones son linealmente dependientes si, y solo si, una es múltiplo de la otra.

Ejemplo 3.10

1) $\{1, t\}$ son funciones linealmente independientes.
2) $\{\operatorname{sen}(t), \cos(t)\}$ son funciones linealmente independientes.
3) $\{\operatorname{sen}(t), 2\operatorname{sen}(t)\}$ no son funciones linealmente independientes.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 3.11

Veamos que $1, t, t^2, t^3$ son cuatro funciones linealmente independientes en $C^3(\mathbb{R})$.

- Consideramos la combinación lineal

$$c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

- Derivando tres veces sucesivamente, obtenemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 &= 0 \\ c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 &= 0 \\ 2c_2 + 6c_3 t &= 0 \\ 6c_3 &= 0 \end{aligned}\right\}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

- Resolviendo de abajo arriba, tenemos que $c_3 = c_2 = c_1 = c_0 = 0$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Es interesante observar que el concepto de independencia lineal de funciones depende de los dominios.

Ejemplo 3.12

Consideramos las leyes

- $x(t) = 1$.
- $y(t) = \begin{cases} 1 + t + e^{-t}, & \text{si } t \leq 0, \\ 2, & \text{si } t > 0. \end{cases}$

Así definidas, $x(t), y(t)$ son linealmente independientes en $C^1(\mathbb{R})$.

Sin embargo, $x(t), y(t)$ son linealmente dependientes en $C^1(\mathbb{R}^+)$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Dadas las funciones $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in C^{n-1}(I)$, consideramos la combinación lineal

$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t) = 0, \ \forall t \in I.$$

Derivando $n-1$ veces la anterior expresión, obtenemos el sistema

$$\left.\begin{array}{r} c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t) = 0 \\ c_1\varphi_1'(t) + c_2\varphi_2'(t) + \cdots + c_n\varphi_n'(t) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1\varphi_1^{(n-1)}(t) + c_2\varphi_2^{(n-1)}(t) + \cdots + c_n\varphi_n^{(n-1)}(t) = 0 \end{array}\right\}, \ \forall t \in I.$$

Para cada $t \in I$, este es un sistema donde $c_1, c_2, \dots, c_n$ son las incógnitas y la matriz de coeficientes está dada por

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \dots & \varphi_n'(t) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Si el determinante de esta matriz fuera no nulo para algún $t \in I$, entonces $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ y, por tanto, $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ serían linealmente independientes.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 3.13

Dadas las funciones $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in C^{n-1}(I)$, llamaremos *"wronskiano"* de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ a la función

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \ldots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \ldots & \varphi_n'(t) \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}, \ \forall t \in I.$$

Resultado 3.14

Sean $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in C^{n-1}(I)$. Si $W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)(t)$ es no nulo (para algún $t \in I$) entonces $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ son linealmente independientes.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 3.15

1. $\varphi_1(t) = 1$, $\varphi_2(t) = t$ son linealmente independientes en $C^1(\mathbb{R})$.

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(t) = \begin{vmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

2. $\varphi_1(t) = \operatorname{sen}(t)$, $\varphi_2(t) = \cos(t)$ son linealmente independientes en $C^1(\mathbb{R})$.

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(t) = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}(t) & \cos(t) \\ \cos(t) & -\operatorname{sen}(t) \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

3. $\varphi_1(t) = 1$, $\varphi_2(t) = t$, $\varphi_3(t) = t^2$, $\varphi_4(t) = t^3$ son linealmente independientes en $C^3(\mathbb{R})$.

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)(t) = \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ 0 & 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6t \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 12 \neq 0, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

4. ¿Qué puedes decir sobre $\varphi_1(t) = 2t^2$, $\varphi_2(t) = t|t|$ como funciones de $C^1(\mathbb{R})$? ¿Y si las consideras funciones de $C^1(\mathbb{R}^+)$ o $C^1(\mathbb{R}^-)$?

Resultado 3.16

Sean $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ soluciones de una ecuación lineal homogénea de orden n ("definida" en un intervalo abierto I), es decir, elementos del espacio Z_0 asociado a dicha ecuación. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

1) $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ *son linealmente independientes en* $C^{n-1}(I)$.
2) $W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)(t)$ *es distinto de cero para todo* $t \in I$.
3) $W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)(t_*)$ *es distinto de cero para algún* $t_* \in I$.

¡OJO! Este resultado solo es válido para conjuntos de funciones que sean solución de una ecuación diferencial lineal homogénea.

Justificación del resultado (SE PUEDE OBVIAR)

1) $\Rightarrow$ 2) A partir de los isomorfismos $\Phi_t : Z_0 \to \mathbb{R}^n$.

2) $\Rightarrow$ 3) Evidente.

3) $\Rightarrow$ 1) A partir de Resultado 3.14.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 3.17

Sean las funciones $\varphi_1(t) = t$, $\varphi_2(t) = t^3$. Su wronskiano es

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(t) = \begin{vmatrix} t & t^3 \\ 1 & 3t^2 \end{vmatrix} = 2t^3 \neq 0 \Leftrightarrow t \neq 0.$$

- $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ son linealmente independientes en $C^1(\mathbb{R})$.
- $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ no pueden ser soluciones de una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes continuos en $\mathbb{R}$.
- $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ sí pueden ser soluciones de una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes continuos en intervalos que no contengan al cero. Por ejemplo,

$$x'' - \frac{3}{t}x' + \frac{3}{t^2}x = 0.$$

- $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ sí pueden ser soluciones de una ecuación lineal homogénea de orden superior a dos con coeficientes continuos en $\mathbb{R}$. Por ejemplo, de la ecuación

$$x^{(iv)} = 0.$$

En este caso $\{1, t, t^2, t^3\}$ es un sistema fundamental (gracias al Ejemplo 3.11).

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

En general, no es fácil resolver explícitamente una ecuación lineal homogénea de orden mayor o igual que 2.

Si disponemos de una solución (no idénticamente cero) de una ecuación de segundo orden, entonces podemos calcular otra solución que será linealmente independiente con la ya conocida.

- Sea la ecuación lineal homogénea de segundo orden

$$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0,$$

  donde $a_0, a_1 \in C^1(I)$ (con I intervalo abierto).
- Sea el cambio $x = \varphi(t)y$, donde $\varphi(t)$ es una solución no trivial de la ecuación.
- Derivando dos veces en el cambio y sustituyendo en la ecuación, tenemos

$$\varphi''(t)y + 2\varphi'(t)y' + \varphi(t)y'' + a_1(t)(\varphi'(t)y + \varphi(t)y') + a_0(t)\varphi(t)y = 0 \Rightarrow$$
$$\left(\varphi''(t) + a_1(t)\varphi'(t) + a_0(t)\varphi(t)\right) y + \left(2\varphi'(t) + a_1(t)\varphi(t)\right) y' + \varphi(t)y'' = 0.$$

- Ya que $\varphi''(t) + a_1(t)\varphi'(t) + a_0(t)\varphi(t) = 0$, nos queda la ecuación

$$\left(2\varphi'(t) + a_1(t)\varphi(t)\right) y' + \varphi(t)y'' = 0.$$

- Tomando el cambio $z = y'$, tenemos finalmente una ecuación de primer orden.

$$\varphi(t)z' + \left(2\varphi'(t) + a_1(t)\varphi(t)\right) z = 0.$$

El método de reducción de orden se puede aplicar a cualquier ecuación de orden n ($n \geq 2$). La idea siempre será usar el cambio $x = \varphi(t)y$, supuesto que $\varphi(t)$ es una solución no trivial de la ecuación dada.

Justificación de la independencia lineal (con cálculos un tanto "alegres"). (SE PUEDE OBVIAR A PARTIR DE AQUÍ)

- Si $A_1(t) = \int a_1(t)dt$, una solución de $\varphi(t)z' + (2\varphi'(t) + a_1(t)\varphi(t))\, z = 0$ es $z(t) = \frac{e^{-A_1(t)}}{\varphi^2(t)}$. (Como $\varphi(t) \not\equiv 0$, podemos hacer la división.)
- Deshaciendo el cambio $y' = z$, entonces $y(t) = \displaystyle\int \frac{e^{-A_1(t)}}{\varphi^2(t)}\, dt$.
- Deshaciendo el cambio $x = \varphi(t)y$, tenemos $\psi(t) = \varphi(t) \displaystyle\int \frac{e^{-A_1(t)}}{\varphi^2(t)}\, dt$.
- Para ver que $\varphi(t), \psi(t)$ son linealmente independientes, calculamos su wronskiano.

$$\begin{vmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi(t) & \varphi(t) \displaystyle\int \frac{e^{-A_1(t)}}{\varphi^2(t)}\, dt \\ \varphi'(t) & \varphi'(t) \displaystyle\int \frac{e^{-A_1(t)}}{\varphi^2(t)}\, dt + \frac{e^{-A_1(t)}}{\varphi(t)} \end{vmatrix} = e^{-A_1(t)} \neq 0.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 3.18

Sea la ecuación lineal homogénea de segundo orden

$$x'' + \frac{1}{t}x' - \frac{1}{t^2}x = 0.$$

- Es fácil comprobar que $\varphi(t) = t$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, es una solución.
- Sea el cambio $x = ty$.
- Entonces $x' = y + ty'$, $x'' = 2y' + ty''$. Sustituyendo en la ecuación,

$$2y' + ty'' + \frac{1}{t}y + y' - \frac{1}{t}y = 0 \Rightarrow ty'' + 3y' = 0$$

- Tomando el cambio $z = y'$, tenemos

$$tz' + 3z = 0.$$

- Resolviendo por variables separadas, $z = t^{-3}$ es una solución.
- De $y' = z = t^{-3}$ se sigue que $y = -\frac{1}{2}t^{-2}$.
- Finalmente, $x = ty = -\frac{1}{2t}$. $\big($También valdría $x = \frac{1}{t}$. ¿Por qué?$\big)$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Consideremos la ecuación diferencial lineal de orden n

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t),$$

siendo $b \not\equiv 0$.

Recordemos que el conjunto Z_b de soluciones de esta ecuación tiene estructura de espacio afín, es decir,

$$Z_b = x_p + Z_0,$$

siendo Z_0 el conjunto de soluciones de la ecuación lineal homogénea asociada y x_p una solución particular (o sea, $L[x_p] = b$).

Todo esto nos permite determinar Z_b si somos capaces de resolver la ecuación homogénea (o sea, si conocemos Z_0) y de calcular una solución de la completa (es decir, alguna x_p).

Ejemplo 4.1

Sea la ecuación $x'' - x = t$.

- $Z_0 = \{c_1 e^t + c_2 e^{-t} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$.
- $x_p(t) = -t,\ \forall t \in \mathbb{R},$ es una solución particular.
- $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - t, \forall t \in \mathbb{R},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R},$ es el conjunto de soluciones de la ecuación $x'' - x = t$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Sea la ecuación diferencial lineal de segundo orden (con $b \not\equiv 0$)

$$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t).$$

- Supongamos que $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t)\}$ es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada.
- Buscaremos una solución particular de la forma $x_p(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + c_2(t)\varphi_2(t)$.
- Derivando, $x_p'(t) = c_1'(t)\varphi_1(t) + c_1(t)\varphi_1'(t) + c_2'(t)\varphi_2(t) + c_2(t)\varphi_2'(t)$.
- Suponemos que $c_1'(t)\varphi_1(t) + c_2'(t)\varphi_2(t) = 0$ y volvemos a derivar,

$$x_p''(t) = c_1'(t)\varphi_1'(t) + c_1(t)\varphi_1''(t) + c_2'(t)\varphi_2'(t) + c_2(t)\varphi_2''(t).$$

- Sustituimos en la ecuación de partida, (quitando las t's para simplificar las expresiones),

$$c_1'\varphi_1' + c_1\varphi_1'' + c_2'\varphi_2' + c_2\varphi_2'' + a_1(c_1\varphi_1' + c_2\varphi_2') + a_0(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = b(t) \Rightarrow$$

$$c_1(\varphi_1'' + a_1\varphi_1' + a_0\varphi_1) + c_2(\varphi_2'' + a_1\varphi_2' + a_0\varphi_2) + c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2' = b(t) \Rightarrow c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2' = b(t).$$

- El sistema a resolver para hallar $c_1(t)$, $c_2(t)$ es

$$\left.\begin{array}{l} c_1'(t)\varphi_1(t) + c_2'(t)\varphi_2(t) = 0 \\ c_1'(t)\varphi_1'(t) + c_2'(t)\varphi_2'(t) = b(t) \end{array}\right\}.$$

- Observemos que el determinante de la matriz de coeficientes es $W(\varphi_1, \varphi_2)(t)$, que es distinto de cero por ser $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ linealmente independientes.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 4.2

Consideremos la ecuación diferencial lineal de segundo orden (con $b \not\equiv 0$)

$$x'' - 2x' + x = t.$$

- Podemos comprobar que $\{\varphi_1(t) = e^t, \varphi_2(t) = te^t\}$ es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada.
- Vamos a buscar una solución particular de la forma $x_p(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)te^t$.
- Derivando, $x_p'(t) = c_1'(t)e^t + c_1(t)e^t + c_2'(t)te^t + c_2(t)(1+t)e^t$.
- Suponemos que $c_1'(t)e^t + c_2'(t)te^t = 0$ y volvemos a derivar,

$$x_p''(t) = c_1'(t)e^t + c_1(t)e^t + c_2'(t)(1+t)e^t + c_2(t)(2+t)e^t.$$

- Sustituimos en la ecuación de partida, (quitando, cuando se pueda, las t's para simplificar las expresiones),

$$c_1'e^t + c_1e^t + c_2'(1+t)e^t + c_2(2+t)e^t - 2(c_1e^t + c_2(1+t)e^t) + c_1e^t + c_2te^t = t \Rightarrow$$

$$c_1(e^t - 2e^t + e^t) + c_2((2+t)e^t - 2(1+t)e^t + te^t) + c_1'e^t + c_2'(1+t)e^t = t \Rightarrow$$

$$c_1'e^t + c_2'(1+t)e^t = t.$$

Ejemplo (4.2 cont.)

- El sistema a resolver para hallar $c_1(t)$, $c_2(t)$ es

$$\left.\begin{array}{l} c_1'(t)e^t + c_2'(t)te^t = 0 \\ c_1'(t)e^t + c_2'(t)(1+t)e^t = t \end{array}\right\}.$$

- El determinante de la matriz de coeficientes es

$$W(e^t, te^t) = \begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & (1+t)e^t \end{vmatrix} = (1+t)e^{2t} - te^{2t} = e^{2t}.$$

- Para resolver el sistema empleamos la regla de Cramer.

$$c_1'(t) = \frac{1}{e^{2t}} \begin{vmatrix} 0 & te^t \\ t & (1+t)e^t \end{vmatrix} = -t^2e^{-t} \Rightarrow c_1(t) = -\int t^2e^{-t}\,dt = (t^2+2t+2)e^{-t}.$$

$$c_2'(t) = \frac{1}{e^{2t}} \begin{vmatrix} e^t & 0 \\ e^t & t \end{vmatrix} = te^{-t} \Rightarrow c_2(t) = \int te^{-t}\,dt = -(t+1)e^{-t}.$$

- Una solución particular es $x_p(t) = (t^2+2t+2)e^{-t}e^t - (t+1)e^{-t}te^t = t+2$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- El método de variación de constantes funciona siempre que se conozca un sistema fundamental de la ecuación homogénea asociada.
- Sin embargo, el proceso de cálculo puede resultar bastante tedioso.
- En muchos casos (que no es siempre) funciona el método de los coeficientes indeterminados, que consiste en buscar soluciones particulares del mismo tipo que la función $b(t)$.
- Así, si $b(t)$ es una función polinómica entonces hay una solución particular polinómica; si $b(t)$ es trigonométrica entonces la solución es trigonométrica; etcétera.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 4.3

Consideremos la ecuación diferencial lineal de segundo orden (con $b \not\equiv 0$)

$$x'' - 2x' + x = t.$$

- Como $b(t) = t$, buscamos una solución particular de la forma $x_p(t) = \alpha_1 t + \alpha_0$.
- Derivando dos veces y sustituyendo en la ecuación, tenemos

$$0 - 2\alpha_1 + \alpha_1 t + \alpha_0 = t \Leftrightarrow \alpha_1 t + (\alpha_0 - 2\alpha_1) = t$$

- Puesto que dos polinomios son iguales si, y solo si, sus coeficientes son iguales, es fácil ver que la última igualdad es cierta si, y solo si, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_0 = 2$.
- Así, $x_p(t) = t + 2$ es una solución particular (como ya vimos en la página 32).

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 5.1

Son ecuaciones diferenciales de la forma

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x = b(t), \tag{5}$$

donde $n \geq 1$ es un número natural, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ y $b : I \to \mathbb{R}$ es una función continua en I (intervalo abierto).

- En estas ecuaciones siempre es posible calcular un sistema fundamental de la ecuación homogénea asociada y, por tanto, calcular el conjunto de soluciones de la completa.
- Para ver que esto es así, usaremos el operador diferencial $L : C^n(I) \to C(I)$ definido (como es de esperar) de la forma

$$L[x] = x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x.$$

- Nos centraremos en el cálculo del sistema fundamental pues, para hallar soluciones particulares, es suficiente con ello.

- Observemos que las soluciones de la ecuación $x' + a_0 x = 0$ son de la forma $x(t) = Ke^{-a_0 t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- Vamos a buscar condiciones para que una función del tipo e^{rt} sea solución de la ecuación de orden n, o sea, que $L[e^{rt}] = 0$.

$$L[e^{rt}] = (e^{rt})^{(n)} + a_{n-1}(e^{rt})^{(n-1)} + \ldots + a_1(e^{rt})' + a_0 e^{rt} = 0 \Leftrightarrow$$
$$r^n e^{rt} + a_{n-1} r^{n-1} e^{rt} + \ldots + a_1 r e^{rt} + a_0 e^{rt} = 0 \Leftrightarrow$$
$$(r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0) e^{rt} = 0.$$

- Consideremos el polinomio $p(r) = r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0$, que se denomina "polinomio característico" asociado a la ecuación $L[x] = 0$.

Resultado 5.2

- *La función* $x(t) = e^{rt}, \forall t \in \mathbb{R}$, *es solución de la ecuación* $L[x] = 0$ *si, y solo si,* r *es una raíz del polinomio característico de dicha ecuación*

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 5.3 (raíces reales simples)

Sea la ecuación diferencial lineal de segundo orden $x'' - x = 0$.

- El polinomio característico es $p(r) = r^2 - 1$.
- Las raíces de $p(r)$ son $r = -1$ y $r = 1$.
- Por tanto, e^{-t}, e^t son soluciones linealmente independientes de la ecuación.
- Se concluye que $\{e^{-t}, e^t\}$ es un sistema fundamental de $x'' - x = 0$.

Ejemplo 5.4 (raíces reales dobles)

Sea la ecuación diferencial lineal de segundo orden $x'' - 2x' + x = 0$.

- El polinomio característico es $p(r) = r^2 - 2r + 1$.
- Las raíces de $p(r)$ son $r = 1$ y $r = 1$ (es decir, $r = 1$ doble).
- Por tanto, e^t es una solución de la ecuación.
- Pero la ecuación es de orden 2. Luego necesitamos otra solución (linealmente independiente de e^t) para tener un sistema fundamental.
- ¿Qué podemos hacer? Antes de dar respuesta a esta pregunta, veamos otro posible inconveniente que tiene un arreglo inmediato.

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 5.5 (raíces complejas conjugadas)

Sea la ecuación diferencial lineal de segundo orden $x'' + x = 0$.

- El polinomio característico es $p(r) = r^2 + 1$.
- Las raíces de $p(r)$ son $r = -i$ y $r = i$.
- Se puede ver que e^{-it} y e^{it} son "soluciones" linealmente independientes.
- Pero estas son funciones definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$.
- Evitamos este problema tomando
  - $\cos(t) = \Re(e^{it}) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$ (parte real de $e^{it} = \cos(t) + i\,\text{sen}(t)$).
  - $\text{sen}(t) = \Im(e^{it}) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$ (parte imaginaria de e^{it}).
- $\cos(t)$, $\text{sen}(t)$ son soluciones linealmente independientes de $x'' + x = 0$.

En general, si $\alpha + i\beta$ es raíz de un polinomio característico, entonces $\alpha - i\beta$ también lo es.

- Tomando (recuerda que $e^{\alpha t + i\beta t} = e^{\alpha t}\cos(\alpha t) + ie^{\alpha t}\,\text{sen}(\beta t)$)
  - $e^{\alpha t}\cos(\beta t) = \Re(e^{\alpha t+i\beta t}) = \frac{e^{\alpha t+i\beta t}+e^{\alpha t-i\beta t}}{2}$ (parte real de $e^{\alpha t+i\beta t}$).
  - $e^{\alpha t}\,\text{sen}(\beta t) = \Im(e^{\alpha t+i\beta t}) = \frac{e^{\alpha t+i\beta t}+e^{\alpha t-i\beta t}}{2i}$ (parte imaginaria de $e^{\alpha t+i\beta t}$).
- $e^{\alpha t}\cos(\beta t)$, $e^{\alpha t}\,\text{sen}(\beta t)$ serán soluciones linealmente independientes.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Qué hacer con las raíces múltiples. (SE PUEDE OBVIAR)

- Supongamos que r, $r+h$ son raíces del polinomio característico (con $h \neq 0$).
- Entonces e^{rt}, $e^{(r+h)t}$ serán soluciones (linealmente independientes) de la ecuación correspondiente.
- Además, e^{rt}, $\frac{e^{(r+h)t}-e^{rt}}{h}$ también serán soluciones (linealmente independientes) de la ecuación correspondiente.
- Teniendo en cuenta que

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{(r+h)t}-e^{rt}}{h} = te^{rt},$$

  podemos concluir que e^{rt}, te^{rt} serán soluciones (linealmente independientes) de una ecuación cuyo polinomio característico tenga a r como raíz doble.
- Un argumento similar nos permite asegurar que, si el polinomio característico admite una raíz r triple, entonces e^{rt}, te^{rt}, t^2e^{rt} son soluciones (linealmente independientes) de la ecuación correspondiente.
- ¿Puedes conjeturar qué ocurre si tenemos una raíz con multiplicidad m?

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (5.4 cont., raíces reales dobles)

Sea la ecuación diferencial lineal de segundo orden $x'' - 2x' + x = 0$.

- El polinomio característico es $p(r) = r^2 - 2r + 1$.
- Las raíces de $p(r)$ son $r = 1$ y $r = 1$ (es decir, $r = 1$ doble).
- Por tanto, e^t, te^t son soluciones (linealmente independientes) de la ecuación.

Ejemplo 5.6 (raíces complejas conjugadas dobles)

Sea la ecuación diferencial lineal de segundo orden $x^{iv)} + 2x'' + x = 0$.

- El polinomio característico es $p(r) = r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2 + 1)^2$.
- Las raíces de $p(r)$ son $r = i$ y $r = -i$, ambas dobles.
- Por tanto, e^{it}, te^{it}, e^{-it}, te^{-it} son soluciones de la ecuación.
- Combinando e^{it}, e^{-it} tenemos $\cos(t)$, $\operatorname{sen}(t)$. Y combinando te^{it}, te^{-it} tenemos $t\cos(t)$, $t\operatorname{sen}(t)$.
- Por tanto, $\cos(t)$, $t\cos(t)$, $\operatorname{sen}(t)$, $t\operatorname{sen}(t)$ son soluciones (linealmente independientes) de la ecuación.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Resultado 5.7 (Soluciones de la ecuación lineal de coeficientes constantes)

Sea una ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes tal que r es una raíz, con multiplicidad m, del polinomio característico asociado.

- *Si r es real entonces*

$$e^{rt},\ te^{rt}, \ldots, t^{m-1}e^{rt}$$

son soluciones (linealmente independientes) de la ecuación dada.

- *Si $r = a + ib$ es compleja y no real ($b \neq 0$) entonces*

$$e^{at}\cos bt,\ e^{at}\,\mathrm{sen}\, bt,\ te^{at}\cos bt,\ te^{at}\,\mathrm{sen}\, bt,\ \ldots,\ t^{m-1}e^{at}\cos bt,\ t^{m-1}e^{at}\,\mathrm{sen}\, bt,$$

son soluciones (linealmente independientes) de la ecuación dada.

Además, el conjunto resultante de la unión de todas las soluciones linealmente independientes (de cada una de las raíces del polinomio característico) es un sistema fundamental de la ecuación dada.

- Sea un sistema compuesto por un muelle (con constante elástica $k > 0$) y una masa m unida al muelle.
- Si el sistema está en equilibrio (posición $x = 0$), entonces el muelle no ejerce fuerza sobre la masa.
- Si la masa se desplaza una distancia x, entonces el muelle ejerce una fuerza sobre la masa igual a $-kx$. (El signo (-) indica que se opone al movimiento.)
- Si suponemos que no hay rozamiento entonces, por la segunda ley de Newton, la masa se mueve según la ecuación

$$mx'' = -kx. \tag{6}$$

- Para simplificar el estudio, se toma la ecuación

$$x'' + \omega^2 x = 0, \tag{7}$$

donde $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- Si en el sistema descrito para el oscilador libre no amortiguado se introduce un rozamiento proporcional a la velocidad del desplazamiento (según una constante $c > 0$), entonces la masa se mueve según la ecuación
$$mx'' = -cx' - kx. \tag{8}$$
- De nuevo, para simplificar el estudio, se considera la ecuación
$$x'' + 2bx' + \omega^2 x = 0, \tag{9}$$
donde $2b = \frac{c}{m}$.
- ¿Cómo influye el valor de $b^2 - \omega^2$ en el comportamiento de las oscilaciones?

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- Si en el sistema del oscilador libre amortiguado interviene una fuerza externa dada por la función $F(t)$, entonces la masa se mueve según la ecuación del oscilador forzado amortiguado,

$$mx'' = -cx' - kx + F(t). \tag{10}$$

- Una vez más, para simplificar el estudio, se considera la ecuación

$$x'' + 2bx' + \omega^2 x = f(t), \tag{11}$$

donde $f(t) = \frac{1}{m} F(t)$.

- Como caso particular tenemos el oscilador forzado no amortiguado (esto es, sin rozamiento) que viene modelado por la ecuación

$$x'' + \omega^2 x = f(t). \tag{12}$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

La ecuación de Euler es una ecuación diferencial lineal del tipo

$$t^n x^{(n)} + a_{n-1} t^{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 t x' + a_0 x = 0, \tag{13}$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

- Es conveniente observar que las soluciones de estas ecuaciones admiten dos intervalos maximales posibles: $\mathbb{R}^- =]-\infty, 0[$ y $\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$.
- Consideramos el intervalo $]0, +\infty[$ y el cambio de variable $t = t(s) = e^s$, con cambio inverso $s = s(t) = \ln(t)$. Entonces la ecuación (13) se transforma en una ecuación lineal de coeficientes constantes.
- Para efectuar el cambio, escribimos $x(t) = x(s(t))$ y derivamos dos veces.
  - $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{1}{t}$;
  - $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{ds}\frac{1}{t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{ds}\right)\frac{1}{t} + \frac{dx}{ds}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{d^2x}{ds^2}\left(\frac{1}{t}\right)^2 - \frac{dx}{ds}\frac{1}{t^2}$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 7.1

Sea la ecuación $t^2x''(t) - 3tx'(t) + 4x(t) = 0.$

- Introduciendo el cambio $t = t(s) = e^s$ en la ecuación original, tenemos

$$t^2\left(\frac{d^2x}{ds^2}\frac{1}{t^2} - \frac{dx}{ds}\frac{1}{t^2}\right) - 3t\left(\frac{dx}{ds}\frac{1}{t}\right) + 4x = 0 \Rightarrow$$

$$x''(s) - 4x'(s) + 4x(s) = 0.$$

- Un sistema fundamental de la ecuación (en la variable s) de coeficientes constantes es $\left\{e^{2s}, se^{2s}\right\}$.
- Deshaciendo el cambio de variable, un sistema fundamental de la ecuación original viene dado por $\left\{t^2, t^2\ln(t)\right\}$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- R. Ortega. "Apuntes de Métodos matemáticos de la Física IV, Tema 2". http://www.ugr.es/~rortega/PDFs/Lec2.pdf.
- R. Ortega. "Apuntes de Métodos matemáticos de la Física IV, Tema 5". http://www.ugr.es/~rortega/PDFs/Lec5.pdf.
- R. Ortega. "Apuntes de Métodos matemáticos de la Física IV, Tema 6". http://www.ugr.es/~rortega/PDFs/Lec6.pdf.
- G.F. Simmons. "Ecuaciones diferenciales. Con aplicaciones y notas históricas (Segunda edición)". McGraw-Hill, 2002.
- D.G. Zill. "Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado (Novena edición)". Cengage Learning, 2009.

Apuntes de clase elaborados por Aureliano M. Robles Pérez.