UNIVERSIDAD
DE GRANADA

**Departamento de
Matemática Aplicada**

Tema 6
Cónicas y cuádricas

"Matemática Aplicada"
Ingeniería Civil - Administración y Dirección de Empresas

25 de abril de 2022

Índice

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Conceptos de curva y superficie.

- Curvas (en el plano y el espacio) en forma explícita, forma paramétrica y forma implícita:

  https://www.ugr.es/~rpaya/documentos/Teleco/Fund-Mat03.pdf

  (Secciones 3.1 y 3.4)

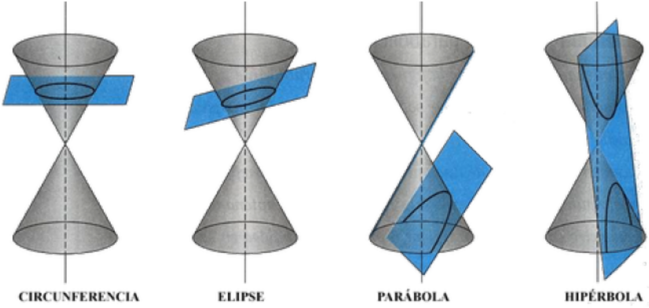
- Superficies (en el espacio) en forma explícita, forma paramétrica y forma implícita:

  https://www.ugr.es/~rpaya/documentos/Teleco/Fund-Mat07.pdf

  (Secciones 7.1, 7.2 y 7.3)

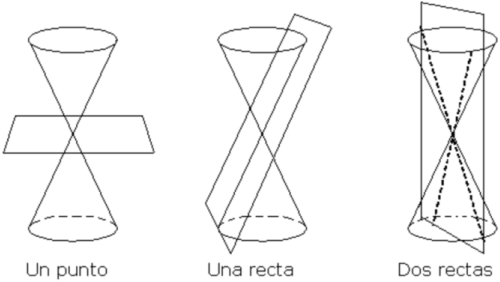
UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Las *secciones cónicas* son las curvas que se obtienen al cortar un cono circular recto con un plano.



Se obtiene una *circunferencia* si el plano es perpendicular al eje del cono, una *elipse* si el ángulo generatriz-eje es menor que el ángulo plano-eje, una *parábola* si ambos ángulos son iguales y una *hipérbola* si el ángulo generatriz-eje es mayor que el ángulo plano-eje.

Cuando el plano pasa por el vértice, en los casos anteriores se obtiene un punto, una recta doble o dos rectas secantes, respectivamente. Son *cónicas degeneradas*.



UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 3.1

Dados dos puntos distintos F_1 y F_2, que denominaremos focos, y una constante $2a$ mayor que la distancia entre los focos, se llama *elipse* de focos F_1 y F_2 y constante $2a$ al lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a F_1 y F_2 es $2a$. Un punto P de tal elipse cumplirá la igualdad

$$\mathrm{d}\left(P, F_1\right) + \mathrm{d}\left(P, F_2\right) = 2a.$$

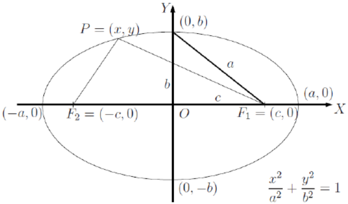
De la misma manera que en un espacio afín euclídeo es posible determinar la ecuación implícita de una variedad afín lineal una vez fijado un sistema de referencia, en el caso de las secciones cónicas se persigue el mismo objetivo, para lo que será necesario elegir un sistema de referencia rectangular (su base asociada es ortonormal).

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- Para la elipse tomaremos como sistema de referencia el formado de la siguiente manera.
  - Como origen de coordenadas el punto medio de los focos.
  - Como eje de abscisas la recta determinada por ellos.
  - Como eje de ordenadas una recta que pase por el origen y sea perpendicular al eje de abscisas.
- En este sistema de referencia tenemos que
  - $F_1 = (c, 0)^T$ y $F_2 = (-c, 0)^T$;
  - la constante $2a$ es mayor que la distancia entre los focos, que es igual a $2c$, por lo que $a > c$;
  - si $P = (x, y)^T$ es un punto de la elipse entonces

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a.$$

- Tras desarrollar y simplificar, se obtiene la ecuación
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$
donde $b^2 = a^2 - c^2$. Esta es la *ecuación reducida de la elipse*.



Los valores a y b se denominan *semieje mayor* y *semieje menor*.

- Si $F_1 = F_2$, entonces $c = 0$, por lo que $a = b$, quedando la ecuación
$$x^2 + y^2 = a^2.$$
Esto es, la elipse se reduce a la circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio a.

Definición 3.2

Dada una recta r y un punto $F \notin r$, se llama parábola de *foco* F y *directriz* r al lugar geométrico de los puntos P del plano (determinado por la directriz y el foco) que equidistan de r y F. Esto es, los puntos P que verifican la igualdad

$$\mathrm{d}\left(P, r\right) = \mathrm{d}\left(P, F\right).$$

- Vamos a determinar la ecuación cartesiana de la parábola indicada respecto de un sistema rectangular adecuado.
  - Tomaremos como eje de abscisas la recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz.
  - El origen de coordenadas será el punto equidistante de F y r.
  - El eje de ordenadas es la recta que pasa por el origen y es paralela a la directriz.

- En este sistema de referencia rectangular, tenemos que
  - ⋆ $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)^T$, para un cierto valor positivo p;
  - ⋆ la ecuación de la directriz tendrá la forma $x = -\frac{p}{2}$;
  - ⋆ un punto de la parábola $P = (x, y)^T$ cumplirá que

$$\left|x + \frac{p}{2}\right| = \mathrm{d}\left(P, r\right) = \mathrm{d}\left(P, F\right) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y-0)^2}.$$

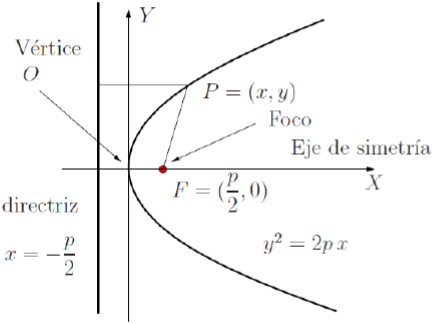
- Tras desarrollar y simplificar se llega a

$$y^2 = 2px.$$

Esta es la *ecuación reducida de la parábola* (siendo el parámetro p la distancia entre el foco y la directriz).

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- En la siguiente figura tenemos los elementos de la parábola.



UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 3.3

Dados dos puntos distintos, F_1 y F_2, denominados *focos*, y una constante positiva $2a$ (menor que la distancia entre los focos), se llama *hipérbola* de focos F_1 y F_2 y constante $2a$, al lugar geométrico de los puntos P cuya diferencia de distancias a F_1 y F_2 es $2a$. Esto es, los puntos P que satisfacen

$$|\,\mathrm{d}\,(P, F_1) - \mathrm{d}\,(P, F_2)\,| = 2a.$$

- Vamos a determinar la ecuación cartesiana de la hipérbola indicada respecto de un sistema rectangular adecuado.
  - Tomamos como origen de coordenadas el punto medio de los focos.
  - Como eje abscisas la recta que pasa por los focos.
  - Como eje de ordenadas una perpendicular al eje de abscisas que pasa por el origen.

- En el sistema de referencia elegido
  - los focos tienen coordenadas $F_1 = (c, 0)^T$ y $F_2 = (-c, 0)^T$;
  - un punto $P = (x, y)^T$ de la hipérbola cumple la ecuación

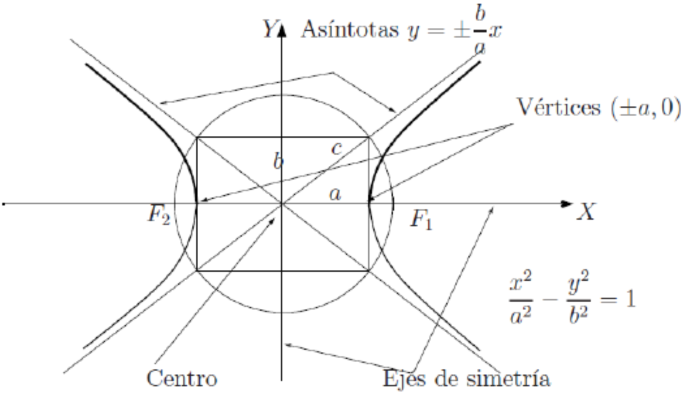
$$\left| \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} \right| = 2a.$$

- Desarrollando y simplificando,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ donde } b^2 = c^2 - a^2.$$

Esta es la *ecuación reducida de la hipérbola*.

- Los elementos de la hipérbola aparecen en la siguiente figura.



UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Lo visto hasta aquí muestra que, elegido un sistema de referencia adecuado, cada una de las cónicas no degeneradas tiene asociada una *ecuación reducida*.

Es decir, a cada cónica no degenerada le corresponde una *ecuación cuadrática en dos variables* que adopta la expresión más simple posible.

A continuación veremos cómo pasar de la *ecuación general* (expresión que puede ser complicada) de una cónica cualquiera a la *ecuación reducida* (expresión que, en cierto modo, será simple) de dicha cónica.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 4.1

Llamaremos cónica al conjunto de puntos del plano euclídeo cuyas coordenadas $(x, y)^T$ respecto de un sistema rectangular $\mathcal{R}$ satisfacen una ecuación (general) de segundo orden del tipo

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0.$$

Matricialmente, podemos escribir la ecuación de la cónica como tres sumandos,

$$(x \;\; y)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\,(a_{01} \;\; a_{02})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{00} = 0.$$

Si

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A_{00} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \ell = \begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \end{pmatrix},$$

entonces tenemos la ecuación matricial

$$X^T A_{00} X + 2\ell^T X + a_{00} = 0.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- El objetivo es conseguir un sistema de referencia rectangular $\mathcal{R}'$ en el que la ecuación de la cónica adopte su expresión más simple.

  Tal objetivo se logrará mediante un giro y una traslación del sistema de referencia de partida.

- Empezamos realizando el giro del sistema de referencia sobre el origen de coordenadas inicial.
  - Las coordenadas $(x, y)^T$ respecto de $\mathcal{R}$ y las coordenadas $(x', y')^T$ respecto de $\mathcal{R}'$ cumplen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

    con

$$G = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- Realizando el cambio de sistema de referencia en la ecuación matricial de la cónica, se tiene que la ecuación, respecto del sistema de referencia $\mathcal{R}'$, es

$$(X')^T \left(G^T A_{00} G\right)(X') + 2\left(G^T \ell\right)^T X' + a_{00} = 0,$$

siendo $X' = (x', y')^T$.

- Podemos tomar G (el ángulo α) tal que $G^T A_{00} G$ sea diagonal. Para ello, al ser A_{00} simétrica entonces se puede diagonalizar ortogonalmente, esto es, existe P ortogonal tal que

$$P^T A_{00} P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

donde P se forma con los vectores propios normalizados de λ_1 y λ_2, tomándolos por columnas.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- Si utilizamos P en la ecuación anterior nos queda

$$(x' \;\; y') \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2 \left(P^T \ell\right) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + a_{00} = 0.$$

- Desarrollando, y llamando $P^T \ell := (b_1 \;\; b_2)$, tenemos

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + 2(b_1 \;\; b_2) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + a_{00} = 0.$$

- Queda así la ecuación

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + a_{00} = 0.$$

Esta es la ecuación de la cónica en el sistema de referencia $\mathcal{R}' = \{O; \{v_1, v_2\}\}$, donde v_1 y v_2 son los vectores propios normalizados.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- Tras el segundo cambio de sistema de referencia, que se llevará a cabo mediante una traslación, llegaremos a la ecuación reducida.
  - Las coordenadas de los puntos de la cónica en ambos sistemas de referencia $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}_{\mathcal{R}''}$ y $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}$ satisfacen una relación del tipo
  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix},$$
  donde $O' = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ son las coordenadas del origen de coordenadas de $\mathcal{R}''$ en $\mathcal{R}'$.
  - Para determinar $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ seguiremos el procedimiento descrito a continuación.

- Sustituyendo $x' = c_1 + x''$ e $y' = c_2 + y''$ en la ecuación de la cónica,

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + 2b_1x' + 2b_2y' + a_{00} = 0,$$

los elementos del punto

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

se eligen, de existir, de manera que la ecuación resultante no contenga términos lineales (términos en x e y).

- Si c existe, el correspondiente punto se denomina *centro de la cónica* en los casos de elipses e hipérbolas.

- Un procedimiento análogo permite determinar el *vértice* en las parábolas. En este caso, se elimina el término lineal en la variable que aparece elevada al cuadrado y, además, se elimina el término constante incorporándolo en la otra variable (esto es, la que no aparece elevada al cuadrado).

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 4.2

Halla la ecuación reducida de la cónica que, respecto del sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; B_C = \{e_1, e_2\}\}$ con $O = (0,0)$, $e_1 = (1,0)$ y $e_2 = (0,1)$, tiene por ecuación

$$x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 3y - 1 = 0.$$

- En primer lugar, se escribe la cónica como

$$(x \;\; y)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (-2 \;\; -3)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 1 = 0.$$

  Entonces

$$A_{00} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \ell = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad a_{00} = -1.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (4.2 cont.)

- Diagonalizamos ortogonalmente A_{00}. La ecuación característica de A_{00} es

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 - 4 = 0.$$

- Resolviéndola, resultan los valores propios $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -1$.
- Vector propio asociado a λ_1.

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \left\{ (x,y) \middle| \begin{pmatrix} 1-3 & 2 \\ 2 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ (x,y) \middle| \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \{(x,y) \mid -2x + 2y = 0\} = L\left(\{(1,1)\}\right). \end{aligned}$$

El espacio asociado a λ_1 está generado por el vector unitario

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1).$$

Ejemplo (4.2 cont.)

- Para el valor propio λ_2 los cálculos se realizan de igual manera.

$$V_{\lambda_2} = \left\{ (x,y) \middle| \begin{pmatrix} 1+1 & 2 \\ 2 & 1+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$
$$= \left\{ (x,y) \middle| \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$
$$= \{(x,y) \mid 2x + 2y = 0\} = L\left(\{(-1,1)\}\right).$$

El espacio asociado a λ_2 está generado por el vector unitario

$$n_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1).$$

- Una vez determinada una base ortonormal formada por vectores propios, realizamos el cambio de sistema de referencia

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (4.2 cont.)

- Sustituyendo en la ecuación,

$$(x \;\; y)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+(-2 \;\; -3)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}-1=0,$$

  obtenemos la ecuación de la cónica en el sistema de referencia $\mathcal{R}_1=\{O;B_1=\{n_1,n_2\}\}$. Concretamente,

$$(x_1 \;\; y_1)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}$$
$$+(-2 \;\; -3)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}-1=0.$$

- Simplificando, se cumple que

$$(x_1 \;\; y_1)\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}(-5 \;\; -1)\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}-1=0.$$

  Esto es, $3x_1^2-y_1^2-\frac{5}{\sqrt{2}}x_1-\frac{1}{\sqrt{2}}y_1-1=0.$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (4.2 cont.)

- Como los términos x_1 e y_1 tienen coeficientes no nulos, es necesario realizar una traslación para anularlos.

  Para esto podemos aplicar el proceso visto anteriormente o, alternativamente, completando cuadrados.

  - Primero consideramos los términos $3x_1^2 - \frac{5}{\sqrt{2}}x_1$.

$$
\begin{aligned}
3x_1^2 - \frac{5}{\sqrt{2}}x_1 &= 3\left(x_1^2 - \frac{5}{3\sqrt{2}}x_1\right) \\
&= 3\left(\left(x_1^2 - 2\frac{5}{6\sqrt{2}}x_1 + \frac{25}{6^2 2}\right) - \frac{25}{6^2 2}\right) \\
&= 3\left(x_1 - \frac{5}{6\sqrt{2}}\right)^2 - 3\frac{25}{6^2 2} = 3\left(x_1 - \frac{5}{6\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{25}{24}.
\end{aligned}
$$

  - Análogamente,

$$
y_1^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 = y_1^2 + 2\frac{1}{2\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \left(y_1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{8}.
$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (4.2 cont.)

- Por tanto, la cónica se puede escribir como

$$3\left(x_1 - \frac{5}{6\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{25}{24} - \left(y_1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{8} - 1 = 0,$$

  es decir

$$3\left(x_1 - \frac{5}{6\sqrt{2}}\right)^2 - \left(y_1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{23}{12} = 0,$$

- Ahora el cambio de variables

$$x_2 = x_1 - \frac{5}{6\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad y_2 = y_1 + \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

  que corresponde al cambio de sistema de referencia $\mathcal{R}_2 = \left\{ \left(\frac{5}{6\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)_{\mathcal{R}_1}; B_1 = \{n_1, n_2\} \right\}$, da lugar a la ecuación reducida

$$3x_2^2 - y_2^2 = \frac{23}{12}.$$

Ejemplo (4.2 cont.)

- Por tanto, tenemos la expresión equivalente

$$\frac{x_2^2}{\left(\frac{\sqrt{23}}{6}\right)^2} - \frac{y_2^2}{\left(\frac{\sqrt{23}}{\sqrt{12}}\right)^2} = 1.$$

- Así pues, se trata de una *hipérbola* de semiejes

$$a = \frac{\sqrt{23}}{6}, \quad b = \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{12}},$$

y con semidistancia focal

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{23}{36} + \frac{23}{12}} = \sqrt{\frac{23}{9}} = \frac{\sqrt{23}}{3}.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

En el siguiente ejemplo veremos cómo calcular los elementos de la hipérbola a partir de su ecuación reducida.

Ejemplo 4.3

Halla la ecuación reducida de la cónica que, respecto del sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; B_C = \{e_1, e_2\}\}$ con $O = (0, 0)$, $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$, tiene por ecuación

$$x^2 + 10xy + y^2 - 14x - 22y + 24 = 0.$$

Además, determina sus elementos.

- En este caso tenemos

$$A_{00} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \ell = \begin{pmatrix} -7 \\ -11 \end{pmatrix}, \quad a_{00} = 24.$$

- Para diagonalizar ortogonalmente A_{00}, calculamos su polinomio característico.

$$\det(A_{00} - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 24.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (4.3 cont.)

- Los valores propios de A se obtienen resolviendo su ecuación característica.
$$\lambda^2 - 2\lambda - 24 = 0.$$
- Así, tenemos
$$\lambda_1 = 6 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -4.$$
- Los vectores propios asociados a λ_1 satisfacen el sistema
$$\begin{pmatrix} 1-6 & 5 \\ 5 & 1-6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
es decir, $-v_1 + v_2 = 0$.
- Por tanto, el subespacio de vectores propios asociado a λ_1 está generado por el vector unitario
$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1).$$

Ejemplo (4.3 cont.)

- Análogamente, los vectores propios asociados a λ_2 son soluciones del sistema
$$\begin{pmatrix} 1+4 & 5 \\ 5 & 1+4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
por lo que cumplen la condición $v_1 + v_2 = 0$.
- Entonces el subespacio de vectores propios asociados a λ_2 está generado por el vector unitario
$$n_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1).$$
- Efectuamos ahora el cambio de sistema de referencia (giro) dado por
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$
- Observemos que los vectores unitarios calculados son las columnas de la matriz del cambio de sistema de referencia $\mathcal{R}_1 = \{O; B_1 = \{n_1, n_2\}\}$ al sistema de referencia $\mathcal{R}$ original.

Ejemplo (4.3 cont.)

- La ecuación de la cónica escrita en el sistema $\mathcal{R}_1$ es

$$6x_1^2 - 4y_1^2 - 18\sqrt{2}x_1 - 4\sqrt{2}y_1 + 24 = 0.$$

- Ahora efectuamos un cambio de sistema de referencia, por medio de una traslación, para ver a qué punto (α, β) se debe trasladar el origen. Para ello tomamos

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 + \alpha, \\ y_1 &= y_2 + \beta. \end{aligned}$$

- Así, en el sistema de referencia $\mathcal{R}_2 = \{(\alpha, \beta)_{\mathcal{R}_1}; B_1 = \{n_1, n_2\}\}$, la ecuación de la cónica es

$$\begin{aligned} 0 = {} & 6x_2^2 - 4y_2^2 - 2\left(9\sqrt{2} - 6\alpha\right)x_2 - 2\left(2\sqrt{2} + 4\beta\right)y_2 \\ & - 2\left(-12 + 9\sqrt{2}\alpha - 3\alpha^2 + 2\sqrt{2}\beta + 2\beta^2\right). \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (4.3 cont.)

- Para que se anulen los términos en x_2 e y_2 es necesario que

$$9\sqrt{2} - 6\alpha = 0,$$
$$2\sqrt{2} + 4\beta = 0.$$

De donde,

$$\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{y} \quad \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- Con estos valores, la ecuación de la cónica queda como

$$6x_2^2 - 4y_2^2 - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x_2^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} - \frac{y_2^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1.$$

- Por tanto se trata de una hipérbola de semiejes $a = \frac{1}{\sqrt{6}}$ y $b = \frac{1}{2}$. Además, la semidistancia focal es

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{5}{12}} = \sqrt{\frac{15}{36}} = \frac{\sqrt{15}}{6}.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (4.3 cont.)

- En el sistema de referencia $\mathcal{R}_2$, los vértices de la hipérbola tienen coordenadas $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)^T$ y los focos $\left(\pm\frac{\sqrt{15}}{6}, 0\right)^T$.

  Las coordenadas en el sistema de referencia $\mathcal{R}$ se calcularán teniendo en cuenta que
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} + x_2 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} + y_2 \end{pmatrix}.$$

  Haciendo cálculos, en el sistema de referencia $\mathcal{R}$

  - los vértices tienen coordenadas $\left(\frac{12\pm\sqrt{3}}{6}, \frac{6\pm\sqrt{3}}{6}\right)^T$;
  - los focos son $\left(\frac{24\pm\sqrt{30}}{12}, \frac{12\pm\sqrt{30}}{12}\right)^T$.

Ejemplo (4.3 cont.)

- Los ejes de la hipérbola tienen ecuaciones $x_2 = 0$ e $y_2 = 0$ en el sistema de referencia $\mathcal{R}_2$.

  Teniendo en cuenta que (obsérvese que $G^{-1} = G^T$)

$$\begin{pmatrix} \alpha + x_2 \\ \beta + y_2 \end{pmatrix} = G^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

  se deduce que

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = G^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

  Por tanto, las ecuaciones de los ejes en el sistema de referencia $\mathcal{R}$ son

$$\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{3\sqrt{2}}{2} = 0, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

  es decir, $x + y - 3 = 0$, $x - y - 1 = 0$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (4.3 cont.)

- Las ecuaciones de las asíntotas en el sistema de referencia $\mathcal{R}_2$ son $y_2 = \pm\frac{b}{a}x_2$.

  Entonces, debido a la relación entre $(x_2, y_2)^T$ y $(x, y)^T$, se cumple que

$$\frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} = \pm\frac{1/2}{1/\sqrt{6}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$$

  Y, tras simplificar, llegamos a la expresión

$$y - x + 1 = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}\left(x + y - 3\right).$$

  Así, las ecuaciones de las asíntotas en el sistema de referencia $\mathcal{R}$ son

$$(\sqrt{6}+2)x + (\sqrt{6}-2)y = 3\sqrt{6}+2,$$

$$(\sqrt{6}-2)x + (\sqrt{6}+2)y = 3\sqrt{6}-2.$$

Ejemplo 4.4

Sea la cónica que, en el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; \{e_1, e_2\}\}$ con $O = (0,0)$, $e_1 = (1,0)$ y $e_2 = (0,1)$, tiene por ecuación

$$x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 6y + 1 = 0.$$

Calcula su ecuación reducida, dando los cambios de sistema de referencia que hay que hacer para llegar a ésta.

- La parte cuadrática proporciona la matriz
$$A_{00} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
- La ecuación característica de A, para calcular los valores propios, es
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda = 0.$$
- Por tanto los valores propios de A son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (4.4 cont.)

- Los vectores propios asociados a λ_1 cumplen la condición $x - y = 0$, por lo que están generados por el vector unitario $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$.
- El subespacio asociado a λ_2 está generado por $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)^T$.
- Ahora, si realizamos el cambio de sistema de referencia

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

la cónica adopta la expresión $2y_1^2 - \sqrt{2}x_1 - 5\sqrt{2}y_1 + 1 = 0$.
- En este caso sólo tenemos que completar cuadrados en y_1. Así,

$$2y_1^2 - 5\sqrt{2}y_1 = 2\left(y_1^2 - \frac{5\sqrt{2}}{2}y_1\right) = 2\left(\left(y_1 - \frac{5\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)^2\right) \Rightarrow$$

$$2\left(\left(y_1 - \frac{5\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)^2\right) - \sqrt{2}x_1 + 1 = 0 \Rightarrow$$

Ejemplo (4.4 cont.)

$$2\left(y_1-\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)^2-\sqrt{2}x_1-2\frac{50}{16}+1=0\Rightarrow 2\left(y_1-\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)^2-\sqrt{2}x_1-\frac{21}{4}=0\Rightarrow$$

$$\left(y_1-\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}x_1+\frac{21}{4}\right)\Rightarrow\left(y_1-\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x_1+\frac{21}{4\sqrt{2}}\right).$$

- Por tanto, el cambio de sistema de referencia dado por

$$x_2=x_1+\frac{21}{4\sqrt{2}},\quad y_2=y_1-\frac{5\sqrt{2}}{4},$$

conduce a la ecuación

$$y_2^2=\frac{\sqrt{2}}{2}x_2.$$

- Concluimos que la cónica es una parábola.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 4.5

Sea la cónica que, respecto del sistema de referencia $\mathcal{R}$ de los ejemplos anteriores, tiene la ecuación

$$x^2 + 2xy + 2y^2 - x + 2y = 0.$$

Halla el sistema de referencia con el que adopta su ecuación reducida y escribe dicha ecuación.

- Se tiene que

$$A_{00} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \ell = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_{00} = 0.$$

- Como

$$\det(A_{00} - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 1,$$

  la ecuación característica de A es $\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$.

  Por tanto, los valores propios de A son $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Ejemplo (4.5 cont.)

- Los subespacios de vectores propios asociados a λ_1 y a λ_2 están generados repectivamente por

$$v_1 = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1\right)^T \quad \text{y} \quad v_2 = \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1\right)^T.$$

  Normalizando, tenemos los vectores

$$n_1 = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{2\left(5-\sqrt{5}\right)}}, \frac{2}{\sqrt{2\left(5-\sqrt{5}\right)}}\right)^T \quad \text{y} \quad n_2 = \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}}, \frac{2}{\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}}\right)^T.$$

- Por tanto, efectuamos el cambio de sistema de referencia (giro) dado por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}} & -\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}} \\ \frac{2}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}} & \frac{2}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo (4.5 cont.)

- Así, en el sistema $\mathcal{R}_1 = \{O; B_1 = \{n_1, n_2\}\}$, la ecuación de la cónica es

$$\tfrac{1}{2}\left((3+\sqrt{5})\,x_1^2 + (3-\sqrt{5})\,y_1^2 + \sqrt{2(5-\sqrt{5})}\,x_1 + \sqrt{2(5+\sqrt{5})}\,y_1\right) = 0.$$

- Ahora, si efectuamos el cambio de sistema de referencia (traslación)

$$x_1 = x_2 + \alpha,$$
$$y_1 = y_2 + \beta,$$

tenemos que

$$\begin{aligned} 0 = \frac{1}{2}\Bigg[&(3+\sqrt{5})\,x_2^2 + (3-\sqrt{5})\,y_2^2 + \left(\sqrt{2(5-\sqrt{5})} + 2(3+\sqrt{5})\,\alpha\right)x_2 \\ &+ \left(\sqrt{2(5+\sqrt{5})} + 2(3-\sqrt{5})\,\beta\right)y_2 + \sqrt{2(5-\sqrt{5})}\,\alpha + (3+\sqrt{5})\,\alpha^2 \\ &+ \sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\beta + (3-\sqrt{5})\,\beta^2\Bigg]. \end{aligned}$$

Ejemplo (4.5 cont.)

- Como queremos que se anulen los términos en x_2 e y_2, necesitamos que

$$\sqrt{2(5-\sqrt{5})} + 2(3+\sqrt{5})\,\alpha = 0, \quad \sqrt{2(5+\sqrt{5})} + 2(3-\sqrt{5})\,\beta = 0.$$

- Entonces

$$\alpha = -\frac{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{2(3+\sqrt{5})} \quad \text{y} \quad \beta = -\frac{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{2(3-\sqrt{5})},$$

  de donde la ecuación de la cónica queda como

$$\frac{1}{2}\left((3+\sqrt{5})\,x_2^2 + (3-\sqrt{5})\,y_2^2 - 5\right) = 0 \Rightarrow$$

$$(3+\sqrt{5})\,x_2^2 + (3-\sqrt{5})\,y_2^2 = 5 \Rightarrow \frac{x_2^2}{\frac{5}{3+\sqrt{5}}} + \frac{y_2^2}{\frac{5}{3-\sqrt{5}}} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{x_2^2}{\left(\sqrt{\frac{5}{3+\sqrt{5}}}\right)^2} + \frac{y_2^2}{\left(\sqrt{\frac{5}{3-\sqrt{5}}}\right)^2} = 1.$$

Ejemplo (4.5 cont.)

- Concluimos que se trata de una elipse de semiejes

$$a = \sqrt{\frac{5}{3+\sqrt{5}}} \approx 0.977198 \quad \text{y} \quad b = \sqrt{\frac{5}{3-\sqrt{5}}} \approx 2.558336.$$

- Como $a < b$, el semieje mayor de la elipse está en el eje de ordenadas ($x_2 = 0$). Lo mismo ocurre con los focos de la elipse.

- La semidistancia focal es (teniendo en cuenta que los papeles de a y b están intercambiados)

$$c = \sqrt{b^2 - a^2} = \frac{\sqrt{10\sqrt{5}}}{2}.$$

Por tanto, en el sistema de referencia $\mathcal{R}_2 = \{(\alpha, \beta)_{\mathcal{R}_1}; B_1 = \{n_1, n_2\}\}$, los focos tienen coordenadas $\left(0, \pm\frac{\sqrt{10\sqrt{5}}}{2}\right)^T$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (4.5 cont.)

- A partir de los resultados obtenidos es fácil determinar los elementos de la elipse en el sistema de referencia original $\mathcal{R}$.

En el próximo ejemplo veremos cómo, aplicando una simetría conveniente, podemos hacer que el semieje mayor de la elipse aparezca en el eje de abscisas en una situación similar a la del ejemplo que acabamos de analizar.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 4.6

Clasifica la cónica de ecuación

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 - 6\sqrt{2}x - 10\sqrt{2}y + 10 = 0.$$

- En este caso

$$A_{00} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \ell = \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} \\ -5\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad a_{00} = 10.$$

- Diagonalizamos la parte cuadrática. Como

$$\det(A_{00} - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8.$$

  Por tanto, los valores propios son $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 2$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (4.6 cont.)

- Los vectores propios asociados a λ_1 cumplen que

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

  es decir, satisfacen la igualdad $v_1 = v_2$.

- Por tanto, una base del subespacio invariante asociado a λ_1 está dada por el vector $(1,1)^T$. Normalizando, tenemos el vector

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T.$$

- El subespacio invariante correspondiente a λ_2 está dado por las soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

  es decir, está formado por los vectores tales que $v_1 + v_2 = 0$.

Ejemplo (4.6 cont.)

- Concluimos que el subespacio asociado a λ_2 está generado por el vector unitario
$$n_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)^T.$$

- Efectuando el cambio de sistema de referencia (giro) dado por
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$
la ecuación resultante es
$$4x_1^2 + 2y_1^2 - 16x_1 - 4y_1 + 10 = 0,$$
es decir,
$$4\left(x_1^2 - 4x_1\right) + 2\left(y_1^2 - 2y_1\right) + 10 = 0.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (4.6 cont.)

- Ahora bien, como

$$x_1^2 - 4x_1 = (x_1 - 2)^2 - 4, \quad y_1^2 - 2y_1 = (y_1 - 1)^2 - 1,$$

se cumple que

$$4(x_1 - 2)^2 - 16 + 2(y_1 - 1)^2 - 2 + 10 = 0.$$

- En definitiva, en el sistema de referencia $\mathcal{R}_1 = \{O; B_1 = \{n_1, n_2\}\}$, tenemos la expresión

$$4(x_1 - 2)^2 + 2(y_1 - 1)^2 = 8.$$

- El cambio de sistema de referencia de ecuaciones (traslación)

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - 2, \\ y_2 &= y_1 - 1, \end{aligned}$$

da lugar a la expresión

$$4x_2^2 + 2y_2^2 = 8.$$

Ejemplo (4.6 cont.)

- Así, tomando $\mathcal{R}_2 = \{(2,1)_{\mathcal{R}_1}; B_1\{n_1, n_2\}\}$, la cónica está dada por

$$\frac{x_2^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y_2^2}{2^2} = 1.$$

- Como $a = \sqrt{2}$ es menor que $b = 2$, los focos no se encuentran en el eje $x_2 = 0$. Haciendo el cambio de ecuaciones (simetría)

$$x_3 = y_2,$$
$$y_3 = x_2,$$

  la ecuación pasa a ser

$$\frac{x_3^2}{2^2} + \frac{y_3^2}{(\sqrt{2})^2} = 1.$$

- O sea, se trata de una elipse de semiejes 2 y $\sqrt{2}$.

Ejemplo (4.6 cont.)

- En el sistema de referencia $\mathcal{R}_3 = \{(2,1)_{\mathcal{R}_1}; B_3 = \{n_2, n_1\}\}$ tenemos que
  - los vértices son $(\pm 2, 0)^T$ y $\left(0, \pm\sqrt{2}\right)^T$;
  - la semidistancia focal es $c = \sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$;
  - los focos tienen coordenadas $(\pm\sqrt{2}, 0)^T$.
- A partir de estos resultados es fácil determinar los elementos de la cónica en el sistema de referencia original $\mathcal{R}$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Resultado 5.1

El procedimiento general detallado en la sección anterior permite encontrar un sistema de referencia respecto del que la cónica adopta su forma reducida.

1. *Una primera posibilidad es que la ecuación reducida sea*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \begin{cases} 1, \\ 0, \\ -1, \end{cases}$$

siendo $(x, y)^T$ las coordenadas en el sistema de referencia calculado.

1a) *En el primer caso, se trataría de una elipse.*

1b) *En el segundo, la cónica degenera en un par de rectas imaginarias, puesto que*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} + i\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - i\frac{y}{b}\right) = 0 \Leftrightarrow iy = \pm\frac{b}{a}x \Leftrightarrow y = \mp i\frac{b}{a}x.$$

- ⋆ *Nótese que las dos rectas se cortan en el origen, pues los únicos valores reales que cumplen la ecuación son $x = 0$ e $y = 0$.*

1c) *En el tercer caso, es una elipse imaginaria.*

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Resultado (5.1 cont.)

2. *Una segunda posibilidad es que la ecuación reducida sea*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \begin{cases} \pm 1, \\ 0, \end{cases}$$

siendo $(x, y)^T$ *las coordenadas en el sistema de referencia calculado.*

   2a) *En el primer caso, se trataría de una hipérbola.*

   2b) *En el segundo, la cónica degenera en un par de rectas reales, puesto que*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0 \Leftrightarrow y = \pm\frac{b}{a}x.$$

3. *Una tercera posibilidad es que la cónica reducida sea de la forma*

$$y^2 + bx = 0,$$

con $b \neq 0$. *Se trata de una parábola cuyo eje es la recta* $y = 0$.

Resultado (5.1 cont.)

4. *La última posibilidad es que la ecuación reducida sea de la forma*

$$y^2 + c = 0.$$

4a) *Si* $c < 0$, *entonces se trata de un par de rectas paralelas:* $y = \pm\sqrt{c}$.

4b) *Si* $c = 0$, *la cónica es un par de rectas coincidentes:* $y = 0$.

4c) *Si* $c > 0$, *entonces son dos rectas imaginarias:* $y = \pm i\sqrt{c}$.