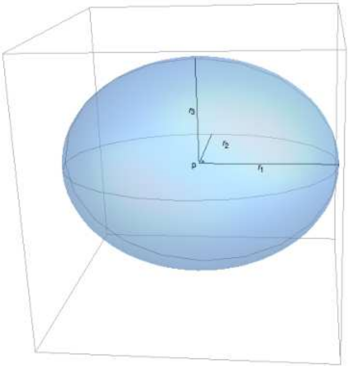
Tema 6
Cónicas y cuádricas.

Departamento de Matemática Aplicada

Matemática Aplicada
E.T.S. de Ingeniería de Caminos, C. y P.

Damos las cuádricas Elipsoide real

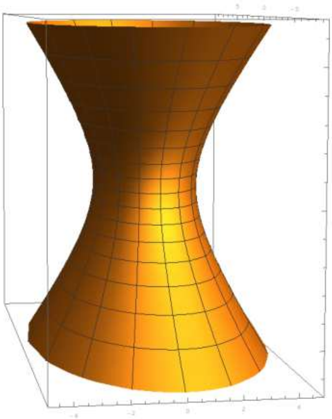
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



donde r_1, r_2 y r_3 de la figura, son a, b y c, respectivamente.

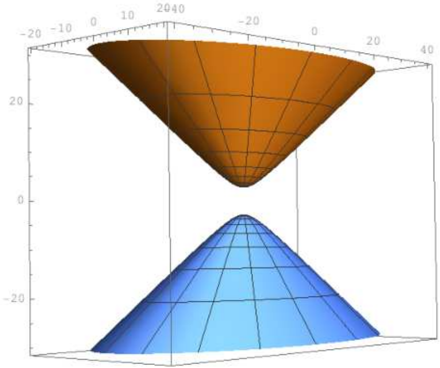
Hiperboloide de una hoja o hiperbólico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



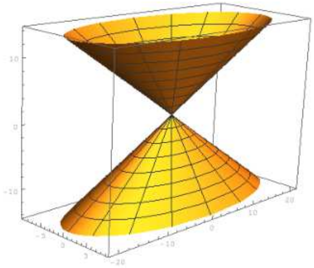
Hiperboloide de dos hojas o elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$



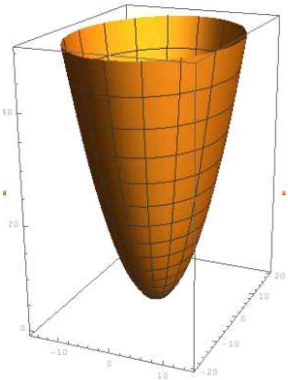
Cono elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$



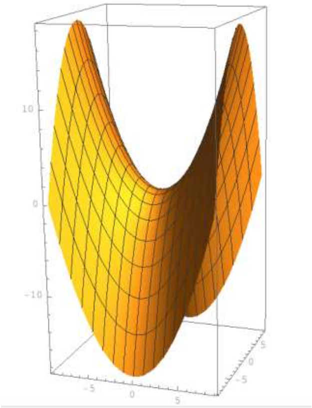
Paraboloide elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z.$$



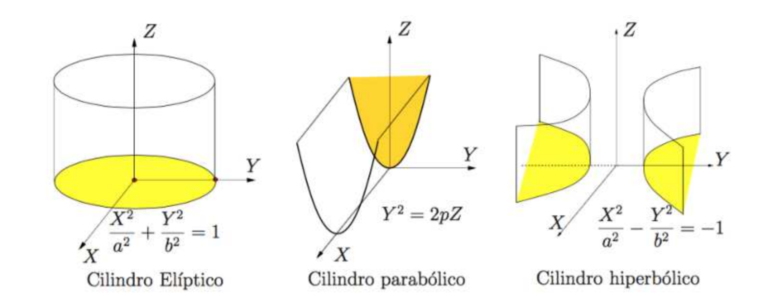
Paraboloide hiperbólico

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z.$$



Cilindros

Hay varios tipos de cilindros dependiendo de la cónica base



Definición 1

Llamaremos cuádrica al lugar geométrico del espacio euclídeo cuyas coordenadas respecto de un sistema de referencia rectangular satisfacen una ecuación del tipo

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{01}x + 2a_{02}y + 2a_{03}z + a_{00} = 0$$

con coeficientes a_{ij} reales, siendo $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ no todos nulos.

En forma matricial,

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2\,(a_{01}, a_{02}, a_{03}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + a_{00} = 0.$$

Si

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A_{00} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \ell = \begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \\ a_{03} \end{pmatrix},$$

entonces

$$\mathbf{x}^T A_{00}\mathbf{x} + 2\ell^T\mathbf{x} + a_{00} = 0.$$

Como en el caso de las cónicas, **el objetivo de lo que sigue es conseguir un sistema de referencia rectangular** $\mathcal{R}'$ del espacio afín euclídeo tridimensional respecto del cual la ecuación de la cuádrica adopte su expresión más simple.

Si se realiza un cambio de sistema de referencia entre sistemas rectangulares, las coordenadas $(x, y, z)^T$ respecto de $\mathcal{R}$ y $(x', y', z')^T$ respecto de $\mathcal{R}'$ se tiene la relación

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Donde Φ es la matriz de una transformación ortogonal.

Realizando el cambio de sistema de referencia, la ecuación de la cuádrica queda como

$$\mathbf{x}'^T \Phi^T A_{00} \Phi \mathbf{x}' + 2\ell^T \Phi \mathbf{x}' + a_{00} = 0,$$

Se puede elegir Φ de modo que $\Phi^T A_{00} \Phi$ sea una **matriz diagonal. La matriz Φ será la matriz P de los vectores propios asociados a los valores propios, ortonormalizados.**

Una vez calculados los λ_i y la matriz ortogonal P, sustituimos,

$$\mathbf{x}'^T P^T A_{00} P \mathbf{x}' + 2\ell^T P \mathbf{x}' + a_{00} = 0,$$

Desarrollando los productos

$$\mathbf{x}'^T P^T A_{00} P\mathbf{x}' + 2\ell^T P\mathbf{x}' + a_{00} = 0,$$

queda

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + 2b_3 z' + a_{00} = 0$$

Y, a igual que el caso de las cónicas, tenemos que completar cuadrados, para determinar la traslación que nos permite escribir la ecuación reducida.

$$\begin{aligned} x'' &= x' + c_1 \\ y'' &= y' + c_2 \\ z'' &= z' + c_3 \end{aligned}$$

Queda una ecuación del tipo

$$Ax''^2 + y''^2 + Cz''^2 + a_{00} = 0$$

Y, a igual que el caso de las cónicas, tenemos que completar cuadrados, para determinar la traslación que nos permite escribir la ecuación reducida.

$$\begin{aligned} x'' &= x' + c_1 \\ y'' &= y' + c_2 \\ z'' &= z' + c_3 \end{aligned}$$

Ecuación reducida de cuádrica

Cuando en la ecuación de la cuádrica no aparecen sumandos mixtos, la ecuación puede reducirse, sin más que completar cuadrados y términos lineales, a una ecuación en la que a lo sumo aparece un término en cada variable (y, posiblemente, un término independiente), es decir a uno de los siguientes tipos de ecuación:

$$\begin{aligned}
&ax^2 + by^2 + cz^2 + d = 0\\
&ax^2 + by^2 + cz = 0\\
&ax^2 + by + cz = 0\\
&ax^2 + by = 0\\
&ax^2 + c = 0
\end{aligned}$$

Dependiendo de los signos de los coeficientes involucrados tendremos superficies con diferentes elementos distintivos (planos, ejes y centros de simetría, vértices, cortes con planos paralelos a los planos coordenados,...).

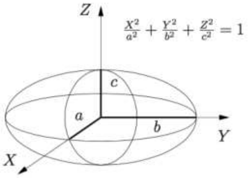
Ecuación reducida de cuádrica

La ecuación de cualquier cuádrica se puede reducir a uno de los tipos anteriores que se denomina ecuación reducida de la cuádrica correspondiente. A continuación estudiamos las diferentes cuádricas y sus elementos notables.

Los elipsoides

Los elipsoides se obtienen cuando, una vez completados cuadrados, nos quedan tres términos de segundo grado con coeficientes del mismo signo, es decir la ecuación típica es:

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=\begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}, \quad \text{siendo} \quad a,b,c\neq 0$$



Elipsoide

Se trata de una superficie que es simétrica respecto a cada uno de los planos coordenados.

Elipsoide

- Si un punto (X, Y, Z) pertenece a dicha superficie los puntos $(\pm X, \pm Y, \pm Z)$ también pertenecen.
- Sus planos de simetría son los planos OXY, OXZ y OYZ.
- Dicha superficie también es simétrica respecto a los ejes coordenados (rectas de corte de los planos de simetría) y respecto del origen de coordenadas (punto de corte de los tres planos de simetría).
- Si cortamos dicha superficie con un plano paralelo a alguno de los planos coordenados por ejemplo $Z = k$, obtenemos una elipse para ciertos valores de k, o un punto o nada.

Elementos caracteršticos de un elipsoide

- Centro de simetría, $(X = 0, Y = 0, Z = 0)$.
- Planos y Ejes de simetría: los coordenados.
- Vértices, puntos de corte del elipsoide con sus ejes de simetría, es decir, los puntos $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$.

Elementos característicos de un elipsoide

- Los semiejes a, b, c, distancias del centro a los vértices.
- Cuando los tres semiejes del elipsoide son iguales, $a = b = c$, tenemos una esfera
$$X^2 + Y^2 + Z^2 = a^2$$
con centro el origen de coordenadas $(X = 0, Y = 0, Z = 0)$ y radio $r = a$.

Casos degenerado e imaginario

Los otros dos casos que pueden aparecer cuando los tres coeficientes de los términos de segundo grado son (no nulos y) del mismo signo corresponden a situaciones geométricas que no se deben llamar elipsoides propiamente dichos.

- La ecuación
$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 0$$
tiene como única solución real $(X = 0, Y = 0, Z = 0)$.
- Es decir, la cuádrica se reduce a un único punto.

Casos degenerado e imaginario

La ecuación

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = -1$$

no tiene ninguna solución real, es decir, no representa a ninguna superficie del espacio real tridimensional.
Se le denomina elipsoide imaginario.

Los hiperboloides y el cono

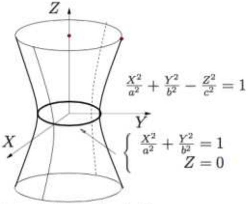
Los hiperboloides y el cono se obtienen cuando, una vez completados cuadrados, nos quedan tres términos de segundo grado con dos coeficientes del mismo signo (y el otro distinto), es decir la ecuación típica es:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right. , \quad \text{siendo} \quad a, b, c \neq 0$$

El hiperboloide hiperbólico (o de una hoja)

Una ecuación del tipo

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1$$



Hiperboloide hiperbólico

- Notemos que al cortar esta superficie con planos $Z = k$, paralelos al plano OXY, se obtienen elipses.
- Al cortar con planos $X = k$ ó $Y = k$, paralelos a los otros dos planos coordenados, se obtienen hipérbolas.

El hiperboloide hiperbólico (o de una hoja)

Elementos característicos son su centro y su eje. Si su ecuación es,

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

el centro es el origen de coordenadas$(X = 0, Y = 0, Z = 0)$ y el eje es $OZ \equiv \left\{ \begin{array}{l} X = 0 \\ Y = 0 \end{array} \right.$, que es un eje de simetría.

Al igual que el elipsoide, el hiperboloide de una hoja es simétrico respecto a los planos y ejes coordenados. Si un punto (X, Y, Z) verifica la ecuación, los puntos $(\pm X, \pm Y, \pm Z)$ también verifican dicha ecuación. Los cortes con los planos coordenados son

- con $Z = 0$, la elipse (llamada elipse de garganta) $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$.
- con $Y = 0$, la hipérbola $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Z^2}{c^2} = 1$.
- con $X = 0$, la hipérbola $\dfrac{Y^2}{b^2} - \dfrac{Z^2}{c^2} = 1$.

El hiperboloide hiperbólico (o de una hoja)

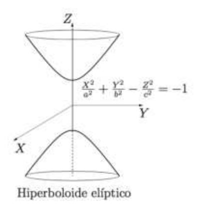
Es lo que se denomina una superficie reglada. Está fomada por rectas.

El hiperboloide elíptico (o de dos hojas)

Una ecuación del tipo

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = -1,$$

corresponde a una superficie denominada hiperboloide elíptico o de dos hojas.



- Notemos que al cortar esta superficie con planos $Z = k$, paralelos al plano OXY, se obtienen elipses (o un punto o nada). $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1 - \frac{k^2}{c^2}$
- Si $X = k$, los planos paralelos al plano OYZ, se obtienen hipérbolas $\frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = -1 - \frac{k^2}{a^2}$
- $Y = k$, paralelos al plano OXZ, se obtienen hipérbolas $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Z^2}{c^2} = -1 - \frac{k^2}{b^2}$

Elementos característicos del hiperboloide elíptico

Si la ecuación es

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = -1,$$

- El centro es el origen de coordenadas ($X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$).
- El eje de la cónica es el eje

$$OZ \equiv \begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \end{cases}$$

- Teniendo en cuenta la ecuación considerada, el hiperboloide de dos hojas es simétrico respecto a los planos y ejes coordenados.

El cono

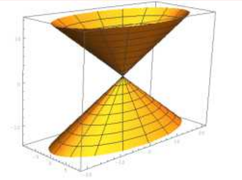
Una ecuación del tipo

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0$$

corresponde a una superficie denominada cono.

- Se puede considerar como un caso límite de los dos tipos de hiperboloides que acabamos de ver.
- Sin más que despejar, podemos escribir la ecuación anterior de la forma

$$\frac{Z^2}{c^2} = \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} \quad A, B \neq 0.$$



El cono

- Al cortar esta superficie con planos $Z = k$ paralelos al plano OXY se obtienen elipses.
- En el caso $k = 0$ que obtenemos un único punto.
- Al cortar con planos paralelos a los otros dos planos coordenados se obtienen hipérbolas.
- Al cortar con planos que pasan por el origen de coordenadas pueden obtenerse: una pareja de rectas que se cortan, una recta doble o un único punto.

Elementos característicos del cono

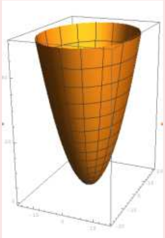
- Su vértice, en los casos considerados es el origen de coordenadas $(0, 0, 0)$,
- Su eje, que en los casos considerados es el eje $OZ \equiv X = Y = 0$

Los paraboloides

Los paraboloides se obtienen cuando en la ecuación reducida aparecen dos términos de segundo grado y un término de primer grado.

- Para fijar ideas, supongamos que la variable Z es la que no aparece elevada al cuadrado.
- La ecuación se podrá expresar de una de las dos formas siguientes:
  $Z = \pm\left(\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2}\right)$ (Paraboloide elíptico) ó
  $Z = \pm\left(\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2}\right)$ (Paraboloide hiperbólico) $a, b \neq 0$ en ambos casos.

Paraboloide elíptico



Los paraboloides elípticos

Si tenemos la ecuación de paraboloide elíptico, y tomamos la Z positiva

$$Z = \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} \text{ con } a, b \neq 0.$$

Al cortarlo con planos paralelos a los ejes, obtenemos distintas figuras

- Con el plano $X = k$, las parábolas dadas por $Z - \dfrac{k^2}{a^2} = \dfrac{Y^2}{b^2}$.
- Con el plano $Y = k$, las parábolas dadas por $Z - \dfrac{k^2}{b^2} = \dfrac{X^2}{a^2}$.
- Con el plano $Z = k$, las elipses dadas por $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = k$, o un punto o nada.

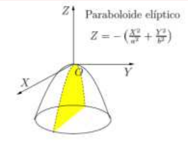
Elementos característicos de una paraboloide elíptico $Z = \dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2}$ son: su vértice es el origen de coordenadas $(0, 0, 0)$. Su eje es $OZ \equiv \begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \end{cases}$

Paraboloide elíptico

Si tenemos la ecuación

$$Z = -\left(\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2}\right) \text{ con } a, b \neq 0.$$

correponde un paraboloide elipítico con Z negativo.

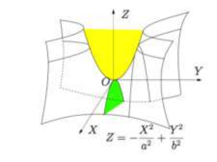


Su estudio se hace igual al caso $Z = \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2}$ descrito anteriormente.

Paraboloide hiperbólico

Un ecuación del tipo

$$Z = -\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2}, \quad a, b \neq 0,$$



Paraboloide hiperbólico

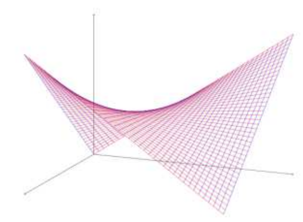
corresponde a una superficie, denominada paraboloide hiperbólico, que se asemeja a una silla de montar. Al cortarlo con planos paralelos a los ejes, obtenemos distintas figuras

- Con el plano $X = k$, las parábolas dadas por $Z + \frac{k^2}{a^2} = \frac{Y^2}{b^2}$.
- Con el plano $Y = k$, las parábolas dadas por $\frac{X^2}{a^2} = -\left(Z + \frac{k^2}{b^2}\right)$.
- Con el plano $Z = k$, con $k \neq 0$ las hipérbolas dadas por $-\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = k$.

Paraboloide hiperbólico

Elementos característicos de una paraboloide hiperbólico $Z = \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2}$ son:

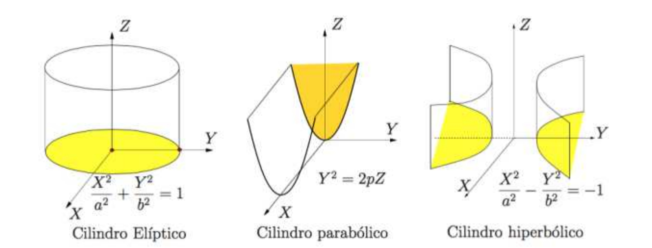
- Si se interseca con el plano $Z = 0$, resulta una hipérbola, cuya hojas se cortan en el vértice.
- El paraboloide hiperbólico considerado es simétrico respecto a dos de los planos coordenados, el plano OXZ (de ecuación $Y = 0$) y el OYZ (de ecuación) $X = 0$, por lo que tambien es simétrico respecto al eje intersección de ambos, es decir, el eje OZ.
  La superficie dada por una paraboloide hiperbólico, o silla de montar, es una cuádrica reglada.



Los cilindros y las cuádricas degeneradas.

Las cuádricas de tipo cilíndrico corresponden a los casos restantes, es decir, en sus ecuaciones no aparecen algunas de las variables.

- Son de tipo elíptico, parabólico o hiperbólico.



Cilindro elíptico

Su ecuación reducida tiene cuadrados de dos variables con coeficientes del mismo signo, no apareciendo la tercera de ellas.

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$$

- $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$. Cilindro elíptico
- $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0$. Recta doble $\equiv X = Y = 0$.
- $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1$. Cilindro elíptico imaginario.

No hay puntos de $\mathbb{R}^3$ que verifique la ecuación.

Cilindro hiperbólico

Aparecen los cuadrados de dos variables con signo opuesto y no interviene la restante. Adopta, básicamente, la expresión

- $$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = \begin{cases} \pm 1, \\ 0. \end{cases}$$

  - $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = \pm 1$ Cilindro hiperbólico.
  - $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 0.$ Par de planos secantes.

$$\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{X}{a} - \frac{Y}{b} = 0$$

Cilindro parabólico

Aparece el cuadrado de una única variable:

$$Y^2 = aX + bY + c.$$

- Cilindro parabólico: a ó b distintos de cero.
  Por ejemplo $Y^2 = 2pZ, \quad p \neq 0$.
- Par de planos paralelos: $Y^2 = c > 0 \Rightarrow Y = \pm\sqrt{c}$.
- Plano doble: $Y^2 = 0$.
- No hay puntos : $Y^2 = c < 0$.

Nota:
Todos los casos en que la ecuación de segundo grado representa planos (secantes, paralelos o coincidentes), rectas, puntos o nada, se suelen denominar **casos degenerados.**