UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de Matemática Aplicada

Tema 5
Espacio afín y espacio afín euclídeo. Isometrías afines (Movimientos rígidos)

"Matemática Aplicada"

Ingeniería Civil - Administración y Dirección de Empresas

13 de abril de 2023

Índice

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Índice (cont.)

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 1.1

- Sea V un espacio vectorial real y denotemos sus elementos por u, v, ... (en ocasiones por $\vec{u}$, $\vec{v}$, ...).
- Sea $\mathcal{A}$ un conjunto no vacío cuyos elementos denominaremos *puntos* y que denotaremos por letras mayúsculas P, Q, R, ...
- Decimos que $\mathcal{A}$ es un *espacio afín sobre* V si existe una aplicación
$$\phi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$$
tal que a cada par ordenado de puntos $(P, Q) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ le hace corresponder un vector $\phi(P, Q) \in V$ (denotado por $\overrightarrow{PQ}$) de forma que se satisfacen las siguientes propiedades.
  1. Para cada punto $P \in \mathcal{A}$ y cada vector $\vec{v} \in V$, existe un único punto $Q \in \mathcal{A}$ tal que $\overrightarrow{PQ} = \vec{v}$.
  2. Para cualesquiera puntos $P, Q, R \in \mathcal{A}$, se verifica la igualdad $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Observación 1.2

El espacio afín se denotará por $(\mathcal{A}, V, \phi)$, aunque habitualmente se omitirá la referencia a la aplicación ϕ e, incluso, a V.

Resultado 1.3

Sea $(\mathcal{A}, V, \phi)$ un espacio afín. Entonces se verifican las siguientes propiedades.

1. $\overrightarrow{PP} = \overrightarrow{O_V}$.
2. *Si* $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{O_V}$ *entonces* $P = Q$.
3. $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$ *para cualesquiera* $P, Q \in \mathcal{A}$.
4. *Si* $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$ *entonces* $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$ *para cualesquiera* $P, P', Q, Q' \in \mathcal{A}$ *(regla del paralelogramo).*
5. $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{O_V}$ *(relación de Chasles).*

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 1.4

Supongamos que $\mathcal{A} = \mathbb{R}^n$ y que $V = \mathbb{R}^n$. Si $P, Q \in \mathcal{A}$ están dados por $P = (p_1, \ldots, p_n)$ y $Q = (q_1, \ldots, q_n)$, definimos la aplicación ϕ por

$$\phi(P, Q) = (q_1 - p_1, \ldots, q_n - p_n).$$

Es fácil comprobar que $(\mathcal{A}, V, \phi)$ es un espacio afín (el llamado *espacio afín usual*) y que se cumplen las propiedades de Resultado 1.3.

Definición 1.5

Se define la *dimensión del espacio afín* $\mathcal{A}$ como la dimensión del espacio vectorial V.

Ejemplo 1.6

La dimensión del espacio afín del Ejemplo1.4 es n, ya que su espacio vectorial subyacente, $\mathbb{R}^n$, es n dimensional.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 1.7

Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín sobre V de dimensión n. Un *sistema de referencia afín* en $\mathcal{A}$ es un conjunto de la forma $\mathcal{R} = \{O; B\}$, donde $O \in \mathcal{A}$ (denominado *origen del sistema de referencia*) y $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ es una base de V.

Observación 1.8

- Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín, sobre el espacio vectorial V, con sistema de referencia afín $\mathcal{R} = \{O; B\}$, donde $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ es una base de V.
- Sea $P \in \mathcal{A}$. Como $\overrightarrow{OP} \in V$, entonces existen escalares $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\overrightarrow{OP} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 1.9

En las condiciones de Observación 1.8, diremos que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ son las *coordenadas de* P *respecto de* $\mathcal{R}$ y las denotaremos por $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T_{\mathcal{R}}$.

Ejemplo 1.10

En el espacio afín usual tridimensional, consideramos el sistema de referencia determinado por

* el origen $O = (1, 1, -1)$,
* base $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$.

Calculemos las coordenadas del punto $P = (5, 4, 3)$.

- Como
$$\overrightarrow{OP} = \phi(O, P) = (5, 4, 3) - (1, 1, -1) = (4, 3, 4),$$
tenemos que hallar las coordenadas de este vector respecto de B, es decir, los valores x_1, x_2, x_3 tales que
$$(4, 3, 4) = x_1(1, 1, 1) + x_2(1, 1, 0) + x_3(1, 0, 0).$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (1.10 cont.)

- Por tanto, tenemos que resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 &= 4 \end{aligned}\right\}.$$

- Ya que $(x_1, x_2, x_3) = (4, -1, 1)$ es la solución de dicho sistema, podemos concluir que las coordenadas (respecto del sistema de referencia $\{O; B\}$) del punto $P = (5, 4, 3)$ son $(4, -1, 1)^T$.

Ahora estamos interesados en determinar la relación existente entre las coordenadas de un punto de un espacio afín para dos sistemas de referencia de dicho espacio.

- Sea el espacio afín $\mathcal{A}$ con sistemas de referencia $\mathcal{R} = \{O; B\}$ y $\mathcal{R}' = \{O'; B'\}$, donde
$$B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \quad \text{y} \quad B' = \{e_1', e_2', \ldots, e_n'\}.$$
- Además, sea $P \in \mathcal{A}$ un punto cualquiera.
- Supongamos que, respecto de los sistemas de referencia $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$, se verifica que
$$\overrightarrow{OP} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n \quad \text{y} \quad \overrightarrow{O'P} = x_1' e_1' + x_2' e_2' + \cdots + x_n' e_n',$$
es decir, las coordenadas de P respecto de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ son
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T_{\mathcal{R}} \quad \text{y} \quad (x_1', x_2', \ldots, x_n')^T_{\mathcal{R}'},$$
respectivamente.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- El vector $\overrightarrow{O'O}$ puede expresarse en la base B', esto es, existen escalares $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tales que

$$\overrightarrow{O'O} = b_1 e'_1 + b_2 e'_2 + \cdots + b_n e'_n.$$

- Por otra parte, cada uno de los vectores e_i de la base B puede expresarse en la base B', es decir, para cada $i = 1, \ldots, n$ existen escalares $a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni}$ tales que

$$\begin{aligned} e_1 &= a_{11} e'_1 + a_{21} e'_2 + \cdots + a_{n1} e'_n, \\ e_2 &= a_{12} e'_1 + a_{22} e'_2 + \cdots + a_{n2} e'_n, \\ &\vdots \\ e_n &= a_{1n} e'_1 + a_{2n} e'_2 + \cdots + a_{nn} e'_n. \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- En consecuencia, teniendo en cuenta que

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP},$$

se cumple que

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{O'P} = {} & b_1 e_1' + b_2 e_2' + \cdots + b_n e_n' \\
& + x_1(a_{11} e_1' + a_{21} e_2' + \cdots + a_{n1} e_n') \\
& + x_2(a_{12} e_1' + a_{22} e_2' + \cdots + a_{n2} e_n') \\
& \vdots \\
& + x_n(a_{1n} e_1' + a_{2n} e_2' + \cdots + a_{nn} e_n') \\
= {} & (b_1 + a_{1,1}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)e_1' \\
& + (b_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n)e_2' \\
& \vdots \\
& + (b_n + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n)e_n'.
\end{aligned}$$

- Entonces, como las coordenadas de un punto respecto de un sistema de referencia son únicas, tenemos que

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= b_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' &= b_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\ \vdots \\ x_n' &= b_n + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

  Estas son las ecuaciones del cambio de coordenadas del sistema de referencia $\mathcal{R}$ al sistema de referencia $\mathcal{R}'$.

- En forma matricial, (1) viene dado por la expresión

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Observación 1.11

En la expresión (2),

- $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)^T$ son las coordenadas del vector $\overrightarrow{O'P}$ en la base B', es decir, son las coordenadas del punto P respecto del sistema de referencia $\mathcal{R}'$;
- $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ son las coordenadas del vector $\overrightarrow{OP}$ en la base B, es decir, son las coordenadas del punto P respecto del sistema de referencia $\mathcal{R}$;
- $(b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$ son las coordenadas del vector $\overrightarrow{O'O}$ en la base B', es decir, son las coordenadas del punto O respecto del sistema de referencia $\mathcal{R}'$;
- la columna i-ésima de la matriz está formada por las coordenadas del vector e_i en la base B', es decir, tenemos la matriz de cambio de base de B a B'.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Observación 1.12

Cuando $O = O'$, entonces (2) se reduce a la expresión

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Observación 1.13

Si $O \neq O'$ y $B = B'$, entonces (2) se reduce a la expresión

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

En este caso se dice que el sistema de referencia $\mathcal{R}'$ se ha obtenido por traslación del sistema $\mathcal{R}$ según el vector $\overrightarrow{O'O}$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 1.14

- En el espacio afín tridimensional usual consideramos los sistemas de referencia $\mathcal{R} = \{O; B\}$ y $\mathcal{R}' = \{O'; B'\}$, donde
  - las coordenadas de O' respecto de $\mathcal{R}$ son $(1,2,3)^T$,
  - las coordenadas de los vectores de la base B' respecto de B son $(-1,1,1)^T$, $(1,-2,1)^T$ y $(1,1,-3)^T$.

- Observemos que, en las ecuaciones del cambio de sistema de referencia, se precisan los valores a_{ij} dados por las coordenadas de los vectores de la base B respecto de la base B', es decir, se necesita la matriz $M_{BB'}$ de cambio de base de B a B'.

- A partir de los datos dados, es claro que

$$M_{BB'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ 2 & 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo (1.14 cont.)

- Para el cambio de sistema necesitamos las coordenadas del punto O respecto de $\mathcal{R}'$ (o sea, las coordenadas del vector $\overrightarrow{O'O}$ en la base B'). Sin embargo, por el enunciado del ejemplo, tenemos las coordenadas de O' respecto de $\mathcal{R}$ (o sea, las coordenadas del vector $\overrightarrow{OO'}$ en la base B). Ahora bien, teniendo en cuenta que $\overrightarrow{OO'} = (1,2,3)^T$ respecto de B y que $\overrightarrow{O'O} = -\overrightarrow{OO'}$, es claro que
$$\overrightarrow{O'O} = -\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ 2 & 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ (respecto de } B'\text{)}.$$
- En consecuencia, si las coordenadas de un punto X son $(x_1, x_2, x_3)^T$ respecto de $\mathcal{R}$ y $(x_1', x_2', x_3')^T$ respecto de $\mathcal{R}'$, entonces
$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ 2 & 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 1.15 (Variedad afín)

Sean $\mathcal{A}$ un espacio afín sobre el espacio vectorial V, $P \in \mathcal{A}$ y W un subespacio vectorial de V.
Se denomina *variedad afín de $\mathcal{A}$ asociada a W con base en el punto P* al conjunto

$$\mathcal{L} = \left\{ X \in \mathcal{A} \mid \overrightarrow{PX} \in W \right\},$$

que se denota por $\mathcal{L} = P + W$.

Ejemplo 1.16

En el espacio afín tridimensional usual, calculemos la variedad afín $\mathcal{L}$ que pasa por el punto $P = (1, -1, 1)$ con subespacio asociado

$$W = \left\{ (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3 \mid w_3 = w_1 + w_2 \right\}.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (1.16 cont.)

- Recordemos que la aplicación ϕ asociada al espacio afín tridimensional usual está dada por $\phi(P, Q) = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$ (siendo $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3)$).
- Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \left\{X \in \mathcal{A} \mid \overrightarrow{PX} \in W\right\} \\
&= \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_2, x_3) - (1, -1, 1) \in W\right\} \\
&= \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1 - 1, x_2 + 1, x_3 - 1) \in W\right\} \\
&= \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 - 1 = (x_1 - 1) + (x_2 + 1)\right\} \\
&= \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 - 1 = x_1 + x_2\right\} \\
&= \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = -1\right\}.
\end{aligned}$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Resultado 1.17

Sea la variedad afín $\mathcal{L} = \left\{X \in \mathcal{A} \mid \overrightarrow{PX} \in W\right\}$*. Si* $Q \in \mathcal{L}$*, entonces se verifica que* $\mathcal{L} = \left\{X \in \mathcal{A} \mid \overrightarrow{QX} \in W\right\}$*.*

En otras palabras, si $\mathcal{L} = P + W$ *y* $Q \in \mathcal{L}$*, entonces* $\mathcal{L} = Q + W$*.*

Observación 1.18

De Resultado 1.17 deducimos que la definición de variedad afín es independiente del punto base.

Definición 1.19

Se define la *dimensión de la variedad afín* $\mathcal{L} = P + W$ como la dimensión de W.

Ejemplo (1.16 cont.)

Es claro que $\dim W = 2$, por lo que $\dim \mathcal{L} = 2$. Por tanto, la variedad afín $\mathcal{L}$ es un plano.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Hay algunas variedades afines destacables.

1. Si $\mathcal{L} = P + W$ con $W = \{\vec{0}\}$, entonces $\mathcal{L}$ se reduce a un punto y $\dim \mathcal{L} = 0$. Las variedades afines de dimensión 0 son los puntos.
2. Si $\mathcal{L} = P + W$ con $W = L(\{\vec{u}\})$, $\vec{u} \neq \vec{0}$, entonces $\dim \mathcal{L} = 1$. Se trata de la *recta* que "pasa" por el punto P con dirección $\vec{u}$.
3. Si $\mathcal{L} = P + W$, donde una base de W es $B_W = \{\vec{u}, \vec{v}\}$, entonces $\dim \mathcal{L} = 2$. Se trata de un *plano* que "pasa" por el punto P con vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
4. Si $\mathcal{L} = P + W$ con $\dim W = n - 1$ y $\dim V = n$, entonces $\dim \mathcal{L} = n - 1$. Se trata de un *hiperplano* que "pasa" por el punto P con dirección dada por el subespacio vectorial definido por la base de W considerada.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Es posible asociar ecuaciones paramétricas e implícitas a las variedades afines.

1. Sea $(\mathcal{A}, V, \phi)$ un espacio afín de dimensión n.
2. Sea $\mathcal{L} = P + W$ la variedad afín que "pasa" por el punto $P \in \mathcal{A}$ con subespacio director W.
3. Sea $\mathcal{R} = \{O; B\}$ un sistema de referencia para $\mathcal{A}$ con $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.
4. Supongamos que $\dim W = r$, con $1 \leq r < n$, y que $\{u_1, \ldots, u_r\}$ es una base de W.

Si $X \in \mathcal{L}$ entonces existe un único vector $w \in W$ tal que $X = P + w$. Para dicho vector $\overrightarrow{PX}$ existirán escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ tales que

$$w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_r u_r.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Como B es base de V y W es un subespacio de V, cada vector u_i se puede expresar en la base B, por lo que existen escalares ω_{ij} tales que

$$\begin{aligned}
u_1 &= \omega_{11}e_1 + \omega_{21}e_2 + \cdots + \omega_{n1}e_n,\\
u_2 &= \omega_{12}e_1 + \omega_{22}e_2 + \cdots + \omega_{n2}e_n,\\
&\vdots\\
u_r &= \omega_{1r}e_1 + \omega_{2r}e_2 + \cdots + \omega_{nr}e_n.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
w = {} & \lambda_1(\omega_{11}e_1 + \omega_{21}e_2 + \cdots + \omega_{n,1}e_n)\\
& + \lambda_2(\omega_{12}e_1 + \omega_{22}e_2 + \cdots + \omega_{n2}e_n)\\
& \vdots\\
& + \lambda_r(\omega_{1r}e_1 + \omega_{2r}e_2 + \cdots + \omega_{nr}e_n)\\
= {} & (\omega_{11}\lambda_1 + \omega_{12}\lambda_2 + \cdots + \omega_{1r}\lambda_r)e_1\\
& + (\omega_{21}\lambda_1 + \omega_{22}\lambda_2 + \cdots + \omega_{2r}\lambda_r)e_2\\
& \vdots\\
& + (\omega_{n1}\lambda_1 + \omega_{n2}\lambda_2 + \cdots + \omega_{nr}\lambda_r)e_n.
\end{aligned}$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Por otra parte, supongamos que las coordenadas de $\overrightarrow{OX}$ y $\overrightarrow{OP}$, en la base B, son $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ y $(p_1, p_2, \ldots, p_n)^T$, respectivamente.

Entonces, de la igualdad

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + w$$

se deduce que

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = p_1 + \omega_{11}\lambda_1 + \omega_{12}\lambda_2 + \cdots + \omega_{1r}\lambda_r \\ x_2 = p_2 + \omega_{21}\lambda_1 + \omega_{22}\lambda_2 + \cdots + \omega_{2r}\lambda_r \\ \quad\vdots \\ x_n = p_n + \omega_{n1}\lambda_1 + \omega_{n2}\lambda_2 + \cdots + \omega_{nr}\lambda_r \end{array}\right\}. \tag{3}$$

Estas son las ecuaciones paramétricas de la variedad afín $\mathcal{L}$.

Concretamente, son las relaciones que existen entre las coordenadas de X y P en el sistema de referencia $\mathcal{R}$ y las coordenadas de w en la base B.

En forma matricial, (3) viene dada por

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{21} \\ \vdots \\ \omega_{n1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \omega_{12} \\ \omega_{22} \\ \vdots \\ \omega_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_r \begin{pmatrix} \omega_{1r} \\ \omega_{2r} \\ \vdots \\ \omega_{nr} \end{pmatrix}.$$

Cuando X "recorre" la variedad $\mathcal{L}$, los coeficientes λ_i "recorren" el subespacio vectorial W, por lo que las ecuaciones anteriores pueden verse como un sistema compatible (determinado) en las incógnitas λ_i.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Para obtener las ecuaciones implícitas o cartesianas de $\mathcal{L}$ basta con imponer que, en el sistema compatible (determinado) en las incógnitas λ_i, el rango de la matriz de coeficientes coincida con el rango de la matriz ampliada y con el número de incógnitas λ_i. Es decir, que

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} x_1 - p_1 & \omega_{11} & \omega_{12} & \cdots & \omega_{1r} \\ x_2 - p_2 & \omega_{21} & \omega_{22} & \cdots & \omega_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_r - p_r & \omega_{r1} & \omega_{r2} & \cdots & \omega_{rr} \\ x_{r+1} - p_{r+1} & \omega_{r+1,1} & \omega_{r+1,2} & \cdots & \omega_{r+1,r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - p_n & \omega_{n1} & \omega_{n2} & \cdots & \omega_{nr} \end{pmatrix} = r,$$

lo que es equivalente a imponer que los menores de orden $r+1$ sean cero. El resultado final es un sistema de $n-r$ ecuaciones.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 1.20

En el espacio afín usual tridimensional se considera un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; B = \{e_1, e_2, e_3\}\}$, el punto P con coordenadas en $(1, -2, 1)^T$ en $\mathcal{R}$ y el susbepacio vectorial W engendrado por los vectores u_1 y u_2, siendo $(1, 2, -1)^T$ y $(2, 1, 1)^T$ las coordenadas de u_1 y u_2 en la base B, respectivamente.

Las ecuaciones paramétricas de la variedad afín que pasa por P con dirección W son

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Es decir,

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ x_2 &= -2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ x_3 &= 1 - \lambda_1 + \lambda_2 \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (1.20 cont.)

Tomando λ_1 y λ_2 como incógnitas, el sistema (4) se transforma en el sistema

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_1 + 2\lambda_2 = x_1 - 1 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = x_2 + 2 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = x_3 - 1 \end{array}\right\}. \tag{5}$$

Aplicando eliminación gaussiana a la matriz ampliada asociada a (5),

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1 - 1 \\ 2 & 1 & x_2 + 2 \\ -1 & 1 & x_3 - 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1 - 1 \\ 0 & -3 & -2x_1 + x_2 + 4 \\ 0 & 3 & x_1 + x_3 - 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1 - 1 \\ 0 & -3 & -2x_1 + x_2 + 4 \\ 0 & 0 & -x_1 + x_2 + x_3 + 2 \end{array}\right),$$

vemos que el sistema (5) es compatible (determinado) si, y solo si,

$$-x_1 + x_2 + x_3 + 2 = 0.$$

Por tanto, la ecuación implícita de la variedad afín que pasa por P con dirección W es

$$x_1 - x_2 - x_3 = 2.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 2.1

Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín con espacio vectorial asociado V. Si V es un espacio vectorial euclídeo, es decir, si está dotado de un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, entonces decimos que $\mathcal{A}$ es un *espacio afín euclídeo*.

Definición 2.2

Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín euclídeo asociado al espacio vectorial V. Se define la función *distancia* en $\mathcal{A}$ como la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{d} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ (P, Q) & \longmapsto & \mathrm{d}(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|, \end{array}$$

donde $\| \cdot \|$ es la norma asociada al producto escalar de V.

Observación 2.3

Recordemos que la norma de un vector $v \in V$, asociada al producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en V, está definida por $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 2.4

- Consideremos el producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$. Además, sea el espacio afín $\mathbb{R}^n$, sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, con la aplicación ϕ definida por

$$\phi((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = (y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n).$$

  Entonces $\mathbb{R}^n$ es un espacio euclídeo con distancia dada por

$$\mathrm{d}((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}.$$

- En particular, si en el espacio afín euclídeo tridimensional usual $\mathbb{R}^3$ consideramos los puntos $P = (2, 3, 1)$ y $Q = (0, -1, 5)$, entonces la distancia entre ellos es igual a

$$\mathrm{d}(P, Q) = \sqrt{(0-2)^2 + (-1-3)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Resultado 2.5

Si P, Q y R son tres puntos de un espacio afín euclídeo con distancia d, entonces se cumplen las siguientes propiedades.

1. $\mathrm{d}(P,Q) = 0$ *si, y solo si,* $P = Q$.
2. $\mathrm{d}(P,Q) = \mathrm{d}(Q,P)$.
3. $\mathrm{d}(P,R) \leq \mathrm{d}(P,Q) + \mathrm{d}(Q,R)$.

Definición 2.6

- Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín euclídeo asociado al espacio vectorial V. Sea $\mathcal{L}$ una variedad afín con subespacio director W y sea un punto $P \in \mathcal{A}$.
- Llamamos *complemento ortogonal a $\mathcal{L}$ por el punto P* a la variedad afín $\mathcal{L}_P^{\perp} = P + W^{\perp}$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 2.7

Llamamos *referencia rectangular* en un espacio euclídeo $\mathcal{A}$, con espacio vectorial subyacente V de dimensión n, a todo sistema de referencia $R = \{O; B\}$ tal que B es una base ortonormal de V.

Definición 2.8

Un vector v se dice *ortogonal* a una variedad afín $\mathcal{L}$, del espacio afín euclídeo $\mathcal{A}$, si v es ortogonal al subespacio director de $\mathcal{L}$. Denotaremos este hecho por $v \perp \mathcal{L}$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- Consideremos la variedad afín $\mathcal{L} = P + W$ que pasa por P con dirección W.
- Sea un punto $Q \notin \mathcal{L}$.
- Sea $p_W(\overrightarrow{PQ})$ la proyección ortogonal de $\overrightarrow{PQ}$ sobre W.

Definición 2.9

El punto $Q' = P + p_W(\overrightarrow{PQ})$ se llama *proyección ortogonal del punto Q sobre la variedad afín $\mathcal{L}$* y se denota por $p_{\mathcal{L}}(Q)$.

Resultado 2.10

Se verifica que $Q' = p_{\mathcal{L}}(Q) = \mathcal{L} \cap \mathcal{L}_Q^{\perp}$.

Ejemplo 2.11

Hallemos la proyección ortogonal del punto $Q = (1, 3, -1)$, del espacio euclídeo tridimensional usual, sobre la recta r de ecuaciones paramétricas

$$\left.\begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{array}\right\}.$$

- Obtendremos el punto Q' a partir de Resultado 2.10.
- Comenzamos tomando la variedad afín $\mathcal{L}$ correspondiente a la recta r, esto es, la variedad que pasa por el punto $(0, 2, 1)$ y tiene como subespacio vectorial asociado el generado por el vector $(2, -1, 2)$, es decir, $W = L(\{(2, -1, 2)\})$.
- El complemento ortogonal $W^\perp$ de W está engendrado por dos vectores linealmente independientes ortogonales a W. Podemos tomar, por ejemplo, $(1, 2, 0)$ y $(1, 0, -1)$. Por tanto,

$$W^\perp = L\left(\{(1, 2, 0), (1, 0, -1)\}\right).$$

Ejemplo (2.11 cont.)

- Así, $W^\perp$ es un subespacio vectorial de dimensión 2 que admite como ecuaciones paramétricas

$$\left.\begin{array}{l} x = \alpha + \beta \\ y = 2\alpha \\ z = -\beta \end{array}\right\}. \tag{6}$$

Para hallar una ecuación implícita de $W^\perp$, discutimos (6) tomando α, β como incógnitas y x, y, z como parámetros.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 2 & 0 & y \\ 0 & -1 & z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -2 & y-2x \\ 0 & -1 & z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -2 & y-2x \\ 0 & 0 & z-\frac{1}{2}y+x \end{array}\right).$$

Por tanto, el sistema será compatible (determinado) si, y solo si,

$$z - \tfrac{1}{2}y + x = 0.$$

En consecuencia, una ecuación implícita de $W^\perp$ es

$$2x - y + 2z = 0. \tag{7}$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (2.11 cont.)

- La variedad $\mathcal{L}_Q^\perp$, que pasa por $Q = (1, 3, -1)$ y con subespacio director $W^\perp$, está formada por los puntos $X = (x, y, z)$ tales que el vector $\overrightarrow{QX} = (x-1, y-3, z+1)$ pertenece a $W^\perp$, es decir, los puntos X tales que $\overrightarrow{QX}$ satisface (7).
- Por tanto, $\mathcal{L}_Q^\perp$ está formada por los puntos $X = (x, y, z)$ tales que
$$2(x-1) - (y-3) + 2(z+1) = 0.$$
- Como $\mathcal{L}_Q^\perp$ es ortogonal a r, entonces su intersección con r proporciona la proyección ortogonal de $Q = (1, 3, -1)$ sobre r.
- Ahora bien, si un punto de r está en $\mathcal{L}_Q^\perp$, entonces
$$2(2\lambda - 1) - (2 - \lambda - 3) + 2(1 + 2\lambda + 1) = 0 \Rightarrow 9\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{3}.$$
- Concluimos que la proyección ortogonal de Q sobre r es el punto
$$Q' = (2\lambda, 2 - \lambda, 1 + 2\lambda) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{7}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 2.12

Definimos la *distancia de un punto Q a una variedad afín* $\mathcal{L} = P + W$ como

$$\mathrm{d}(Q, \mathcal{L}) = \text{mín}\{d(Q, X) \mid X \in \mathcal{L}\}.$$

Resultado 2.13

Dados un punto Q y una variedad afín $\mathcal{L} = P + W$, se verifica que

$$\mathrm{d}(Q, \mathcal{L}) = \mathrm{d}\left(Q, p_{\mathcal{L}}(Q)\right).$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 2.14

Continuando con Ejemplo 2.11, la distancia de $Q = (1, 3, -1)$ a la recta r de ecuaciones paramétricas

$$\left.\begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{array}\right\}$$

es

$$\begin{aligned} d(Q, r) &= d\left(Q, p_r(Q)\right) \\ &= d\left((1, 3, -1), \left(-\frac{2}{3}, \frac{7}{3}, \frac{1}{3}\right)\right) \\ &= \sqrt{\left(-\frac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{7}{3} - 3\right)^2 + \left(\frac{1}{3} + 1\right)^2} \\ &= \sqrt{5}. \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 2.15

Dadas dos variedades afines $\mathcal{L}_1 = P_1 + W_1$ y $\mathcal{L}_2 = P_2 + W_2$, se define la distancia entre ambas como

$$\mathrm{d}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = \mathrm{mín}\{\mathrm{d}(Q_1, Q_2) \mid Q_1 \in \mathcal{L}_1 \ \text{ y } \ Q_2 \in \mathcal{L}_2\}.$$

Si dos variedades se cortan entonces la distancia entre ellas es cero. El siguiente resultado proporciona un procedimiento para calcular la distancia en caso contrario (esto es, entre dos variedades que o bien se cruzan o bien son paralelas).

Resultado 2.16

Sean $\mathcal{L}_1 = P_1 + W_1$ y $\mathcal{L}_2 = P_2 + W_2$ dos variedades afines que no se cortan. Entonces se verifica que

$$\mathrm{d}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = d(P_1, \mathcal{L}),$$

donde $\mathcal{L} = P_2 + (W_1 + W_2)$ es la variedad que contiene a $\mathcal{L}_2$ y es paralela a $\mathcal{L}_1$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Consideremos los espacios afines $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ asociados a los espacios vectoriales V y W, respectivamente.

Definición 3.1

Decimos que $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es una *aplicación afín* si existe una aplicación lineal $\tau : V \to W$ tal que

$$\overrightarrow{T(P)T(Q)} = \tau\left(\overrightarrow{PQ}\right)$$

para todo par de puntos $P, Q \in \mathcal{A}$.

Las aplicaciones afines también se denominan *transformaciones afines* o *afinidades*.

Observación 3.2

En lo que sigue consideraremos aplicaciones afines de un espacio afín en sí mismo, esto es, supondremos que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ y $V = W$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

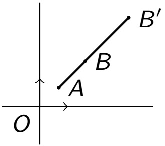
Ejemplo 3.3 (Homotecia)

- En el espacio afín $\mathbb{R}^2$ se define la *homotecia de centro* A *y razón* λ como la aplicación $H = H_{A;\lambda}$ tal que, si $B \in \mathbb{R}^2$, entonces la imagen B' de B mediante H verifica la relación

$$\overrightarrow{AB'} = \lambda \overrightarrow{AB}.$$

- La aplicación lineal asociada, τ, está definida por $\tau(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$.
- En estas condiciones,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{H(P)H(Q)} = \overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{P'A} + \overrightarrow{AQ'} = -\overrightarrow{AP'} + \overrightarrow{AQ'} = -\lambda \overrightarrow{AP} + \lambda \overrightarrow{AQ} \\ = \lambda\left(-\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}\right) = \lambda\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ}\right) = \lambda \overrightarrow{PQ} = \tau\left(\overrightarrow{PQ}\right).\end{aligned}$$



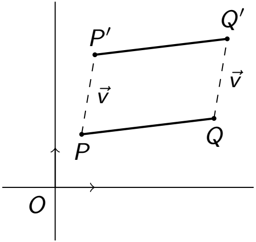
UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 3.4 (Traslación)

- Dado un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, la *traslación* $T_{\vec{v}}$ *de vector* $\vec{v}$ es también un caso de aplicación afín.
- Si $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$, entonces definimos $T_{\vec{v}}(P) = P'$.
- Es fácil comprobar que $T_{\vec{v}}$ es una aplicación afín. En efecto,

$$\overrightarrow{T_{\vec{v}}(P)\,T_{\vec{v}}(Q)} = \overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{PQ},$$

tomando la identidad en $\mathbb{R}^2$ como la aplicación lineal τ asociada a $T_{\vec{v}}$.



- Para encontrar la expresión analítica de una aplicación afín T en un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; B\}$, con $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$, observemos que la imagen $X' = T(X)$ de $X \in \mathcal{A}$ verifica que

$$\overrightarrow{OX'} = \overrightarrow{OT(X)} = \overrightarrow{OT(O)} + \overrightarrow{T(O)T(X)} = \overrightarrow{OT(O)} + \tau\left(\overrightarrow{OX}\right).$$

- Por tanto, si
  - $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ son las coordenadas de X respecto de $\mathcal{R}$,
  - $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ son las coordenadas de X' respecto de $\mathcal{R}$,
  - $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ son las coordenadas de $T(O)$ respecto de $\mathcal{R}$,
  - $M(\tau, B)$ es la matriz asociada a τ respecto de la base B,

  entonces se cumple que

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + M(\tau, B)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 3.5 (Expresión analítica de una homotecia)

Hallemos la expresión analítica de la homotecia $H = H_{A;\lambda}$ de centro A y razón λ vista en Ejemplo 3.3.

- Sea $\mathcal{R}$ el sistema de referencia con origen $O = (0,0)$ y base $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$, donde $\vec{e_1} = (1,0)$ y $\vec{e_2} = (0,1)$. Además, supongamos que $A = (a_1, a_2)$.
- Puesto que $H(A) = A$, entonces

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OX'} &= \overrightarrow{OH(X)} = \overrightarrow{OH(O)} + \overrightarrow{H(O)H(X)} = \overrightarrow{OH(O)} + \tau\left(\overrightarrow{OX}\right) \\ &= \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH(O)}\right) + \lambda\,\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{H(A)H(O)} + \lambda\,\overrightarrow{OX} \\ &= \overrightarrow{OA} + \lambda\,\overrightarrow{AO} + \lambda\,\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} - \lambda\,\overrightarrow{OA} + \lambda\,\overrightarrow{OX} = (1-\lambda)\,\overrightarrow{OA} + \lambda\,\overrightarrow{OX}.\end{aligned}$$

- Por tanto, concluimos que

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = (1-\lambda)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Es inmediato comprobar que la composición de dos aplicaciones afines es otra aplicación afín.

- Sean T_1 y T_2 dos aplicaciones afines con aplicaciones lineales asociadas τ_1 y τ_2, respectivamente.
- Entonces

$$\begin{aligned}\overrightarrow{(T_2 \circ T_1)(P)(T_2 \circ T_1)(Q)} &= \overrightarrow{T_2\left(T_1(P)\right) T_2\left(T_1(Q)\right)}\\ &= \tau_2\left(\overrightarrow{T_1(P)\,T_1(Q)}\right)\\ &= \tau_2\left(\tau_1\left(\overrightarrow{PQ}\right)\right)\\ &= (\tau_2 \circ \tau_1)\left(\overrightarrow{PQ}\right).\end{aligned}$$

- Por tanto, $T_2 \circ T_1$ es una aplicación afín cuya aplicación lineal asociada es $\tau_2 \circ \tau_1$.

Veamos ahora las aplicaciones afines que conservan distancias.

Definición 4.1

Sea un espacio afín euclídeo $\mathcal{A}$ con espacio vectorial subyacente V. Decimos que una aplicación afín en A es una *isometría afín* (o un *movimiento (rígido))* si conserva las distancias entre puntos, es decir, si

$$\mathrm{d}\big(T(P), T(Q)\big) = \mathrm{d}(P, Q),\ \forall P, Q \in \mathcal{A}.$$

Observación 4.2

Supongamos que T es una isometría afín en $\mathcal{A}$, que P y Q son dos puntos cualesquiera de $\mathcal{A}$ y que $P' = T(P)$, $Q' = T(Q)$.
Como T es una aplicación afín, supongamos que τ es su aplicación lineal asociada. Entonces se verifica que

$$\|\tau\left(\overrightarrow{PQ}\right)\| = \|\overrightarrow{T(P)T(Q)}\| = \|\overrightarrow{P'Q'}\| = \mathrm{d}(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Observación 4.3

En realidad se puede probar que T es una isometría afín en $\mathcal{A}$ si, y solo si, τ es una isometría lineal del espacio euclídeo V.

Definición 4.4

Sea T una isometría afín con aplicación lineal asociada τ. Decimos que T es directa si el determinante de la matriz asociada a τ, respecto de una base ortonormal, es igual a 1 y decimos que T es inversa si dicho determinante es igual a -1.

Observación 4.5

La composición de dos isometrías afines es otra isometría afín. En efecto, si T_1 y T_2 son dos isometrías afines, entonces

$$\mathrm{d}\big((T_2 \circ T_1)(P), (T_2 \circ T_1)(Q)\big) = \mathrm{d}\big(T_2(T_1(P)), T_2(T_1(Q))\big) = \mathrm{d}\big(T_1(P), T_1(Q)\big) = \mathrm{d}(P, Q).$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Giro alrededor de un punto

En el plano, un giro o rotación de ángulo α alrededor de un punto O (que no ha de ser necesariamente el origen del sistema de referencia) se puede expresar como

$$T(P) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} P,$$

donde P y $T(P)$ representan las coordenadas de P y $T(P)$ respecto de un sistema de referencia con origen el punto O y base ortonormal.

Simetría respecto de una recta

Una simetría S_r respecto de una recta r del plano es una isometría afín. Asocia a cada punto P el punto P' tal que el segmento determinado por P y P' es perpendicular a r y corta a dicho segmento en su punto medio.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Traslación

La traslación $T_{\vec{v}}$ de vector $\vec{v}$ es una isometría afín tanto en el plano como en el espacio.

Simetría respecto de un plano

En el espacio, una simetría respecto de un plano π, S_{π}, es una isometría afín. El plano π divide al segmento determinado por P y su imagen P' en dos partes iguales, siendo dicho segmento perpendicular a π.

Movimiento helicoidal

La isometría afín que se produce en el espacio al subir por una escalera de caracol se denomina movimiento helicoidal. Su efecto está producido por un giro en un plano π seguido de una traslación con vector perpendicular a π.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Resultado 4.6

Si una isometría afín en un plano tiene más de un punto fijo, entonces debe ser la identidad o una simetría respecto de una recta que pasa por los puntos fijos.

Resultado 4.7

Toda isometría afín en un plano es

- *o la composición de un giro y una traslación;*
- *o la composición de una simetría (respecto a una recta), un giro y una traslación, teniendo en cuenta que el eje de simetría ha de pasar por el centro de giro.*

Resultado 4.8

Una isometría afín, en un plano, que tenga más de un punto fijo es

- *la identidad si no cambia la orientación de las figuras;*
- *una simetría si cambia la orientación de las figuras.*

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Resultado 4.9

La composición de un giro y una traslación es otro giro del mismo ángulo.

Resultado 4.10

La composición de una simetría y un giro de centro perteneciente al eje de simetría es otra simetría.

Definición 4.11

La composición de una simetría de recta r y una traslación de vector $\vec{u}$ paralelo a r se denomina *simetría deslizante*, denotándose por $S_{r,\vec{u}}$.

Resultado 4.12

La composición de una simetría y una traslación es o una simetría deslizante o una simetría.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Resultado 4.13 (Clasificación de las isometrías afines en un plano)

- *Las isometrías afines directas en el plano son*
  1. *la identidad,*
  2. *las traslaciones,*
  3. *las rotaciones (giros) alrededor de un punto.*
- *Las isometrías afines inversas en el plano son*
  1. *las simetrías,*
  2. *las simetrías deslizantes.*

Observación 4.14

- En la identidad todos los puntos son fijos.
- En las traslaciones no hay puntos fijos.
- En los giros el único punto fijo el centro de giro.
- En las simetrías son fijos los puntos de la recta de simetría.
- En las simetrías deslizantes no hay puntos fijos, pero la recta de simetría es invariante (esto es, todo punto de dicha recta tiene como imagen otro punto de esa misma recta).

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Resultado 4.15 (Clasificación de las isometrías afines en el espacio)

- *Las isometrías afines directas en el espacio afín euclídeo tridimensional son*
  1. *la identidad;*
  2. *las traslaciones;*
  3. *las rotaciones (giros) alrededor de un eje;*
  4. *los movimientos helicoidales.*

- *Las isometrías afines inversas en el espacio afín euclídeo tridimensional son*
  1. *las simetrías;*
  2. *las simetrías deslizantes (véase el pdf de complementos);*
  3. *las composiciones de un giro y una simetría con respecto a un plano perpendicular al eje de giro.*