UNIVERSIDAD
DE GRANADA

**Departamento de
Matemática Aplicada**

Tema 5 (apéndice)
Isometrías afines (movimientos rígidos): clasificación

"Matemática Aplicada"
Ingeniería Civil - Administración y Dirección de Empresas

13 de abril de 2023

Índice

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- Supongamos que $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es una isometría afín del espacio afín euclídeo $\mathcal{A}$ (con espacio vectorial asociado V).
- Entonces T es una aplicación afín cuya aplicación lineal asociada, τ, es una isometría lineal (en V).
- Si $\mathcal{R} = \{O; B\}$ es un sistema de referencia de $\mathcal{A}$, entonces las coordenadas $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ de un punto $P \in \mathcal{A}$ y las coordenadas $(x_1', x_2', \dots, x_n')^T$ del punto $T(P)$ se relacionan mediante la ecuación

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = M(\tau, B) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

donde $M(\tau, B)$ es la matriz de la aplicación lineal τ respecto de B y $(a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ son los coordenadas de $T(O)$ respecto de B.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- Como T es una isometría afín, entonces τ será una isometría lineal; por tanto, si consideramos un sistema de referencia rectangular (esto es, la base es ortonormal), entonces $M(\tau, B)$ será una matriz ortogonal.
- Si $\mathcal{A}$ es el espacio euclídeo usual $\mathbb{R}^k$ y el sistema de referencia está formado por el origen $O = (0, 0, \ldots, 0)$ y la base canónica, entonces la imagen $P' = (p'_1, p'_2, \ldots, p'_k)$ del punto $P = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$ es del tipo
$$\left(m_{11}p_1 + \cdots + m_{1k}p_k + a_1, \ldots, m_{k1}p_1 + \cdots + m_{kk}p_k + a_k\right),$$
donde los coeficientes m_{ij} son las componentes de la matriz $M(\tau, B) \in \mathcal{M}_{k\times k}$ y $T(O) = (a_1, \ldots, a_k)_{\mathcal{R}}$.
- En otros términos, se tiene que
$$\begin{pmatrix} p'_1 \\ \vdots \\ p'_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{k1} & \cdots & m_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}, \qquad (1)$$
donde la matriz $M = M(\tau, B) \in \mathcal{M}_{k\times k}$ es ortogonal.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- Clasificaremos una isometría afín T de $\mathbb{R}^k$ a partir de sus puntos fijos, es decir, a partir del conjunto de puntos $P \in \mathbb{R}^k$ tales que $T(P) = P$.
- De (1), se sigue que P es un punto fijo de T si, y solo si, se verifica que
$$\begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{k1} & \cdots & m_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix},$$
es decir,
$$\begin{pmatrix} m_{11}-1 & \cdots & m_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{k1} & \cdots & m_{kk}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}. \qquad (2)$$
- En consecuencia, habrá puntos fijos para T si y, solo si, el sistema de ecuaciones lineales (2) es compatible.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- Por el Teorema de Rouché-Frobenius, (2) es compatible si, y solo si,

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} m_{11}-1 & \cdots & m_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{k1} & \cdots & m_{kk}-1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} m_{11}-1 & \cdots & m_{1k} & -a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ m_{k1} & \cdots & m_{kk}-1 & -a_k \end{array}\right).$$

- En otros términos, existirán puntos fijos si, y solo si,

$$\mathrm{rg}\,(M - I_k) = \mathrm{rg}\,(M - I_k \mid -T(O)),$$

  donde I_k es la matriz identidad de orden k.

- Si existen puntos fijos, estos formarán una variedad afín, $\mathcal{L} = F(T)$, de dimensión $k - r$, donde $r = \mathrm{rg}\,(M - I_k)$.

- Además, la variedad afín $\mathcal{L} = F(T)$ tendrá asociado un subespacio vectorial director, W, de dimensión $k - r$.

  Por cierto, W es el subespacio vectorial formado por los vectores fijos por τ, es decir, aquellos vectores w tales que $\tau(w) = w$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Otro concepto que ayuda en la clasificación de las isometrías afines es el de variedad afín invariante.

- Si la imagen de todo punto de una variedad afín $\mathcal{L}$ de $\mathbb{R}^k$ pertenece a $\mathcal{L}$, entonces diremos que $\mathcal{L}$ es invariante por T.
- Asociado a W (el subespacio vectorial de vectores fijos por τ) podemos considerar el subconjunto

$$I(T) = \left\{ P \in \mathbb{R}^k \mid \overrightarrow{PT(P)} \in W \right\},$$

que es una variedad afín invariante por T.

- Los puntos de $I(T)$, de existir, están caracterizados por ser soluciones del sistema

$$(M - I_k)^2 P + (M - I_k) T(O) = 0.$$

Supongamos que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una isometría afín directa, con isometría lineal asociada definida por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi[.$$

- Si hay puntos fijos, entonces T es
  - la identidad cuando $\theta = 0$;
  - la simetría central cuando $\theta = \pi$;
  - un giro de ángulo θ, respecto del punto fijo $F(T)$, en cualquier otro caso.
- Si no hay puntos fijos, entonces T es una traslación.

Supongamos ahora que T es una isometría afín inversa, con

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi[.$$

- Si hay puntos fijos, entonces T es una simetría respecto de $F(T)$.
- Si no hay puntos fijos, entonces T es una simetría deslizante, es decir, una simetría respecto de una recta (dada por $I(T)$) seguida de una traslación de vector paralelo a la recta de simetría.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Supongamos que $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una isometría afín directa y que, respecto de una base ortonormal, la matriz de la aplicación lineal τ (asociada a T) adopta la expresión

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi[.$$

- Si hay puntos fijos, entonces T es
  - la identidad cuando $\theta = 0$;
  - una simetría (ortogonal), respecto de la recta $F(T)$, para $\theta = \pi$;
  - un giro de ángulo θ, alrededor de la recta $F(T)$, en cualquier otro caso.
- Si no hay puntos fijos, entonces T es
  - una traslación si $\theta = 0$;
  - para cualquier otro valor de θ, un movimiento helicoidal alrededor del eje $I(T)$, es decir, un giro de ángulo θ respecto de $I(T)$ seguido de una traslación de vector paralelo a $I(T)$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Supongamos que $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es ua isometría afín inversa y que, respecto de una base ortonormal, la matriz de la aplicación lineal τ (asociada a T) adopta la expresión

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi[.$$

- Si hay puntos fijos, entonces T es
  - ⋆ una simetría respecto del plano dado por $F(T)$;
  - ⋆ la composición de un giro y una simetría, siendo el eje de giro y el plano de simetría perpendiculares entre sí. Además, el punto de corte del eje y el plano es el único punto fijo en tal caso.
- Si no hay puntos fijos, entonces T es una simetría deslizante, es decir, una simetría respecto de un plano (dado por $I(T)$) seguida de una traslación de vector paralelo al plano.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 3.1

Vamos a estudiar la aplicación afín del plano en sí mismo dada, en el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}\}$ usual, por

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

- Si tomamos
$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix},$$
es claro que $M \cdot M^T = I_2$. Por tanto, tenemos una isometría afín.
- Además, como $\det(M) = -1$, se trata de una isometría afín inversa.
- Para determinar la variedad afín de puntos fijos, estudiamos la expresión

$$-\begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (3.1 cont.)

- O sea, vemos si tiene solución el sistema

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - 1 & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

  Para ello, calculamos los rangos $\mathrm{rg}\,(M - I_2|b)$ y $\mathrm{rg}\,(M - I_2)$.

- Como

$$\mathrm{rg} \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{8}{5} & -\frac{4}{5} \end{array}\right) = \mathrm{rg} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = 1,$$

  entonces existe una variedad de puntos fijos de dimensión $1\,(= 2 - 1)$, es decir, una recta de puntos fijos (concretamente, la recta dada por $x + 2y = 1$).

- Concluimos que la isometría corresponde a la simetría respecto de la recta $x + 2y = 1$.

Ejemplo 3.2

Hallemos las ecuaciones de la isometría afín T, en el plano afín usual, correspondiente a la simetría respecto de la recta $r \equiv x - 2y = 5$.

- Dado un punto $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ cualquiera, empezamos determinando la recta $r_P^\perp$ que es ortogonal (perpendicular) a r y pasa por P.
  - Teniendo en cuenta que $r \equiv \frac{x-5}{2} = \frac{y}{1}$, entonces $(2, 1)$ es un vector director de r. Así, $(1, -2)$ será un vector director de $r_P^\perp$.
  - Por tanto, una expresión para $r_P^\perp$ es la dada por

    $$\frac{x - p_1}{1} = \frac{y - p_2}{-2}.$$

    De donde la ecuación cartesiana de $r_P^\perp$ es $2x + y = 2p_1 + p_2$.
- Como la proyección ortogonal de P sobre r es el punto $P' = r \cap r_P^\perp$, calculando la solución del sistema de ecuaciones

  $$\left.\begin{array}{r} x - 2y = 5 \\ 2x + y = 2p_1 + p_2 \end{array}\right\},$$

  concluimos que $P' = \frac{1}{5}(4p_1 + 2p_2 + 5, 2p_1 + p_2 - 10)$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (3.2 cont.)

- Si denotamos por P'' al punto simétrico de P respecto de la recta r, es claro que $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{P'P''}$. Por tanto,

$$P' - P = P'' - P' \Rightarrow P'' = 2P' - P \Rightarrow$$

$$P'' = \left(\frac{3}{5}p_1 + \frac{4}{5}p_2 + 2, \frac{4}{5}p_1 - \frac{3}{5}p_2 - 4\right).$$

- Por tanto, la expresión matricial de la isometría afín es

$$T\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

- Tomando

$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix},$$

es claro que $MM^T = I_2$ y que $\det(M) = -1$. Esto debía ser así pues las simetrías son isometrías afines inversas.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 3.3

Vamos a estudiar la aplicación afín de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ dada, en el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}\}$ usual, por

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

En particular, si existen, determinaremos sus puntos fijos.

- Si tomamos
$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$
es claro que $M \cdot M^T = I_3$. Por tanto, tenemos una isometría afín.
- Además, como $\det(M) = -1$, la isometría afín es inversa.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (3.3 cont.)

- Para determinar los puntos fijos, tenemos que estudiar el sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- Para ello, operando adecuadamente,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\,(3\cdot I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (3.3 cont.)

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-4\\-2\\-2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1-3 & -2 & -2\\ -2 & 2-3 & -1\\ -2 & -1 & 2-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix}-4\\-2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4 & -2 & -2\\ -2 & -1 & -1\\ -2 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

- Examinemos la compatibilidad del sistema resultante. Puesto que

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}-4 & -2 & -2\\ -2 & -1 & -1\\ -2 & -1 & -1\end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 1$$

y

$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c}-4 & -2 & -2 & -4\\ -2 & -1 & -1 & -2\\ -2 & -1 & -1 & -2\end{array}\right) = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) = 1,$$

entonces la aplicación afín tiene una variedad de puntos fijos de dimensión $2\,(=3-1)$, esto es, un plano.

- Conclusión: es una simetría respecto del plano $\pi \equiv 2x + y + z = 2$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 3.4

Vamos a estudiar la aplicación afín de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ dada, en el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}\}$ usual, por

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{3} \\ 1 \\ 3 - \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

- Si tomamos
$$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},$$
es claro que $M \cdot M^T = I_3$. Por tanto, tenemos una isometría afín.
- Además, como $\det(M) = 1$, la isometría afín es directa.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (3.4 cont.)

- Para determinar los puntos fijos, tenemos que estudiar el sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 1 \\ 3-\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

  Dicho sistema es equivalente al sistema

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}-2}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}-2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+\sqrt{3} \\ -1 \\ -3+\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

  que es claramente incompatible. Por tanto, no hay puntos fijos para la isometría afín propuesta.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (3.4 cont.)

- Para comprobar si existe una variedad invariante, estudiamos el sistema

$$(M - I_3)^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -(M - I_3) \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 1 \\ 3-\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

  Haciendo cálculos, obtenemos

$$\begin{pmatrix} \frac{3-2\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}-2}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{2-\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{3-2\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 0 \\ 5-3\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

  cuya solución es $(x, y, z) = (2, \lambda, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Por tanto, tenemos un movimiento helicoidal cuyo eje de simetría es la variedad invariante que acabamos de calcular. Concretamente, la recta r de ecuaciones cartesianas

$$\left.\begin{aligned} x &= 2 \\ z &= 2 \end{aligned}\right\}.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (3.4 cont.)

- Para hallar el vector de traslación correspondiente al movimiento helicoidal, basta con calcular la imagen de cualquier punto de la recta invariante. Por ejemplo, si $P = (2, 0, 2)$, entonces su imagen es $P' = (2, 1, 2)$. Así, el vector de traslación es $\overrightarrow{PP'} = (0, 1, 0)$.
- Para hallar el ángulo de giro asociado al movimiento helicoidal, podemos considerar un punto cualquiera Q que pertenezca a la recta invariante r, determinar su proyección R sobre dicha recta y, finalmente, calcular el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{RQ}$ y $\overrightarrow{R'Q'}$ (siendo R' y Q' las imágenes respectivas de R y Q por el movimiento helicoidal).

  Por ejemplo, si $Q = (0, 0, 0)$, entonces el plano π ortogonal a la recta invariante r que pasa por Q es $y = 0$ (pues $(0, 1, 0)$ es un vector director de r). Así, $R = r \cap \pi = (2, 0, 2)$.
  Ahora, como $Q' = (1 - \sqrt{3}, 1, 3 - \sqrt{3})$ y $R' = (2, 1, 2)$, entonces el ángulo formado por $\overrightarrow{RQ} = (-2, 0, -2)$ y $\overrightarrow{R'Q'} = (-1 - \sqrt{3}, 0, 1 - \sqrt{3})$ viene dado por la expresión $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.