UNIVERSIDAD
DE GRANADA

**Departamento de
Matemática Aplicada**

Tema 4
Diagonalización

"Matemática Aplicada"
Ingeniería Civil - Administración y Dirección de Empresas

21 de febrero de 2022

Índice

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 1.1

Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrices cuadradas de orden n. Decimos que A es una *matriz semejante* a B (lo que denotamos por $A \sim B$) si existe una matriz invertible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, tal que $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Definición 1.2

Decimos que una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es *diagonalizable (por semejanza)* si existen dos matrices $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (invertible) y $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (diagonal) tales que

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P \text{ (o, equivalentemente, } A = P \cdot D \cdot P^{-1}\text{).}$$

Observación 1.3

Podemos decir que una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es diagonalizable si, y solo si, es semejante a una matriz diagonal del mismo orden.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 1.4

Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Decimos que λ es un *valor propio (o autovalor)* de la matriz A si existe un vector no nulo $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

En tal caso, decimos que x es un *vector propio (o autovector)* de la matriz A asociado al valor propio λ.

Observación 1.5

Se verifica que $Ax = \lambda x$ y, por tanto, el sistema $(A - \lambda I_n)x = 0$ debe ser compatible y, por ser homogéneo, indeterminado.
En consecuencia,

$$|A - \lambda I_n| = 0.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 1.6

Dada la matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, se llama *polinomio característico de* A, y se denota por $p_A(\lambda)$, al determinante

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I_n|.$$

Resultado 1.7

Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces,

1. *λ es un valor propio de A si, y solo si, λ es una raíz del polinomio característico $p_A(\lambda)$.*
2. *$x \in \mathbb{R}^n$ es un vector propio asociado al valor propio λ si, y solo si, es una solución no nula del sistema de ecuaciones lineales homogéneo*

$$(A - \lambda I_n)x = 0.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 1.8

Sea una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$ un valor propio de A.

- El subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ dado por
$$V_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda I_n)x = 0\}$$
se llama *subespacio propio (de A) asociado al valor propio λ.*
- La dimensión de V_λ se denomina *multiplicidad geométrica del valor propio λ* y se denota por $m_g(\lambda)$. Es decir,
$$m_g(\lambda) = dim(V_\lambda) = n - rango(A - \lambda I_n).$$
- Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ son los valores propios distintos de A, se llama *multiplicidad algebraica de λ_i* (para cada $i = 1, \ldots, r$), y se denota por $m_a(\lambda_i)$, al número de veces que aparece repetido λ_i como solución del polinomio característico de A.

Observación 1.9

Si λ es un valor propio de A, entonces $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.

Resultado 1.10

Sea una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, los valores propios distintos de A. Entonces A es una matriz diagonalizable (por semejanza) en $\mathbb{R}$ si, y solo si, se verifican las dos condiciones siguientes.

1. $\lambda_i \in \mathbb{R}$, *para todo* $i = 1, \ldots, r$.
2. $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$, *para todo* $i = 1, \ldots, r$.

Además, $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ *donde*

- D *es la matriz diagonal con elementos* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *en la diagonal principal;*
- P *es la matriz compuesta por los vectores de cualesquiera bases de* $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_r}$, *dispuestos en columnas.*

  (P es la denominada matriz de paso *para la diagonalización de A).*

Observación 1.11

Si A es una matriz cuadrada de orden n que tiene n valores propios reales y distintos, entonces A es diagonalizable.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Cómo diagonalizar una matriz cuadrada A en $\mathbb{R}$ (Básico para los cálculos)

1. Hallamos la ecuación característica $|A - \lambda I_n| = 0$.
2. Determinamos las raíces $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ de la ecuación anterior con sus multiplicidades algebraicas $m_a(\lambda_1), \dots, m_a(\lambda_r)$ respectivas.

* Si algún valor propio λ_i no es un número real, entonces la matriz A no es diagonalizable en $\mathbb{R}$.

3. Para cada valor propio λ_i, $1 \leq i \leq r$, hallamos su multiplicidad geométrica $m_g(\lambda_i) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda_i I_n)$.

* Si $m_a(\lambda_i) \neq m_g(\lambda_i)$, para algún i, entonces A no es diagonalizable en $\mathbb{R}$ (es decir, A es diagonalizable en $\mathbb{R}$ si $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$, $\forall i = 1, \dots, r$).

4. En caso de ser A diagonalizable en $\mathbb{R}$,
   i) hallamos una base para cada subespacio propio V_{λ_i};
   ii) formamos la matriz diagonal D situando los valores propios λ_i (repetidos tantas veces como indique $m_a(\lambda_i)$) en la diagonal;
   iii) formamos la matriz regular P situando ordenadamente, y por columnas, los vectores propios dados por las bases de los subespacios propios hallados anteriormente.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 1.12

Diagonalicemos por semejanza la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Primero hallamos el polinomio característico de la matriz A.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 20.$$

2. Los valores propios son las soluciones de la ecuación característica

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 24\lambda - 20 = 0,$$

esto es, $\lambda = 2$ (con $m_a(2) = 2$) y $\lambda = 5$ (con $m_a(5) = 1$).

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (1.12 cont.)

3. Hallemos los subespacios propios asociados a los valores propios.
   - ⋆ Para $\lambda = 2$,

$$
\begin{aligned}
V_2 &= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 3-2 & 1 & 1 \\ 1 & 3-2 & 1 \\ 1 & 1 & 3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\} \\
&= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = -x_1 - x_2 \right\} \\
&= \{(x_1, x_2, -x_1 - x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x_1, 0, -x_1) + (0, x_2, -x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x_1(1,0,-1) + x_2(0,1,-1) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= L\left(\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}\right).
\end{aligned}
$$

Se cumple que $m_g(2) = \dim V_2 = 2$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (1.12 cont.)

- Para $\lambda = 5$,

$$V_5 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 3-5 & 1 & 1 \\ 1 & 3-5 & 1 \\ 1 & 1 & 3-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{r} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\}$$
$$= L\left(\{(1,1,1)\}\right).$$

Así, $m_g(5) = \dim V_5 = 1$.

* Como, para cada valor propio, las multiplicidades algebraica y geométrica coinciden, podemos asegurar que A es diagonalizable por semejanza.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (1.12 cont.)

4. La matriz A es equivalente a la matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

es decir, existe una matriz regular, P, tal que

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}.$$

Una posible matriz P se determina a partir de las bases calculadas anteriormente para cada uno de los subespacios propios. Es decir,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (1.12 cont.)

Efectivamente,

$$\begin{aligned}
P \cdot D \cdot P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 5 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = A.
\end{aligned}$$

Definición 2.1

Se dice que una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es *diagonalizable por semejanza ortogonal* si existen una matriz ortogonal $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (es decir, $Q^{-1} = Q^T$) y una matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tales que $D = Q^{-1} \cdot A \cdot Q = Q^T \cdot A \cdot Q$.

Resultado 2.2

Toda matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es diagonalizable por semejanza ortogonal.

Cómo diagonalizar ortogonalmente una matriz A simétrica (Básico para los cálculos)

1. Calculamos el polinomio característico y los valores propios de A, considerando la multiplicidad algebraica de cada uno de ellos.
2. Para cada valor propio λ consideramos $m_g(\lambda)$ vectores propios ortonormales asociados (puede ser que necesitemos usar el proceso de Gram-Schmidt). Es decir, para cada valor propio λ consideramos una base ortonormal del subespacio propio V_λ.
3. Construimos la matriz ortogonal Q situando por columnas los vectores propios considerados en el paso previo.
4. Construimos la matriz diagonal D situando en la diagonal principal los valores propios en el mismo orden en que se han colocado los vectores propios en Q.
5. Así, $D = Q^{-1} \cdot A \cdot Q = Q^T \cdot A \cdot Q$, con D diagonal y Q ortogonal.

Ejemplo 2.3 (Ejemplo 1.12)

Diagonalicemos por semejanza ortogonal la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Por Ejemplo 1.12, sabemos que los valores propios de A son $\lambda = 2$ (con $m_a(2) = 2$) y $\lambda = 5$ (con $m_a(5) = 1$). Además, los subespacios propios respectivos son

$$V_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\} = L\left(\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}\right),$$

$$V_5 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{r} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\} = L\left(\{(1,1,1)\}\right).$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (2.3 cont.)

2. Como $V_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\} = L\left(\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}\right)$, una base ortogonal estaría compuesta por el vector $v_1 = (1,0,-1)$ y otro vector $v_2 = (x_1, x_2, x_3) \in V_2$ ortogonal a v_1, es decir, v_2 tal que

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{array}\right\}.$$

Por ejemplo, podemos tomar $v_2 = (1,-2,1)$.
En definitiva, una base ortogonal de V_2 es $\{(1,0,-1),(1,-2,1)\}$. Y, por tanto, una base ortonormal de V_2 es

$$\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,-1), \frac{\sqrt{6}}{6}(1,-2,1)\right\}.$$

Podríamos haber empleado el método de ortogonalización de Gram-Schmidt. No lo hemos hecho así por tratarse de un subespacio vectorial muy simple.

Análogamente, una base ortonormal de V_5 es $\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)\right\}$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (2.3 cont.)

3. Tras los cálculos realizados, podemos considerar la matriz

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

para realizar la diagonalización por semejanza ortogonal de la matriz A.

4. Entonces, como matriz diagonal D, tomamos

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. Así tenemos que $A = Q \cdot D \cdot Q^T$ (equivalentemente, que $D = Q^T \cdot A \cdot Q$).

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (2.3 cont.)

Efectivamente,

$$
\begin{aligned}
Q\cdot D\cdot Q^T &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{5\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{6}}{3} & \frac{5\sqrt{3}}{3} \\ -\sqrt{2} & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{5\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = A.
\end{aligned}
$$