UNIVERSIDAD
DE GRANADA

**Departamento de
Matemática Aplicada**

Tema 3
Aplicaciones lineales e isometrías lineales (transformaciones ortogonales)

"Matemática Aplicada"
Ingeniería Civil - Administración y Dirección de Empresas

20 de febrero de 2023

Índice

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Índice (cont.)

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 1.1

Sean V y W espacios vectoriales reales y una correspondencia $T : V \to W$ que a cada vector $v \in V$ le asigna un (único) vector $w = T(v) \in W$.
Decimos que T es una *aplicación lineal* si se verifican las dos siguientes condiciones.

1. $T(u+v) = T(u) + T(v)$, $\forall u, v \in V$.
2. $T(\lambda u) = \lambda T(u)$, $\forall u \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Definición 1.2

Una aplicación lineal T de un espacio vectorial V en sí mismo ($T : V \to V$) se denomina *endomorfismo*.

Ejemplo 1.3

La aplicación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 3x_2)$ es lineal. En efecto,

- $T((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) =$
  $((x_1 + y_1) + (x_2 + y_2), (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2), 3(x_2 + y_2)) =$
  $(x_1 + x_2, x_1 - x_2, 3x_2) + (y_1 + y_2, y_1 - y_2, 3y_2) = T(x_1, x_2) + T(y_1, y_2)$.
- $T(\lambda(x_1, x_2)) = T(\lambda x_1, \lambda x_2) = (\lambda x_1 + \lambda x_2, \lambda x_1 - \lambda x_2, 3(\lambda x_2)) =$
  $\lambda(x_1 + x_2, x_1 - x_2, 3x_2) = \lambda T(x_1, x_2)$.

Ejemplo 1.4

Si A es una matriz real de orden $m \times n$, definimos la aplicación $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ por $T(x) = A \cdot x$ (donde $x = (x_1, \cdots, x_n)^T$).
La aplicación T así definida es lineal. En efecto,

- $T(x + y) = A \cdot (x + y) = A \cdot x + A \cdot y = T(x) + T(y)$;
- $T(\lambda x) = A \cdot (\lambda x) = \lambda(A \cdot x) = \lambda T(x)$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 1.5

Si consideramos los espacios $V = C^1(\mathbb{R})$ y $W = C(\mathbb{R})$, entonces la aplicación $T : \; V \to W$ definida por $T(f) = f'$ es evidentemente lineal: la derivada de una suma es la suma de derivadas y la derivada de una constante por una función es la constante por la derivada de la función.

Ejemplo 1.6

La aplicación $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$, $T\left(p(x)\right) = xp(x)$ es lineal. En efecto, si $p, q \in \mathbb{P}_2$,

- $T\left((p+q)(x)\right) = x\left(p(x) + q(x)\right) = xp(x) + xq(x) = T\left(p(x)\right) + T\left(q(x)\right).$
- $T\left(\lambda p(x)\right) = x(\lambda p(x)) = \lambda x p(x) = \lambda T\left(p(x)\right).$

Propiedad 1.7

Sean V y W espacios vectoriales reales y $T : V \to W$ una aplicación lineal entre ellos.

- $T(0_V) = 0_W$.
- $T(-u) = -T(u)$, $\forall u \in V$.
- Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ y $v_1, \ldots, v_k \in V$, entonces

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \cdots + \alpha_k T(v_k).$$

(Por esta última propiedad se dice que T es lineal: la imagen de una combinación lineal de vectores es igual a la combinación lineal de las imágenes de los vectores).

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 2.1

Sea $T : V \to W$ una aplicación lineal. Se llama *núcleo de* T, y se denota por $\mathrm{N}(T)$ o $\ker(T)$, al subconjunto de V definido por

$$\mathrm{N}(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0_W\}.$$

Es decir, el núcleo de una aplicación es el conjunto de los vectores cuya imagen es el vector cero.

Definición 2.2

Se llama *imagen de* T, y se denota por $\mathrm{Im}(T)$, al subconjunto de W dado por

$$\mathrm{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\} = \{w \in W \mid \exists v \in V \text{ tal que } T(v) = w\}.$$

Esto es, la imagen es el conjunto de vectores del segundo espacio que son imagen de algún vector del primer espacio.

Ejemplo 2.3 (Ejemplo 1.3)

Sea la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T(x,y) = (x+y, x-y, 3y)$.

- Su núcleo es

$$\begin{aligned} \mathrm{N}(T) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid T(x,y) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+y, x-y, 3y) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=0,\ x-y=0,\ 3y=0\}. \end{aligned}$$

  Como el sistema homogéneo $\{x+y=0,\ x-y=0,\ 3y=0\}$ es compatible determinado, su única solución es la trivial. Por tanto,

$$\mathrm{N}(T) = \{(0,0)\}\,.$$

- Su imagen es

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(T) &= \{T(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \{(x+y, x-y, 3y) \mid x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,x,0) + (y,-y,3y) \mid x,y \in \mathbb{R}\} = L\{(1,1,0),(1,-1,3)\}\,. \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 2.4

Sea la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x+y, 2x+2y, x)$.

- Su núcleo es

$$\begin{aligned}
N(T) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=0,\ 2x+2y=0,\ x=0\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=0,\ y=0\} \\
&= \{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\
&= L\{(0,0,1)\}.
\end{aligned}$$

- Su imagen es

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(T) &= \{T(x,y,z) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\
&= \{(x+y, 2x+2y, x) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x,2x,x) + (y,2y,0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\
&= L\{(1,2,1),(1,2,0)\}.
\end{aligned}$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 2.5

Sea la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x - y, x + z)$.

- Su núcleo es

$$\begin{aligned} \mathrm{N}(T) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x, y, z) = (0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - y, x + z) = (0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0,\ x + z = 0\}. \end{aligned}$$

El sistema $\{x - y = 0,\ x + z = 0\}$ es compatible indeterminado, siendo su solución $(x, y, z) = (\lambda, \lambda, -\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Por tanto

$$\mathrm{N}(T) = L\{(1, 1, -1)\}.$$

- Su imagen es

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(T) &= \{T(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{(x - y, x + z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, x) + (-y, 0) + (0, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= L\{(1, 1),\ (-1, 0),\ (0, 1)\} = L\{(1, 1),\ (-1, 0)\} = \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.6

Sea la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y, x - 2y, x + y + z)$.

- Su núcleo es

$$\begin{aligned} \mathrm{N}(T) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x, y, z) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x + y, x - 2y, x + y + z) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0,\ x - 2y = 0,\ x + y + z = 0\}. \end{aligned}$$

  Como el sistema $\{x + y = 0,\ x - 2y = 0,\ x + y + z = 0\}$ es compatible determinado, su única solución es $(0, 0, 0)$. Por tanto,

$$\mathrm{N}(T) = \{(0, 0, 0)\}.$$

- Su imagen es

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(T) &= \{T(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(x + y, x - 2y, x + y + z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, x, x) + (y, -2y, y) + (0, 0, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= L\{(1, 1, 1), (1, -2, 1), (0, 0, 1)\} = \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Resultado 2.7

Dada una aplicación lineal $T : V \to W$, se cumplen las siguientes propiedades.

1. $\mathrm{N}(T)$ *es un subespacio vectorial de* V.
2. $\mathrm{Im}(T)$ *es un subespacio vectorial de* W.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 2.8

Se dice que una aplicación lineal $T : V \to W$ es un *monomorfismo* si T es una aplicación inyectiva, es decir, si elementos distintos de V tienen imágenes distintas en W,

$$v_1 \neq v_2 \Rightarrow T(v_1) \neq T(v_2).$$

Resultado 2.9

Una aplicación lineal T es un monomorfismo si, y solo si,

$$T(v_1) = T(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2.$$

Definición 2.10

Se dice que una aplicación lineal $T : V \to W$ es un *epimorfismo* si es una aplicación sobreyectiva (epiyectiva), es decir, si para cualquier vector $w \in W$ existe al menos un vector $v \in V$ tal que $T(v) = w$.

Definición 2.11

Se dice que una aplicación lineal $T : V \to W$ es un *isomorfismo* si es monomorfismo y epimorfismo.

Observación 2.12

Una aplicación lineal T es un isomorfismo si, y solo si, T es una aplicación lineal inyectiva y sobreyectiva.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Es posible caracterizar las aplicaciones lineales a partir de los conceptos de núcleo e imagen.

Resultado 2.13

Sea $T : V \to W$ una aplicación lineal. Se cumplen las siguientes propiedades.

1. *T es un monomorfismo si, y solo si,* $\mathrm{N}(T) = \{0_V\}$.
2. *T es un epimorfismo si, y solo si,* $\mathrm{Im}(T) = W$.
3. *T es un isomorfismo si, y solo si,* $\mathrm{N}(T) = \{0_V\}$ *e* $\mathrm{Im}(T) = W$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 2.14 (Ejemplos 1.3 y 2.3)

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y) = (x+y, x-y, 3y)$.

- Su núcleo es
$$\mathrm{N}(T) = \{(0,0)\},$$
por lo que T es un monomorfismo.
- Su imagen es
$$\mathrm{Im}(T) = L\{(1,1,0),(1,-1,3)\}.$$
Al no ser la imagen igual a $\mathbb{R}^3$, T no es un epimorfismo.

Ejemplo 2.15 (Ejemplo 2.4)

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x+y, 2x+2y, x)$.

- Su núcleo es
$$\mathrm{N}(T) = L\{(0,0,1)\}.$$
Como el núcleo no es $(0,0,0)$, T no es un monomorfismo.
- Su imagen es
$$\mathrm{Im}(T) = L\{(1,2,1),(1,2,0)\}.$$
Al no ser la imagen igual a $\mathbb{R}^3$, T no es un epimorfismo.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 2.16 (Ejemplo 2.5)

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y, z) = (x - y, x + z)$.

- Su núcleo es
$$N(T) = L\{(1, 1, -1)\},$$
por lo que T no es un monomorfismo.
- Su imagen es
$$\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2,$$
lo que prueba que T es un epimorfismo.

Ejemplo 2.17 (Ejemplo 2.6)

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (x + y, x - 2y, x + y + z)$.

- Su núcleo es
$$N(T) = \{(0, 0, 0)\}.$$
Luego T es un monoformismo.
- Su imagen es
$$\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^3.$$
Por tanto, T es un epimorfismo.
- Al ser monoformismo y epimorfismo, T es un isomorfismo.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Resultado 3.1

- *Sea V un espacio vectorial tal que* $\dim(V) = n$.
- *Sean $B_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y $w_1, \ldots, w_n$ un conjunto de n vectores de W.*
- *Entonces existe una única aplicación lineal, $T : V \to W$, tal que*
$$T(v_i) = w_i, \; i = 1, \ldots, n.$$
- *O sea, una aplicación lineal está completamente determinada a partir de las imágenes de los vectores de una base de V (es decir, conociendo $T(v_1)$, $T(v_2)$, …, $T(v_n)$ para una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V).*

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 3.2 (Ejemplos 2.4 y 2.15)

Supongamos que

$$T(1,0,0)=(1,2,1),\ \ T(0,1,0)=(1,2,0),\ \ T(0,0,1)=(0,0,0).$$

Entonces se obtiene la aplicación lineal $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z)=(x+y,2x+2y,x).$$

En efecto, veamos que dicha afirmación es correcta.

$$\begin{aligned}
T(x,y,z) &= T\left(x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)\right)\\
&= T\left(x(1,0,0)\right)+T\left(y(0,1,0)\right)+T\left(z(0,0,1)\right)\\
&= xT(1,0,0)+yT(0,1,0)+zT(0,0,1)\\
&= x(1,2,1)+y(1,2,0)+z(0,0,0)\\
&= (x+y,2x+2y,x).
\end{aligned}$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Resultado 3.3

Sea $T : V \to W$ una aplicación lineal. Si $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V, entonces $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ es un sistema de generadores del subespacio imagen $\mathrm{Im}(T)$.

Ejemplo 3.4

Definamos un endomorfismo sobre el subespacio vectorial

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}.$$

- Sabemos que el subespacio V lo podemos describir en términos de sus ecuaciones paramétricas o en términos de la base que lo genera.

$$\begin{aligned} V &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \lambda + \mu,\ y = -\lambda,\ z = \mu,\ \text{con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= L\{(1, -1, 0), (1, 0, 1)\}. \end{aligned}$$

Ejemplo (3.4 cont.)

- Por tanto, para definir un endomorfismo debemos proporcionar las imágenes de los vectores de una base de V (siendo tales imágenes pertenecientes a V).
- Un posible endoformismo sería el dado por

$$T_1(1,-1,0) = (1,0,1), \;\; T_1(1,0,1) = (1,-1,0).$$

- También sería un endomorfismo el definido por

$$T_2(1,-1,0) = (1,-1,0) + (1,0,1), \;\; T_2(1,0,1) = (1,-1,0) - (1,0,1).$$

- En general, cualquier aplicación de la forma

$$T_3(1,-1,0) = \alpha_{11}(1,-1,0) + \alpha_{21}(1,0,1),$$

$$T_3(1,0,1) = \alpha_{12}(1,-1,0) + \alpha_{22}(1,0,1),$$

(con $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{12}, \alpha_{22} \in \mathbb{R}$) sería un endomorfismo en V.

Una propiedad fundamental de las aplicaciones lineales es la siguiente.

Resultado 3.5

Sea $T : V \to W$ una aplicación lineal. Entonces,

$$\dim V = \dim \mathrm{N}(T) + \dim \mathrm{Im}(T).$$

Ejemplo 3.6 (Ejemplos 2.4, 2.15 y 3.2)

La aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x,y,z) = (x+y, 2x+2y, x)$, tiene por núcleo e imagen los espacios

- $\mathrm{N}(T) = L\{(0,0,1)\}$,
- $\mathrm{Im}(T) = L\{(1,2,1),(1,2,0)\}$.

Es claro que

$$\dim V = \dim \mathbb{R}^3 = 3 = \dim \mathrm{N}(T) + \dim \mathrm{Im}(T) = 1 + 2.$$

Ejemplo 3.7 (Ejemplos 1.3, 2.3 y 2.14)

La aplicación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T(x,y) = (x+y, x-y, 3y)$, tiene por núcleo e imagen los espacios

- $\mathrm{N}(T) = \{(0,0)\}$,
- $\mathrm{Im}(T) = L\{(1,1,0),(1,-1,3)\}$.

Es evidente que

$$\dim V = \dim \mathbb{R}^2 = 2 = \dim \mathrm{N}(T) + \dim \mathrm{Im}(T) = 0 + 2.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- Sea una aplicación lineal, T, entre dos espacios vectoriales, V y W, de dimensión finita.
- Entonces T queda caracterizada por una matriz, denominada *matriz asociada a* T, a partir de la cual se pueden conocer todas las características de T.
- En efecto, sean $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V y $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base de W.
  Entonces cualquier vector $v \in V$ admite una única expresión del tipo
  $$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n,$$
  de donde, por la linealidad de T, tenemos que
  $$T(v) = x_1 T(v_1) + \cdots + x_n T(v_n).$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- Como $T(v_i) \in W$, $1 \leq i \leq n$, y B_W es una base de W, entonces $T(v_i)$ puede expresarse en términos de los vectores w_j, $1 \leq j \leq m$.
- Supongamos que las coordenadas de $T(v_i)$ respecto de B_W son

$$(T(v_i))_{B_W} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}, \; i = 1, \dots, n,$$

es decir, que

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11} w_1 + \cdots + a_{m1} w_m, \\ &\vdots \\ T(v_n) &= a_{1n} w_1 + \cdots + a_{mn} w_m. \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- Entonces,

$$
\begin{aligned}
T(v) &= x_1(a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m) + \cdots + x_n(a_{1n}w_1 + \cdots + a_{mn}w_m) \\
&= (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)w_1 + \cdots + (a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)w_m \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}_{B_W} \\
&= \left(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{B_V} \right)_{B_W}.
\end{aligned}
$$

- Acabamos de ver que es posible calcular las coordenadas de $T(v)$ en la base B_W a partir de las coordenadas de v en la base B_V.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Resultado 3.8

La matriz asociada a la aplicación lineal $T : V \to W$, respecto de las bases B_V y B_W, es la matriz $M(T, B_V, B_W)$ definida por columnas a partir de las coordenadas de los vectores $T(v_i)$, $1 \leq i \leq n$, respecto de la base B_W.
Es decir,

$$M(T, B_V, B_W) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

donde las columnas de la matriz están formadas por las coordenadas, en la base B_W, de las imágenes de los vectores de la base B_V.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Resultado 3.9

Sea $M(T, B_V, B_W)$ la matriz de la aplicación lineal $T : V \to W$ respecto de las bases B_V y B_W. Entonces,

1. $(T(x))_{B_W} = M(T, B_V, B_W)x_{B_V}$, $\forall x \in V$.
2. $\mathrm{N}(T) = \{x \in V \mid M(T, B_V, B_W)x_{B_V} = 0_W\}$.
3. $\mathrm{Im}(T) = \{y \in W \mid M(T, B_V, B_W)x_{B_V} = y_{B_W}$ *es un sistema compatible*$\}$.
4. $\mathrm{Im}(T) = L\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}$.
5. $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}\,(M(T, B_V, B_W))$.
6. *T es un isomorfismo si, y solo si, $M(T, B_V, B_W)$ es invertible.*

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 3.10

Sea la aplicación lineal

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \;\; T(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x + 2z, -x - y).$$

Queremos hallar la matriz asociada respecto de la base canónica, la imagen del vector $v = (1, 2, 3)$ y calcular el núcleo y la imagen de T.

- Las imágenes de los vectores de la base canónica son

  $$T(1, 0, 0) = (1, 2, -1), \;\; T(0, 1, 0) = (2, 0, -1), \;\; T(0, 0, 1) = (-1, 2, 0),$$

  por lo que la matriz de la aplicación es

  $$M(T, B_c, B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- La imagen del vector $v = (1, 2, 3)$ es

  $$T(v)_{B_c} = M(T, B_c, B_c)v_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{B_c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}_{B_c}.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (3.10 cont.)

- El núcleo y la imagen de T se pueden obtener fácilmente considerando la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \multicolumn{3}{c|}{\overbrace{\hphantom{-1 \quad 2 \quad -1}}^{\mathrm{Im}(B_c(\mathbb{R}^3))}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{1 \quad 0 \quad 0}}^{B_c(\mathbb{R}^3)}} \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

- Por un lado, en la sección de la izquierda tenemos las imágenes de los vectores de la base canónica por filas (o sea, la traspuesta de la matriz de la aplicación que acabamos de hallar).

- Por otro lado, en la sección de la derecha se encuentran los vectores de la base canónica por filas (o sea, los vectores de los que son imagen los vectores que se hallan a su izquierda).

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (3.10 cont.)

- Reduciendo dicha matriz, obtenemos

$$\left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix}1&2&-1\\2&0&-1\\-1&2&0\end{matrix}}^{\mathrm{Im}(B_c(\mathbb{R}^3))} & \overbrace{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}}^{B_c(\mathbb{R}^3)}\end{array}\right) \to \cdots \to \mathrm{Im}(T)\; \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix}\boxed{\begin{matrix}1&2&-1\\0&-4&1\end{matrix}}\\ \begin{matrix}0&0&0\end{matrix}\end{matrix}}^{\mathrm{Im}(B(\mathbb{R}^3))} & \overbrace{\begin{matrix}\begin{matrix}1&0&0\\-2&1&0\end{matrix}\\ \boxed{\begin{matrix}-1&1&1\end{matrix}}\end{matrix}}^{B(\mathbb{R}^3)}\end{array}\right) \to \mathrm{N}(T)$$

- Observando la última fila de la matriz reducida, vemos que la imagen del vector $(-1,1,1)$ es $(0,0,0)$, y por lo tanto este vector es el generador del núcleo.
- Y observando las dos primeras filas, vemos que los vectores $(1,0,0)$ y $(-2,1,0)$ tienen imágenes no nulas, que son $(1,2,-1)$ y $(0,-4,1)$. Por tanto, estos dos últimos vectores forman una base de la imagen.
- Por tanto,

$$N(T) = L\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}, \quad \mathrm{Im}(T) = L\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-4\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 3.11 (Ejemplo 1.6)

Consideremos la aplicación lineal $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3,\ T\left(p(x)\right) = xp(x)$.

Hallemos su matriz asociada respecto de las bases canónicas, su núcleo y su imagen.

- La imagen de los vectores de la base canónica de $\mathbb{P}_2$ es
$$T(1) = x, \quad T(x) = x^2, \quad T(x^2) = x^3.$$
- Por tanto, la matriz de la aplicación T en las bases canónicas de $\mathbb{P}_2$ y $\mathbb{P}_3$ es
$$M\left(T, B_c(\mathbb{P}_2), B_c(\mathbb{P}_3)\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
- Como la imagen de una base de $\mathbb{P}_2$ es un sistema de generadores de la imagen de T, tenemos que $\{x, x^2, x^3\}$ es un sistema de generadores de $\mathrm{Im}(T)$. Además, al ser linealmente independientes, son una base de $\mathrm{Im}(T)$,
$$\mathrm{Im}(T) = L\left\{x, x^2, x^3\right\}.$$
- Finalmente, como $\dim \mathbb{P}_2 = \dim \mathrm{N}(T) + \dim \mathrm{Im}(T)$, tenemos que $\dim \mathrm{N}(T) = 0$ y, por tanto,
$$\mathrm{N}(T) = 0.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- ¿Qué efecto tienen los cambios de base en los espacios vectoriales V y W de dimensión finita n y m, respectivamente, sobre la matriz asociada a una aplicación lineal $T : V \to W$?

- Sean C_V y B_V bases de V; sean C_W y B_W bases de W.
- Sea $M(T, C_V, C_W)$ la matriz asociada a T con respecto a las bases C_V y C_W.
- Sea $M(T, B_V, B_W)$ la matriz asociada a T con respecto a las bases B_V y B_W.

- Entonces, se puede probar que

$$\begin{aligned} M(T, B_V, B_W) &= M(C_W, B_W)M(T, C_V, C_W)M(B_V, C_V) \\ &= M(B_W, C_W)^{-1}M(T, C_V, C_W)M(B_V, C_V), \end{aligned}$$

donde $M(B_W, C_W)$ es la matriz de cambio de base de B_W a C_W y $M(B_V, C_V)$ es la matriz de cambio de base de B_V a C_V.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

El siguiente esquema representa el proceso seguido.

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] & W \\
C_V \arrow[r, "M(T{,}C_V{,}C_W)"] \arrow[d, shift left, "M(B_V{,}C_V)^{-1}"] & C_W \arrow[d, shift left, "M(B_W{,}C_W)"] \\
B_V \arrow[r, "M(T{,}B_V{,}B_W)"] \arrow[u, shift left, "M(B_V{,}C_V)"] & B_W \arrow[u, shift left, "M(B_W{,}C_W)^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 3.12 (Ejemplo 3.10)

Consideremos la aplicación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x + 2z, -x - y)$.
Hallemos la matriz asociada a T en la base $B_1 = \{(1, 2, -1), (0, 1, 1), (1, 0, -1)\}$.

- La matriz de T en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es

$$M(T, B_c, B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- La matriz de cambio de base de B_1 a canónica es

$$M(B_1, B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Por tanto la matriz asociada a T con respecto a la base B_1 vendrá dada por

$$\begin{aligned} M(T, B_1, B_1) &= M(B_c, B_1) M(T, B_c, B_c) M(B_1, B_c) \\ &= M(B_1, B_c)^{-1} M(T, B_c, B_c) M(B_1, B_c) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 3 & 0 & 1 \\ \frac{15}{2} & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (3.12 cont.)

- También podemos hallar la matriz de T calculando las imágenes de los vectores de la base B_1, esto es,

$$T(1,2,-1) = (6,0,-3),\ T(0,1,1) = (1,2,-1),\ T(1,0,-1) = (2,0,-1),$$

de modo que la matriz de T en la base B_1 (para el primer espacio $\mathbb{R}^3$) y en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ (para el segundo espacio $\mathbb{R}^3$) es

$$M(T, B_1, B_c) = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Entonces, usando la matriz de cambio de B_1 a B_c, tenemos que

$$\begin{aligned} M(T, B_1, B_1) &= M(B_c, B_1)M(T, B_1, B_c) \\ &= M(B_c, B_1)M(T, B_1, B_c)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 3 & 0 & 1 \\ \frac{15}{2} & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 4.1

Sea V un espacio vectorial euclídeo. Dada una aplicación lineal $f : V \to V$, se dice que f es una *isometría lineal* si, para cualesquiera $x, y \in V$, se verifica que

$$\langle x, y\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle.$$

Observación 4.2

Las isometrías lineales conservan la norma de los vectores y los ángulos entre vectores.

- $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\langle f(x), f(x)\rangle} = \|f(x)\|$, para $x \in V$.
- $\cos(\widehat{x, y}) = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|} = \frac{\langle f(x),f(y)\rangle}{\|f(x)\|\|f(y)\|} = \cos(\widehat{f(x), f(y)})$, para $x, y \in V$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Resultado 4.3

Sean V un espacio vectorial euclídeo y B base ortonormal de V. Entonces una aplicación lineal $f : V \to V$ es una isometría lineal si, y solo si, la matriz de la aplicación $M(f, B)$ es ortogonal; o sea, f es una isometría lineal si, y solo si,

$$(M(f, B))^{-1} = (M(f, B))^{T}.$$

Observación 4.4 (Clasificación)

Como el determinante de una matriz ortogonal es ± 1, las isometrías lineales se clasifican de la siguiente forma.

- Si $\det(M(f, B)) = +1$, se dice que la isometría lineal es propia o directa.
- Si $\det(M(f, B)) = -1$, se dice que la isometría lineal es impropia o indirecta.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 4.5

Consideremos la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = (y, x)$.

- T es una isometría lineal cuando consideramos el producto escalar usual en $\mathbb{R}^2$.
- En efecto, la matriz de T en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es

$$M(T, B_c, B_c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

  que es una matriz ortogonal, como podemos comprobar fácilmente,

$$M(T, B_c, B_c)\,(M(T, B_c, B_c))^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Además, puesto que

$$\det M\,(T, B_c, B_c) = -1,$$

  concluimos que T es una isometría lineal impropia.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 4.6

Consideremos la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \; T(x, y) = (2x, 2y)$.

- En este caso, T no es una isometría lineal para el producto escalar usual en $\mathbb{R}^2$.
- En efecto, la matriz de T en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es

$$M(T, B_c, B_c) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

  que no es ortogonal pues

$$M(T, B_c, B_c)\,(M(T, B_c, B_c))^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Por tanto, T no es una isometría lineal.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 4.7

Consideremos la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y, y-x)$.

- T es una isometría lineal cuando consideramos el producto escalar usual en $\mathbb{R}^2$.
- En efecto, la matriz de T en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es

$$M(T, B_c, B_c) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

  que es ortogonal pues

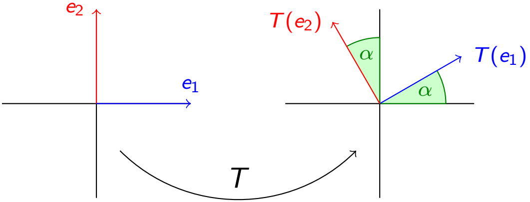
$$M(T, B_c, B_c)\,(M(T, B_c, B_c))^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Además, al ser

$$\det M(T, B_c, B_c) = 1,$$

  concluimos que T es una isometría lineal propia.

Giro de ángulo α (en torno al origen)



- Un giro de ángulo α en torno al origen es una aplicación ortogonal, pues conserva el ángulo entre los vectores (y, en consecuencia, la norma de vectores).
- La aplicación que define un giro de ángulo α en torno al origen es

$$G_\alpha(x, y) = (x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha, x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha).$$

Giro de ángulo α (cont.)

- La rotación de los elementos de la base canónica B_C de $\mathbb{R}^2$ es

$$G_\alpha(1,0) = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha), \quad G_\alpha(0,1) = (-\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha).$$

- Por tanto, la matriz del giro, en la base canónica, es

$$M(G_\alpha, B_C) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

- Como $\det M(G_\alpha, B_C) = \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$, tenemos que G_α es una isometría lineal propia.

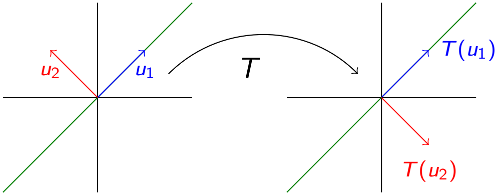
Ejemplo 4.8 (Giro de ángulo α)

La matriz de un giro de ángulo $\alpha = \pi/6$ en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es

$$M(G_{\pi/6}, B_C) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Simetría respecto a una recta



- Consideraremos una recta r que pase por el origen.
- En este caso no interesa tomar la base canónica, sino otra base que sea más adecuada para esta situación.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Simetría respecto a una recta (cont.)

- Aprovechando la ecuación de la recta, tomamos uno de sus vectores directores (unitarios) como uno de los vectores de la base, u_1.
- El otro vector, u_2, será un vector ortogonal a u_1 (y de norma uno).
- Así, la simetría respecto de la recta r se define como

$$S_r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ S_r(u_1) = u_1,\ S_r(u_2) = -u_2.$$

- Por tanto, la matriz de la simetría S_r, en la base $B = \{u_1, u_2\}$, es

$$M(S_r, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Además, como $\det M(S_r, B) = -1$, tenemos que S_r es una isometría lineal impropia.

Ejemplo 4.9 (Simetría respecto a una recta)

Hallemos la matriz de una simetría respecto a la recta $r \equiv x - 2y = 0$, en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

- Un vector director de la recta, con normal igual a uno, es
$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1).$$
- Un vector u_2, ortogonal a u_1 y con normal uno, es
$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2).$$
- La matriz de la simetría respecto a la recta r, en la base $B = \{u_1, u_2\}$, es
$$M(S_r, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (4.9, Simetría respecto a una recta, cont.)

- La matriz de cambio de la base B a la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es

$$M(B, B_c) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

- Por tanto, la matriz de la simetría, respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$, es

$$\begin{aligned} M(S_r, B_c) &= M(B, B_c)M(S_r, B)M(B_c, B) \\ &= M(B, B_c)M(S_r, B)\left(M(B, B_c)\right)^{-1} \\ &= M(B, B_c)M(S_r, B)\left(M(B, B_c)\right)^{T} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Simetría respecto a un plano vectorial

- Este caso es similar al de la simetría respecto a una recta.
- No conviene usar la base canónica, pues los cálculos son complejos.
- Tomamos dos vectores u_1 y u_2 del plano Π, ortogonales y unitarios, como los dos primeros vectores de la base a utilizar.
- El tercer vector será un vector unitario ortogonal a u_1 y u_2.
- Así, la simetría respecto del plano Π viene dada por

$$S_\Pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ S_\Pi(u_1) = u_1,\ S_\Pi(u_2) = u_2,\ S_\Pi(u_3) = -u_3.$$

- Por tanto, la matriz de tal simetría, en la base $B = \{u_1, u_2, u_3\}$, es

$$M(S_\Pi, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Como $\det M(S_\Pi, B) = -1$, concluimos que S_Π es una isometría lineal impropia.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 4.10 (Simetría respecto a un plano vectorial)

Hallemos la matriz de la simetría respecto al plano $\Pi \equiv x + y + z = 0$, en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

- Una base del plano es $\bar{B} = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\} = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$.
- Tras aplicar Gram-Schmidt a $\bar{B}$ y normalizar, tenemos

$$u_1 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \; u_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right).$$

- Un vector unitario ortogonal a u_1 y u_2 es

$$u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

- La matriz de la simetría respecto al plano Π, en la base $B = \{u_1, u_2, u_3\}$, es

$$M(S_\Pi, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (4.10, Simetría respecto a un plano vectorial, cont.)

- La matriz de cambio de la base B a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es

$$M(B, B_c) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

- Por tanto, la matriz de la simetría, en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, es

$$\begin{aligned} M(S_\Pi, B_c) &= M(B, B_c)M(S_\Pi, B)M(B_c, B) \\ &= M(B, B_c)M(S_\Pi, B)\left(M(B, B_c)\right)^{-1} \\ &= M(B, B_c)M(S_\Pi, B)\left(M(B, B_c)\right)^{T} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Giro de ángulo α respecto a una recta vectorial

- Tomamos una recta, que pase por el origen, como eje de giro.
- El primer elemento de la base, u_1, será un vector director de la recta (invariante respecto al giro) con norma igual a uno.
- Los otros dos elementos de la base, u_2 y u_3, serán dos vectores unitarios y ortogonales entre sí y, también, a u_1.
- Entonces la aplicación está definida por

$$G_\alpha^r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \left\{ \begin{array}{l} G_\alpha^r(u_1) = u_1, \\ G_\alpha^r(u_2) = u_2 \cos\alpha + u_3 \operatorname{sen}\alpha, \\ G_\alpha^r(u_3) = -u_2 \operatorname{sen}\alpha + u_3 \cos\alpha. \end{array} \right.$$

- La matriz del giro, en la base $B = \{u_1, u_2, u_3\}$, es

$$M(G_\alpha^r, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

- Como $\det M(G_\alpha^r, B) = 1$, es una isometría lineal propia.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 4.11 (Giro de ángulo α respecto a una recta vectorial)

Hallemos la matriz de un giro de ángulo $\alpha = \pi/3$ respecto a la recta r con vector director $(1, 1, -1)$, en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

- El vector director normalizado es $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
- Dos vectores ortogonales a u_1 son $\bar{u}_2 = (1, -1, 0)$, $\bar{u}_3 = (0, 1, 1)$.
- Ortonormalizando (mediante Gram-Schmidt), tenemos

$$u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \; u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

- La matriz del giro de ángulo $\alpha = \pi/3$ respecto a la recta r, en la base $B = \{u_1, u_2, u_3\}$, es

$$M(G^r_{\pi/3}, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (4.11, Giro de ángulo α respecto a una recta vectorial, cont.)

- La matriz de cambio de la base B a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es

$$M(B,B_c) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

- Por tanto, la matriz del giro de ángulo $\alpha = \pi/3$ respecto a la recta r, en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, es

$$\begin{aligned} M(G^r_{\pi/3}, B_c) &= M(B,B_c)M(G^r_{\pi/3}, B)M(B_c,B) \\ &= M(B,B_c)M(G^r_{\pi/3}, B)\left(M(B,B_c)\right)^{-1} \\ &= M(B,B_c)M(G^r_{\pi/3}, B)\left(M(B,B_c)\right)^{T} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Composición de una simetría respecto a un plano con un giro respecto al eje ortogonal a dicho plano

- Primero haremos la simetría respecto a un plano Π y después el giro de ángulo α respecto de la recta (eje) r ortogonal al plano.
- El primer vector, u_1, de la base ortonormal será un vector director unitario de la recta r, al cual no le afectará el giro (pero sí la simetría).
- Los otros dos vectores, u_2 y u_3, de la base serán dos vectores unitarios del plano Π ortogonales entre sí y, también, al vector u_1. Los vectores u_2 y u_3 no se verán afectados por la simetría, pero sí por el giro.
- La aplicación resultante queda definida por

$$S_\alpha^\Pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} S_\alpha^\Pi(u_1) = -u_1 \\ S_\alpha^\Pi(u_2) = u_2 \cos\alpha + u_3 \operatorname{sen}\alpha \\ S_\alpha^\Pi(u_3) = -u_2 \operatorname{sen}\alpha + u_3 \cos\alpha \end{cases}$$

- Finalmente, la matriz de la isometría lineal, con respecto a la base $B = \{u_1, u_2, u_3\}$, es

$$M(S_\alpha^\Pi, B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

- Como $\det M(S_\alpha^\Pi, B) = -1$, la isometría es lineal impropia.