UNIVERSIDAD
DE GRANADA

**Departamento de
Matemática Aplicada**

TEMA 2
Espacio vectorial y espacio vectorial euclídeo

"Matemática Aplicada"
Ingeniería Civil - Administración y Dirección de Empresas

11 de marzo de 2023

Índice

UNIVERSIDAD
DE GRANADA
Departamento de
Matemática Aplicada

Índice (cont.)

UNIVERSIDAD
DE GRANADA
Departamento de
Matemática Aplicada

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 1.1

Un *espacio vectorial real V* es un conjunto, cuyos elementos denominaremos *vectores*, dotado de dos leyes de composición, llamadas *"suma"* $(+)$ y *"producto por números reales"* o *"producto por escalares"* $(\cdot)$, y tal que se verifican las siguientes propiedades.

1. Asociativa de la suma.
$$(u+v)+w=u+(v+w),\ \forall u,v,w\in V$$
2. Conmutativa de la suma.
$$u+v=v+u,\ \forall u,v\in V$$
3. Existencia de elemento neutro para la suma.
$$\exists\, 0\in V \text{ tal que } u+0=0+u=u,\ \forall u\in V$$
4. Existencia de elemento opuesto para la suma.
$$\forall u\in V\ \ \exists(-u)\in V \text{ tal que } u+(-u)=(-u)+u=0$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición (1.1 cont.)

5. Distributiva respecto de la suma de vectores.
$$\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v,\ \forall\alpha\in\mathbb{R},\ \forall u,v\in V$$
6. Distributiva respecto de la suma de números reales (o escalares).
$$(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \forall u\in V$$
7. Pseudo-asociativa.
$$\alpha(\beta u)=(\alpha\beta)u,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \forall u\in V$$
8. Elemento identidad para el producto.
$$1u=u,\ \forall u\in V\ \ (1\in\mathbb{R})$$

El espacio vectorial real así definido se denotará por $(V;+,\cdot)$. Si bien, escribiremos simplemente V cuando las operaciones $(+)$ y $(\cdot)$ se sobreentiendan.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Observación 1.2

En lo que sigue, y para abreviar, hablaremos de *espacio vectorial* en lugar de *espacio vectorial real*.

Ejemplo 1.3

Son espacios vectoriales los siguientes conjuntos con las operaciones indicadas.

- El conjunto de n-uplas de $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$ con la suma de vectores y el producto por números reales usuales.
- El conjunto de matrices $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ con la suma de matrices y el producto por números reales usuales.
- El conjunto $\mathbb{P}_n = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$ con la suma de polinomios y el producto por números reales usuales.
- El conjunto de vectores $x \in \mathbb{R}^m$ tales que $Ax = 0_V$, donde $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ y $0_V \in \mathbb{R}^n$ es el vector nulo.
- El conjunto de funciones definidas en un intervalo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, con la suma de funciones y el producto por números reales usuales.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Resultado 1.4

Si V es un espacio vectorial, entonces se satisfacen las propiedades siguientes.

- $\alpha 0 = 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \ (0 \in V)$.
- $0u = 0,\ \forall u \in V$.

  ¡OJO! El 0 a la izquierda de la igualdad es un número real y el de la derecha es un vector.
- *Si* $\alpha u = 0$*, entonces* $\alpha = 0 \in \mathbb{R}$ *o* $u = 0 \in V$.
- $(-\alpha)u = -(\alpha u),\ \forall u \in V$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 1.5

Sean V un espacio vectorial y U un subconjunto de V. Diremos que U es un *subespacio vectorial* de V si U es un espacio vectorial para las mismas leyes (suma y producto por números reales) definidas en V.

Resultado 1.6

Sean V un espacio vectorial y $U \subseteq V$. Entonces U es un subespacio vectorial de V si, y solo si, se verifican las dos propiedades siguientes.

1. *Para todo $u, v \in U$ se tiene que $u + v \in U$.*
2. *Para todo $u \in U$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que $\alpha u \in U$.*

Resultado 1.7

Sean V un espacio vectorial y $U \subseteq V$. Entonces U es un subespacio vectorial de V si, y solo si, para cualesquiera $u, v \in U$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se verifica que $\alpha u + \beta v \in U$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 1.8

Veamos algunos ejemplos de subespacios vectoriales.

- Si V es un espacio vectorial, entonces $\{0\}$ y V son subespacios vectoriales de V, llamados *subespacios vectoriales triviales o impropios* de V. El resto se denominan *subespacios propios o no triviales* de V.
- Si $V = \mathbb{R}^n$, el subconjunto $\{(0, x_2, \ldots, x_n)\}$ (formado por los vectores de V cuya primera componente es nula) es un subespacio vectorial de V.
- En $V = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ son subespacios vectoriales
  - el conjunto de las matrices triangulares inferiores;
  - el conjunto de las matrices triangulares superiores;
  - el conjunto de las matrices diagonales;
  - el conjunto de las matrices simétricas ($A = A^t$);
  - el conjunto de las matrices antisimétricas ($A^t = -A$);
  - el conjunto de las matrices de traza nula.
- Si $V = \mathbb{P}_n$, el conjunto $U = \{a_0 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\}$ (formado por los polinomios que no tienen término en x) es un subespacio de V.
- Si $V = \{f : [a, b] \to \mathbb{R}\}$, el conjunto U formado por las funciones continuas en $[a, b]$ es un subespacio vectorial de V.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 1.9

Sea V un espacio vectorial y sean U_1 y U_2 subespacios de V.

- $U_1 + U_2 := \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in U_1, v_2 \in U_2\}$.
- $U_1 \cap U_2 := \{v \in V \mid v \in U_1, v \in U_2\}$.

Resultado 1.10

Sea V un espacio vectorial. Si U_1, U_2 son subespacios vectoriales de V, entonces $U_1 + U_2$ y $U_1 \cap U_2$ también son subespacios vectoriales de V.

Definición 1.11

Sean un espacio vectorial V y un subespacio vectorial suyo U. Se denomina *subespacio complementario de U* a cualquier subespacio vectorial $U^c \subseteq V$ tal que $U + U^c = V$ y $U \cap U^c = \{0\}$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 2.1

Sea V un espacio vectorial y sean $v_1, \ldots, v_m$ vectores de V. Se llama *combinación lineal* de dichos vectores a cualquier vector v obtenido de la forma

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R},$$

donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ son los escalares de la combinación lineal.

Resultado 2.2

Sea $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ un conjunto de m vectores. Entonces el conjunto de vectores de la forma

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R},$$

(esto es, las combinaciones lineales de vectores de S) es un subespacio vectorial de V.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 2.3

El subespacio vectorial descrito en el Resultado 2.2 se denomina *espacio generado por* S y es denotado por $L(S)$.

Resultado 2.4

Sea $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ *un conjunto de* m *vectores. Si* U *es un subespacio vectorial de* V *tal que* $S \subseteq U$*, entonces* $L(S) \subseteq U$*.*

Definición 2.5

Diremos que un conjunto de vectores $S = \{v_1, \ldots, v_m\} \subseteq V$ es un *sistema de generadores* (o *conjunto generador*) *de un subespacio vectorial* U si todo vector $u \in U$ se puede expresar de la forma $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m$ para ciertos escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ (equivalentemente, si U es el espacio generado por S; esto es, $U = L(S)$).

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Observación 2.6

Un espacio vectorial (o un subespacio vectorial) puede admitir un sistema de generadores formado por infinitos vectores.

Ejemplo 2.7

Un sistema de generadores de $\mathbb{P}[x]$ es $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$, que no es finito.

Observación 2.8

En este tema vamos a suponer que cualquier espacio vectorial V es *finitamente generado*, es decir, que V admite un sistema de generadores S finito (o sea, S está compuesto por número finito de vectores).

Ejemplo 2.9

Sea $\{v_1, \ldots, v_m\}$ un sistema de generadores de un espacio vectorial V. Entonces también son sistemas de generadores de V los siguientes conjuntos.

- $\{v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_m, v_{m+1}\}$, $v_{m+1} \in V$.
- $\{v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_m\}$.
- $\{v_1, \ldots, \alpha v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_m\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.
- $\{v_1, \ldots, v_i + \beta v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_m\}$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Definición 2.10

- Diremos que los vectores $\{v_1, \ldots, v_m\}$ de V forman un conjunto *linealmente independiente* si, dada una combinación lineal del tipo
$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0,$$
entonces se cumple necesariamente que
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0.$$
- En cualquier otro caso se dice que $v_1, \ldots, v_m$ son *linealmente dependientes*.

Resultado 2.11

Los vectores $v_1, \ldots, v_n$ de V son linealmente dependientes si, y solo si, alguno de ellos es una combinación lineal de los restantes.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Resultado 2.12

Sea $\{v_1, \ldots, v_m\}$ *un conjunto de vectores de* V*. Entonces se verifican los resultados siguientes.*

- *Los vectores* $\{v_1, \ldots, v_m, 0\}$ *son linealmente dependientes.*
- *Si los vectores* $\{v_1, \ldots, v_m\}$ *son linealmente dependientes entonces, para cualquier* $v \in V$*, los vectores* $\{v_1, \ldots, v_m, v\}$ *son linealmente dependientes.*
- *Si* $\{v_1, \ldots, v_{m-1}, v_m\}$ *son linealmente independientes entonces los vectores* $\{v_1, \ldots, v_{m-1}\}$ *son linealmente independientes.*
- *Si* $v_1 \neq 0$ *entonces* $\{v_1\}$ *es un conjunto de vectores linealmente independiente.*

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 3.1

Se dice que un conjunto de vectores $B = \{v_1, \dots, v_m\}$ de V es una *base* del espacio vectorial V si verifica las propiedades siguientes.

i) $B = \{v_1, \dots, v_m\}$ es un conjunto generador de V, esto es, $V = L(B)$.

ii) B es un conjunto de vectores linealmente independientes.

Resultado 3.2

Sean un espacio vectorial V y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Entonces todo vector $v \in V$ puede expresarse de forma única como una combinación lineal de los vectores B.

Definición 3.3

Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base del espacio vectorial V. Si un vector $v \in V$ se expresa (de forma única) como $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$, entonces los coeficientes $a_1, \dots, a_n$ se denominan *coordenadas de v en la base B*, denotándose por $v = (a_1, \dots, a_n)_B$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Resultado 3.4

Dado un espacio vectorial V, todas las bases de V tiene el mismo número de vectores.

Definición 3.5

Llamaremos *dimensión* de un espacio vectorial V al número de vectores de cualquiera de sus bases.

Resultado 3.6

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y consideremos el conjunto $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ formado por m vectores linealmente independientes de V.

- *Entonces existe un conjunto con $n - m$ vectores de V, $S' = \{w_{m+1}, \ldots, w_n\}$, tal que $\{v_1, \ldots, v_m, w_{m+1}, \ldots, w_n\}$ es una base de V.*
- *Además, el subespacio vectorial $L(S')$ es un subespacio complementario de $L(S)$.*

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Resultado 3.7

Dado un espacio vectorial V, se verifican las propiedades siguientes.

i) *Las coordenadas de un vector en una base dada son únicas.*
(¡OJO! Este es el Resultado 3.2).

ii) *Los vectores*
$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$
forman la llamada base canónica *de $\mathbb{R}^n$ (denotada por B_c).*

iii) *Las coordenadas del vector $v = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ en la base canónica son sus componentes, es decir, $v = (a_1, \ldots, a_n)_{B_c}$.*

Observación 3.8

La dimensión de $\mathbb{R}^n$ es n ya que la base canónica tiene n vectores.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Resultado 3.9

- *Sean* $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *y* $B' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ *dos bases de un espacio vectorial* V *de dimensión* n *y* $v \in V$.
- *Sea* P *la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de* B *en la base* B'.
- *Sean* $X = (x_1, \ldots, x_n)$ *y* $X' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ *las coordenadas de* v *en las bases* B *y* B'*, respectivamente.*
- *Entonces se cumple la igualdad* $X' = PX$.

Definición 3.10

- La igualdad $X' = PX$ (dada en Resultado 3.9) se denomina *ecuación del cambio de base de* B *a* B'.
- La matriz P (descrita en Resultado 3.9) se denomina *matriz del cambio de base de* B *a* B'.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Resultado 3.11

- *Sean* $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *y* $B' = \{v_1', \ldots, v_n'\}$ *dos bases de un espacio vectorial* V *de dimensión* n *y* $v \in V$.
- *Sea* P *la matriz formada por las coordenadas de los vectores de* B *en la base* B' *(dispuestas por columnas).*
- *Entonces* P^{-1} *es la matriz del cambio de base de* B' *a* B *y está constituida por las coordenadas de los vectores de* B' *en la base* B *(dispuestas por columnas).*
  Además, la ecuación matricial del cambio de base de B' *a* B *es* $X = P^{-1}X'$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

A continuación vamos a describir qué son y cómo llegar a las ecuaciones paramétricas de un subespacio vectorial.

- Sean V un espacio vectorial de dimensión n y $B_V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una de sus bases.
- Sean U un subespacio vectorial de V de dimensión $m < n$ y $B_U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ una de sus bases.
- Si $x \in U$, entonces existen escalares λ_i, $1 \leq i \leq m$, tales que
$$x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_m u_m. \tag{1}$$
- Por otra parte, puesto que también $x \in V$, entonces existen escalares x_i, $1 \leq i \leq n$, tales que
$$x = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n. \tag{2}$$
- ¿Qué relación hay entre las coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)_{B_V}$ y las coordenadas $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)_{B_U}$?

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- Como cada vector u_i pertenece al espacio vectorial V, entonces existen escalares a_{ij} tales que

$$
\begin{aligned}
u_1 &= a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n,\\
u_2 &= a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n,\\
&\vdots\\
u_m &= a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \cdots + a_{mn}v_n.
\end{aligned}
$$

- Sustituyendo estas expresiones en (1), obtenemos

$$
\begin{aligned}
x &= \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_m u_m\\
&= \lambda_1(a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n)+\\
&\quad \lambda_2(a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n)+\\
&\quad\quad \vdots\\
&\quad \lambda_m(a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \cdots + a_{mn}v_n).
\end{aligned}
$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- De donde,

$$
\begin{aligned}
x = {} & (\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \cdots + \lambda_m a_{m1}) v_1 + \\
& (\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \cdots + \lambda_m a_{m2}) v_2 + \\
& \vdots \\
& (\lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \cdots + \lambda_m a_{mn}) v_n.
\end{aligned}
$$

- Ahora, teniendo en cuenta (2) y la unicidad de coordenadas (en una misma base), deducimos que

$$
\left.
\begin{array}{c}
x_1 = \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \cdots + \lambda_m a_{m1} \\
x_2 = \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \cdots + \lambda_m a_{m2} \\
\vdots \\
x_n = \lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \cdots + \lambda_m a_{mn}
\end{array}
\right\} (\forall \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}). \qquad (3)
$$

Estas son las *ecuaciones paramétricas de U* (en la base B_V).

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- En forma matricial, las ecuaciones paramétricas de U (en la base B_V) vienen dadas por

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \quad (\forall \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}).$$

Ejemplo 4.1

Consideremos el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ dado por

$$U = L\left(\{(2,3,-1,1),(0,2,1,4),(4,4,-1,-2),(2,1,0,-3)\}\right).$$

Calculemos sus ecuaciones paramétricas en la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

- Tomamos

$$u_1 = (2,3,-1,1),\ u_2 = (0,2,1,4),\ u_3 = (4,4,-1,-2),\ u_4 = (2,1,0,-3).$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (4.1 cont.)

- Para calcular una base de U, formamos la matriz cuyas filas son los vectores generadores de U y estudiamos su rango.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

- Mediante transformaciones elementales, obtenemos una forma escalonada equivalente de dicha matriz.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (4.1 cont.)

- Observemos que las transformaciones empleadas han sido
  - en el primer paso: $F_3 - 2F_1$ y $F_4 - F_1$;
  - en el segundo paso: $F_3 + F_2$ y $F_4 + F_2$;
  - en el tercer paso: $F_4 - F_3$.
- Por tanto, en la matriz resultante,
  - la primera fila corresponde al vector u_1 y la segunda a u_2;
  - la tercera fila está asociada al vector $(u_3 - 2u_1) + u_2$ y la cuarta a $((u_4 - u_1) + u_2) - ((u_3 - 2u_1) + u_2)$.
- De esta forma,

$$\begin{aligned} U &= L\left(\{u_1, u_2, u_3 + u_2 - 2u_1, u_4 - u_3 + u_1\}\right) \\ &= L\left(\{(2,3,-1,1),(0,2,1,4),(0,0,2,0),(0,0,0,0)\}\right) \\ &= L\left(\{(2,3,-1,1),(0,2,1,4),(0,0,2,0)\}\right). \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (4.1 cont.)

- Como el rango de la matriz resultante es igual a tres, una base de U es
$$\{(2,3,-1,1),(0,2,1,4),(0,0,2,0)\}\,.$$
Por cierto, los vectores de la base están expresados en coordenadas respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$.
- Si $(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$ son las coordenadas de un vector de U, en la base canónica de $\mathbb{R}^4$, entonces
$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2\\ 3\\ -1\\ 1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0\\ 2\\ 1\\ 4\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 2\\ 0\end{pmatrix}, \quad \text{con } \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{R}.$$
- Así, concluimos que
$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2\lambda_1\\ x_2 &= 3\lambda_1 + 2\lambda_2\\ x_3 &= -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3\\ x_4 &= \lambda_1 + 4\lambda_2 \end{aligned}\right\} (\forall \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{R}), \qquad (4)$$
son las ecuaciones paramétricas de U.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Veamos ahora qué son y cómo llegar a las ecuaciones implícitas o cartesianas de un subespacio vectorial.

- Consideremos un subespacio vectorial U de un espacio vectorial V.
- Supongamos que las ecuaciones paramétricas de U (con respecto a cierta base B_V) vienen dadas por un conjunto de n ecuaciones paramétricas que involucran m parámetros.
- Entonces es posible despejar los parámetros de ciertas ecuaciones y sustituirlos en las restantes, con lo que obtenemos $n - m$ ecuaciones en las que no aparecen los parámetros y que, además, constituyen un sistema homogéneo.
- El conjunto de dichas $n - m$ ecuaciones se conoce como *ecuaciones implícitas* o *cartesianas* de U.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Resultado 4.2

En un espacio vectorial V, sea S un conjunto formado por un número finito de vectores linealmente independientes de V. Si $U = L(S)$ es el subespacio vectorial de V generado por S, entonces el número de ecuaciones cartesianas de U es igual a $\dim V - \dim U$.

Ejemplo 4.3

- Aplicando el Resultado 4.2 al subespacio U del Ejemplo 4.1, tenemos que el número de ecuaciones cartesianas de U es igual a $4 - 3 = 1$.
- A partir de las ecuaciones paramétricas de U dadas en (4),
  - $\lambda_1 = \frac{1}{2}x_1$;
  - $\lambda_2 = \frac{1}{2}(x_2 - 3\lambda_1) = \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{4}x_1$;
  - $\lambda_3 = \frac{1}{2}\left(x_3 + \lambda_1 - \lambda_2\right) = \frac{1}{2}x_3 + \frac{5}{8}x_1 - \frac{1}{4}x_2$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (4.3 cont.)

- Ahora, sustituyendo en la última ecuación de (4), tenemos que $x_4 = \frac{x_1}{2} + 2x_2 - 3x_1$, de donde (tras operar adecuadamente)

$$5x_1 - 4x_2 + 2x_4 = 0$$

  es la ecuación cartesiana de U.

- Obtengamos el mismo resultado usando notación matricial. En efecto, la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

  no debe alcanzar rango 4 (¿por qué?).

- Así, un vector cualquiera (x_1, x_2, x_3, x_4) de U debe ser combinación lineal de los vectores de la base $\{(2,3,-1,1),(0,2,1,4),(0,0,2,0)\}$ de U.

- Imponiendo que $\det M = 0$, resulta que $5x_1 - 4x_2 + 2x_4 = 0$ es la ecuación cartesiana de U.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (4.3 cont.)

- Veamos un tercer modo de obtener las ecuaciones cartesianas. Para ello debemos observar que cualquier vector (x_1, x_2, x_3, x_4) de U tiene que expresarse, de forma única, como combinación de los vectores $(2, 3, -1, 1), (0, 2, 1, 4), (0, 0, 2, 0)$ (al ser estos una base de U).
- Por tanto, el sistema (cuyas incógnitas son $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$)

$$\left.\begin{aligned} &2\lambda_1 = x_1 \\ &3\lambda_1 + 2\lambda_2 = x_2 \\ &-\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = x_3 \\ &\lambda_1 + 4\lambda_2 = x_4 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

debe ser compatible determinado (pues (x_1, x_2, x_3, x_4) pertenece a U).
- Operando con la matriz ampliada del sistema (5), tenemos que

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & x_1 \\ 3 & 2 & 0 & x_2 \\ -1 & 1 & 2 & x_3 \\ 1 & 4 & 0 & x_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & x_4 \\ 2 & 0 & 0 & x_1 \\ 3 & 2 & 0 & x_2 \\ -1 & 1 & 2 & x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & x_4 \\ 0 & -8 & 0 & x_1 - 2x_4 \\ 0 & -10 & 0 & x_2 - 3x_4 \\ 0 & 5 & 2 & x_3 + x_4 \end{pmatrix} \to$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (4.3 cont.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & x_4 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2x_4-x_1}{8} \\ 0 & -10 & 0 & x_2-3x_4 \\ 0 & 5 & 2 & x_3+x_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & x_4 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2x_4-x_1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & x_2-3x_4+10\frac{2x_4-x_1}{8} \\ 0 & 0 & 2 & x_3+x_4-5\frac{2x_4-x_1}{8} \end{pmatrix}.$$

- No es necesario intercambiar las filas tercera y cuarta para comprobar que el sistema (5) es compatible determinado si, y solo si,

$$x_2 - 3x_4 + 10\frac{2x_4 - x_1}{8} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{8x_2 - 24x_4 + 20x_4 - 10x_1}{8} = 0 \;\Rightarrow$$

$$8x_2 - 24x_4 + 20x_4 - 10x_1 = 0 \;\Rightarrow\; 8x_2 - 4x_4 - 10x_1 = 0 \;\Rightarrow$$

$$5x_1 - 4x_2 + 2x_4 = 0.$$

- Y, de nuevo, obtenemos que $5x_1 - 4x_2 + 2x_4 = 0$ es la ecuación cartesiana de U.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 4.4

- Siendo $S = \{(-1,0,2,1),(3,0,0,-1),(1,0,4,1),(0,0,6,2)\}$, calculemos una base de $U = L(S)$, su dimensión y sus ecuaciones tanto paramétricas como cartesianas.

- Efectuando transformaciones elementales en la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix},$$

obtenemos la matriz equivalente (por filas)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (4.4 cont.)

- Por tanto, una base de U es $\{(1,0,-2,-1),(0,0,3,1)\}$, su dimensión es $\dim U = 2$ y las ecuaciones paramétricas vienen dadas por

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \lambda \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= -2\lambda + 3\mu \\ x_4 &= -\lambda + \mu \end{aligned}\right\} (\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}). \tag{6}$$

- Despejando λ en la primera ecuación y μ en la cuarta, podemos sustituir ambos parámetros en la tercera.
- Así, teniendo en cuenta la segunda ecuación del sistema (6) (que no tiene parámetros), obtenemos las ecuaciones cartesianas de U,

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (4.4 cont.)

- Obtengamos las ecuaciones implícitas de U de otro modo. Para ello, en el sistema (6), consideramos que λ, μ son las incógnitas.
- En tal caso, la matriz ampliada viene dada por $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & x_2 \\ -2 & 3 & x_3 \\ -1 & 1 & x_4 \end{array}\right)$.
- Aplicando transformaciones elementales, tenemos la matriz escalonada reducida
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_1 + x_4 \\ 0 & 0 & -x_1 + x_3 - 3x_4 \\ 0 & 0 & x_2 \end{array}\right).$$
- Ya que, para cualquier vector de U, las coordenadas en la base calculada existen y son únicas, este último sistema debe ser compatible determinado y, por tanto, los dos últimos términos independientes deben ser nulos.
- Así, concluimos que las ecuaciones cartesianas de U son
$$\left.\begin{array}{r} x_1 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array}\right\}.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 4.5

- Sea el subespacio vectorial de $U \subseteq \mathbb{R}^4$ con ecuaciones cartesianas

$$\left.\begin{array}{r} x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{array}\right\}.$$

  Calculemos las ecuaciones paramétricas, una base y la dimensión de U. Por cierto, ¿pertenece el vector $(1,1,1,1)$ a este subespacio vectorial?

- Las ecuaciones paramétricas se pueden obtener como la solución del sistema compatible indeterminado que constituyen las ecuaciones cartesianas.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -6 & 3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

  (¡Compruébese que la matriz reducida obtenida es correcta!).

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (4.5 cont.)

- Por tanto, las ecuaciones paramétricas de U son

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 3\lambda - 2\mu \\ x_2 &= \tfrac{3}{2}\lambda - \tfrac{1}{2}\mu \\ x_3 &= \lambda \\ x_4 &= \mu \end{aligned}\right\} \ (\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

- Así, $B = \{(6,3,2,0),(4,1,0,-2)\}$ es una base de U (¿por qué?) y $\dim U = 2$.
- Finalmente, podemos asegurar que el vector $(1,1,1,1)$ pertenece a U puesto que verifica sus ecuaciones cartesianas.
- Otra forma de comprobar la pertenencia de $(1,1,1,1)$ a U es viendo que

$$(1,1,1,1) = \frac{1}{2}(6,3,2,0) - \frac{1}{2}(4,1,0,-2),$$

lo que equivale a decir que $(1,1,1,1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)_B$.

Definición 5.1

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Un *producto escalar* en V es una aplicación

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \ : V \times V \to \mathbb{R}$$

que verifica las siguientes propiedades.

1. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ para todo $u, v \in V$.
2. $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$ para todo $u, v, w \in V$.
3. $\langle u, \alpha v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$ para todo $u, v \in V$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. $\langle u, u \rangle \geq 0$ para todo $u \in V$.
5. $\langle u, u \rangle = 0$ si, y solo si, $u = 0$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 5.2

Veamos algunos ejemplos de productos escalares en los espacios vectoriales indicados.

- $\langle u, v\rangle = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$, para cualesquiera $u = (u_1, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$.
- $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx$, para cualesquiera $f, g \in C([a, b])$ (es decir, f, g son funciones continuas en $[a, b]$).
- En particular, $\langle p, q\rangle = \displaystyle\int_a^b p(x)q(x)dx$, para cualesquiera $p, q \in \mathbb{P}_n$ y $[a, b] \subset \mathbb{R}$.
- $\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{ij}$, para cualesquiera $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{n\times m}$.

Definición 5.3

Un espacio vectorial V dotado de un producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ se denomina *espacio vectorial euclídeo* y se denota por $(V; \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Definición 6.1

Sean $(V; \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y $u, v \in V$. Entonces se define

- la norma del vector u como $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$;
- el ángulo que determinan u y v como el ángulo $(\widehat{u, v}) \in [0, \pi]$ tal que
$$\cos(\widehat{u, v}) = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}.$$

Definición 6.2

- Decimos que dos vectores, u y v, son *vectores ortogonales* si $\langle u, v\rangle = 0$. Tal situación se denota por $u \perp v$.
- Un vector u se dice *unitario* si $\|u\| = 1$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 6.3

Sean $(V; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V.

- Decimos que B es una *base ortogonal* de V si sus vectores son ortogonales dos a dos; es decir, si $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ para todo $i \neq j$.
- Decimos que B es una *base ortonormal* de V si es ortogonal y, además, todos sus vectores son unitarios; es decir, si
  - ⋆ $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ para todo $i \neq j$,
  - ⋆ $\|v_i\| = 1$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Resultado 6.4

Sean $(V; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortonormal de V. Entonces, se verifica que

$$u = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \cdots + \langle u, v_n \rangle v_n \ \text{ para todo } u \in V.$$

Es decir, $(\langle u, v_1 \rangle, \langle u, v_2 \rangle, \ldots, \langle u, v_n \rangle)$ son las coordenadas de u en la base B.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Resultado 6.5 (Método de Ortogonalización de Gram-Schmidt)

Sean $(V; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base dada de V.

- *Los vectores $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ definidos por*

$$
\begin{aligned}
u_1 &= v_1, \\
u_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1, \\
u_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2, \\
&\vdots \\
u_n &= v_n - \frac{\langle v_n, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_n, u_2 \rangle}{\|u_n\|^2} u_2 - \ldots - \frac{\langle v_n, u_{n-1} \rangle}{\|u_{n-1}\|^2} u_{n-1},
\end{aligned}
$$

  forman una base ortogonal de V.

- *Además, $\left\{ \frac{u_1}{\|u_1\|}, \ldots, \frac{u_n}{\|u_n\|} \right\}$ es una base ortonormal de V.*

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 6.6

Sean $(V; \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y U un subespacio vectorial de V.

- Un vector $v \in V$ se dice *ortogonal a U* si es ortogonal a todo vector de U, lo que se denota por $v \perp U$.

Resultado 6.7

Sean $(V; \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y U un subespacio vectorial de V.

- *El conjunto $U^\perp$ formado por todos los vectores ortogonales a U es un subespacio vectorial de V.*

$U^\perp$ se denomina complemento ortogonal de U (respecto de V).

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Observación 6.8

Sea $S = \{u_1, \dots, u_m\}$ una base de U. Entonces, por linealidad, tenemos que

$$v \perp U \text{ si, y solo si, } \langle v, u_i \rangle = 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, m.$$

Imponiendo estas m condiciones a un vector genérico $v \in V$ obtendremos las ecuaciones cartesianas de $U^\perp$. Por tanto $\dim U^\perp = n - m$.

Ejemplo 6.9

- Consideremos el subespacio vectorial $U \subseteq \mathbb{R}^4$ generado por los vectores $\{(6,3,2,0),(4,1,0,-2)\}$.
  Entonces las ecuaciones cartesianas de $U^\perp$ son

$$\left.\begin{array}{r} 6v_1 + 3v_2 + 2v_3 = 0 \\ 4v_1 + v_2 - 2v_4 = 0 \end{array}\right\}.$$

  Además, $\{(1,-4,3,0),(1,-2,0,1)\}$ es una base de $U^\perp$.
  (Por cierto, ¿cómo se ha calculado dicha base? Hágase).

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Observación 7.1

En un espacio vectorial euclídeo $(V; \langle\cdot,\cdot\rangle)$, consideremos un conjunto de vectores linealmente independientes $S = \{u_1, \dots, u_m\} \subset V$. Además, sean $U = L(S)$ y $\{u_{m+1}, \dots, u_n\}$ una base de $U^\perp$.

- Si $v \in V$, entonces

$$v = a_1 u_1 + \cdots + a_m u_m + \ a_{m+1} u_{m+1} + \cdots + a_n u_n$$

y, por tanto, $v = u + w$ con

$$u = a_1 u_1 + \cdots + a_m u_m \in U,$$
$$w = v - u = a_{m+1} u_{m+1} + \cdots + a_n u_n \in U^\perp.$$

Definición 7.2

Sean $(V; \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio vectorial euclídeo, U un subespacio vectorial de V y $v \in V$.

Se llama *proyección ortogonal de v sobre U* al (único) vector $u \in U$ tal que $(v - u) \perp U$, que se denota por $u = p_U(v)$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Para obtener $u = p_U(v)$ podemos distinguir dos situaciones posibles.

1. Consideramos $\{u_1, \ldots, u_n\}$ base ortogonal de $(V; \langle\cdot,\cdot\rangle)$ tal que $\{u_1, \ldots, u_m\}$ es base de U y $\{u_{m+1}, \ldots, u_n\}$ es base de $U^\perp$.
   - Si $v \in V$, entonces

$$\begin{aligned} v = \quad & \tfrac{\langle v, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \cdots + \tfrac{\langle v, u_m\rangle}{\|u_m\|^2} u_m + \\ & \tfrac{\langle v, u_{m+1}\rangle}{\|u_{m+1}\|^2} u_{m+1} + \cdots + \tfrac{\langle v, u_n\rangle}{\|u_n\|^2} u_n. \end{aligned}$$

   - Por tanto, la proyección ortogonal de v sobre U es

$$p_U(v) = \frac{\langle v, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \cdots + \frac{\langle v, u_m\rangle}{\|u_m\|^2} u_m.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

2. Supongamos ahora que $(V; \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio vectorial euclídeo y que $S = \{u_1, \ldots, u_m\}$ es una base (no necesariamente ortogonal) de un subespacio vectorial U de V.

   - Si $v \in V$ y $u = p_U(v)$, entonces $\langle v - u, w\rangle = 0$ para todo $w \in U$. Por tanto, $\langle v - u, u_j\rangle = 0$ para todo $j = 1, \ldots, m$.
   - Ahora, si $u = a_1 u_1 + \cdots + a_m u_m$, entonces

     $$\langle v - a_1 u_1 - \cdots - a_m u_m, u_j\rangle = 0,\ j = 1, \ldots, m,$$

     es decir,

     $$\left.\begin{array}{rcl} \langle u_1, u_1\rangle a_1 + \cdots + \langle u_m, u_1\rangle a_m & = & \langle v, u_1\rangle \\ & \vdots & \\ \langle u_1, u_m\rangle a_1 + \cdots + \langle u_m, u_m\rangle a_m & = & \langle v, u_m\rangle \end{array}\right\}. \qquad (7)$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Resultado 7.3 (Teorema de la mejor aproximación)

Sean $(V; \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y U un subespacio vectorial de V.
Dado $v \in V$, la proyección ortogonal de v sobre U es el único vector $u = p_U(v) \in U$ que hace mínima la expresión $\|v - u\|$, esto es,

$$\|v - u\|^2 < \|v - w\|^2 \text{ para todo } w \in U,\ w \neq u.$$

Por tanto, u minimiza la distancia de v a los vectores de U.

Definición 7.4

En las condiciones del Resultado 7.3, $u = p_U(v)$ se denomina *mejor aproximación* (o *aproximación por mínimos cuadrados*) de v en U.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Observación 7.5

- La mejor aproximación de v sobre U es el único vector dado por la expresión $u = a_1 u_1 + \cdots + a_m u_m$ de U, siendo $a = (a_1, \ldots, a_m)$ la solución del sistema compatible determinado

$$P\,a^T = b,$$

donde

$$P = \begin{pmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \cdots & \langle u_m, u_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle u_1, u_m \rangle & \cdots & \langle u_m, u_m \rangle \end{pmatrix}$$

y $b = (\langle v, u_1 \rangle, \ldots, \langle v, u_m \rangle)^T$.

- La matriz (simétrica) P se denomina *matriz de Gram* asociada a la base $\{u_1, \ldots, u_m\}$ de U.

- Por cierto, el sistema $P\,a^T = b$ es justamente el sistema (7).