UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Departamento de
Matemática Aplicada

TEMA 1
Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

"Matemática Aplicada"
Ingeniería Civil - Administración y Dirección de Empresas

28 de febrero de 2023

Índice

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Índice (cont.)

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 1.1 (Pivote)

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$ una matriz (de números reales). Llamaremos *pivote* de una fila de A al primer elemento no nulo de dicha fila.

Definición 1.2 (Matrices escalonadas)

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$ una matriz. Diremos que A es una *matriz escalonada por filas* si se satisfacen las siguientes condiciones.

1. Si existen, las filas nulas de A están agrupadas en la parte inferior de la matriz.
2. El pivote de cada fila no nula está a la derecha del pivote de la fila inmediatamente por encima.

(Una fila de una matriz A es una *fila nula* si está formada solo por ceros. En caso contrario, diremos que es una *fila no nula*).

Ejemplo 1.3 (Matrices escalonadas)

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & * & * \\ 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & \blacksquare \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \blacksquare & * & * \\ 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 1.4 (Matrices no escalonadas)

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & \blacksquare & * \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & \blacksquare & * \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \end{pmatrix}.$$

(En los Ejemplos 1.3 y 1.4, los símbolos $\blacksquare$ y $*$ representan valores reales no nulos y valores reales arbitrarios, respectivamente).

Es posible describir analíticamente la noción de matriz escalonada. Si

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

entonces la i-esima fila de A es

$$A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im}).$$

Si $r = r(A)$ es el número de filas no nulas de A, entonces

$$r = \#\{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid A_i \neq 0\},$$

donde $0 = (0, \ldots, 0)$ representa la fila nula.

(Si C es un conjunto cualquiera, $\#C$ denota al número de elementos de C).

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Sea A_i una fila **no nula**. Entonces su pivote, $p_i = p_i(A)$, es

$$p_i = \text{mín}\left\{j \in \{1, 2, \ldots, m \mid a_{ij} \neq 0\}\right\}.$$

Resultado 1.5

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$ una matriz real. Entonces A es escalonada si se cumplen las siguientes condiciones (siendo $r \leq n$).

1. *$A_i \neq 0$ para $1 \leq i \leq r$ y $A_i = 0$ para todo $i > r$.*
2. *$p_1 < p_2 < \cdots < p_r$.*

Ejemplo 1.6

Aquí A es una matriz escalonada, pero B y C no lo son. ¿Por qué?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 1.7

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$ una matriz real. Diremos que A es *escalonada reducida por filas* si es escalonada y, además, se satisfacen las siguientes propiedades (siendo $r \leq n$).

1. En cada fila no nula A_i el pivote es igual a 1, es decir, $a_{ip_i} = 1,\ 1 \leq i \leq r$.
2. En cada columna que contenga un pivote, los valores por encima del correspondiente pivote son todos nulos, es decir, $a_{kp_i} = 0,\ 2 \leq i \leq r,\ 1 \leq k \leq i-1$.

Ejemplo 1.8

Las siguientes matrices son escalonadas reducidas por filas.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 1.9

Se llama *transformación elemental por filas* de una matriz a cualquiera de los siguientes procesos.

- Intercambio de dos filas entre sí.
- Producto de una fila por un número real no nulo cualquiera.
- Suma a una fila de cualquier otra fila multiplicada por un número real cualquiera.

Definición 1.10

Dos matrices A, B se dicen equivalentes por filas si B se obtiene a partir de A mediante transformaciones elementales por filas. Denotaremos este hecho por $A \sim_f B$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 1.11

Transformemos la siguiente matriz en una escalonada equivalente.

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Empezamos permutando las filas primera y tercera.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

A continuación restamos, a la segunda fila, la primera multiplicada por cuatro.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -12 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ahora restamos, a la tercera fila, la primera multiplicada por dos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -12 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -12 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Dividimos la segunda fila por -2 y cambiamos de signo la tercera.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -12 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & 3 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Finalmente restamos, a la tercera fil, la segunda multiplicada por $5/6$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & -3 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{19}{6} & -\frac{13}{6} \end{pmatrix}$$

En definitiva,

$$G \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{19}{6} & -\frac{13}{6} \end{pmatrix}.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

A partir del Ejemplo 1.11, tenemos que la matriz G es equivalente por filas a una matriz escalonada.

Otras transformaciones elementales producirán otras matrices (escalonadas o no) equivalentes por filas a G.

El procedimiento que se ha utilizado anteriormente, completado de manera adecuada (¿cómo?), conduce al siguiente resultado.

Resultado 1.12

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$, existe una única matriz $B \in \mathcal{M}_{n\times m}$ escalonada reducida equivalente a A, es decir, tal que $A \sim_f B$.

Definición 2.1

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ una matriz cuadrada real. Diremos que A es *regular* si existe $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que $AB = BA = I_n$, donde I_n representa la matriz identidad de orden n. En tal caso, B se llama *inversa* de A.

Ejemplo 2.2

Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3,$$

y $BA = I_3$ (¡compruébese!), se verifica que B es la inversa de A.

Por cierto, como B es la inversa de A, entonces A es la inversa de B (¿por qué?).

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Resultado 2.3

La matriz inversa de una matriz dada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, si existe, es única.

La inversa de A se denota por A^{-1}.

Ejemplo 2.4

En el caso visto en el Ejemplo 2.2,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un resultado bastante interesante para el cálculo de matrices inversas es el siguiente.

Resultado 2.5

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ una matriz regular. Entonces la matriz $(A|I_n)$ es equivalente por filas a la matriz escalonada reducida $(I_n|A^{-1})$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 2.6

Volvamos al Ejemplo 2.2 y apliquemos el Resultado 2.5 para comprobar que B es la inversa de A.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_f \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_f$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Por cierto, ¿cuáles han sido las transformaciones empleadas? (Pista: dos en el primer paso y una en el segundo).

Por tanto,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Resultado 2.7

Si las matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tienen inversa, entonces AB es invertible y se verifica que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Demostración.

- A invertible $\Rightarrow$ Existe A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.
- B invertible $\Rightarrow$ Existe B^{-1} tal que $B \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot B = I$.
- Es claro que

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A \cdot I \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

  y que

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1} \cdot I \cdot B = B^{-1} \cdot B = I.$$

- Por tanto, existe C tal que $(AB)C = C(AB) = I$, es decir, AB es invertible.
- Además, $(AB)^{-1} = C = B^{-1}A^{-1}$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Para introducir el concepto de determinante de una matriz necesitamos previamente el concepto de permutación.

Definición 2.8

Una *permutación* de n elementos es una aplicación biyectiva

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & (1,2,\ldots,n) & \longmapsto & (1,2,\ldots,n) \\ & i & \longrightarrow & \sigma(i) \end{array}$$

La permutación σ transforma la n-upla $(1,2,\ldots,n)$ en la n-upla $(\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n))$. Así, escribiremos

$$\sigma(1,2,\ldots,n) = (\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n)).$$

Ejemplo 2.9

Una permutación de 3 elementos es $\sigma(1,2,3) = (2,3,1)$, es decir,

$$\sigma(1) = 2, \quad \sigma(2) = 3, \quad \sigma(3) = 1.$$

Notemos por $\mathcal{P}_n$ al conjunto formado por todas las permutaciones de n elementos.

Se verifica que $\#\mathcal{P}_n = n! = 1 \cdot 2 \cdots n$. En particular, $\#\mathcal{P}_1 = 1$, $\#\mathcal{P}_2 = 2! = 2$, $\#\mathcal{P}_3 = 3! = 6$, $\#\mathcal{P}_4 = 4! = 24$, $\ldots$.

Ejemplo 2.10

- $\mathcal{P}_1 = \{(1)\}$.
- $\mathcal{P}_2 = \{(1,2),(2,1)\}$.
- $\mathcal{P}_3 = \{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}$.

A continuación veremos el concepto *inversión en una permutación*. Para facilitar su comprensión, en lugar de hacerlo analíticamente, usaremos un ejemplo.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 2.11

Consideremos la permutación $\sigma(1,2,3,4) = (2,4,1,3)$.

- Comenzamos con el elemento que aparece en la primera posición: 2.
  - Con respecto al valor que aparece en segunda posición (o sea, 4), 2 conserva el orden (2 es menor que 4): no hay inversión.
  - Con respecto al valor que aparece en tercera posición (o sea, 1), 2 no conserva el orden (2 no es menor que 1): hay una inversión.
  - En lo que se refiere al elemento de la cuarta posición (esto es, 3), 2 sí conserva el orden (2 es menor que 3): no hay inversión.
- Pasemos ahora a considerar el valor que ocupa la segunda posición, 4, y comparémoslo con los que se encuentran a su derecha.
  - 4 no es menor que 1 o 3: hay dos inversiones.
- Si nos fijamos en el valor que ocupa la tercera posición, 1, está bien ubicado respecto del único que hay a su derecha (1 es menor que 3), por lo que no hay inversión.

En definitiva, la permutación σ dada presenta tres inversiones.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 2.12

Si $i(\sigma)$ representa el número de inversiones de la permutación σ, entonces la *signatura* de σ es el valor $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{i(\sigma)}$.

Ya estamos en condiciones de definir el concepto de determinante de una matriz cuadrada.

Definición 2.13

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Se define el determinante de A como sigue.

$$\det A = \sum_{\sigma\in\mathcal{P}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

A veces se usa la notación $|A|$ para el determinante de A.

Observación 2.14

Es evidente que el determinante de la matriz $A = (a_{11})$ es $\det A = a_{11}$ pues la única permutación de $\mathcal{P}_1$ es $\sigma(1) = 1$.

Observación 2.15

Para hallar el determinante de una matriz cuadrada de orden 2,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

consideramos $\mathcal{P}_2 = \{\sigma_1(1,2) = (1,2) \text{ y } \sigma_1(1,2) = (2,1)\}$. Como $\varepsilon(\sigma_1) = 1$ y $\varepsilon(\sigma_2) = -1$, entonces

$$\det A = \varepsilon(\sigma_1) a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} + \varepsilon(\sigma_2) a_{1\sigma_2(1)} a_{2\sigma_2(2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Observación 2.16

Hallemos ahora la expresión del determinante de una matriz de orden tres,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Para ello consideramos las seis permutaciones de $\mathcal{P}_3$. A saber,

$$\sigma_1(1,2,3) = (1,2,3),\ \sigma_2(1,2,3) = (1,3,2),\ \sigma_3(1,2,3) = (2,1,3),$$
$$\sigma_4(1,2,3) = (2,3,1),\ \sigma_5(1,2,3) = (3,1,2),\ \sigma_6(1,2,3) = (3,2,1).$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Es fácil comprobar que

$$\varepsilon(\sigma_1) = \varepsilon(\sigma_4) = \varepsilon(\sigma_5) = 1 \text{ y que } \varepsilon(\sigma_2) = \varepsilon(\sigma_3) = \varepsilon(\sigma_6) = -1 \text{ (¡hacerlo!)}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\det A = {} & \varepsilon(\sigma_1)a_{1\sigma_1(1)}a_{2\sigma_1(2)}a_{3\sigma_1(3)} + \varepsilon(\sigma_4)a_{1\sigma_4(1)}a_{2\sigma_4(2)}a_{3\sigma_4(3)} + \\ & \varepsilon(\sigma_5)a_{1\sigma_5(1)}a_{2\sigma_5(2)}a_{3\sigma_5(3)} + \varepsilon(\sigma_2)a_{1\sigma_2(1)}a_{2\sigma_2(2)}a_{3\sigma_2(3)} + \\ & \varepsilon(\sigma_3)a_{1\sigma_3(1)}a_{2\sigma_3(2)}a_{3\sigma_3(3)} + \varepsilon(\sigma_6)a_{1\sigma_6(1)}a_{2\sigma_6(2)}a_{3\sigma_6(3)} \Rightarrow \\ \det A = {} & (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{3,2}) - \\ & (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{3,1}) \Rightarrow \\ \det A = {} & (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{3,1}) - \\ & (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11}).\end{aligned}$$

Se obtiene así la llamada *Regla de Sarrus*. Gráficamente (más o menos),

$\oplus$ $\ominus$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

La expresión explícita, para el determinante de una matriz de orden cuatro, contiene $4! = 24$ sumandos. Por este motivo, se hace necesario establecer métodos alternativos para el cálculo de un determinante.

Definición 2.17

Sea una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$.

- Se define el *menor complementario del elemento a_{ij}* de A (denotado por Λ_{ij}) como el determinante de la submatriz que resulta de eliminar la fila i y la columna j en la matriz A.
- Se define el *adjunto del elemento a_{ij}* de A como el número real $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Lambda_{ij}$.
- La matriz formada por los adjuntos de los elementos de A se denomina *matriz adjunta* de A y se denota por $\mathrm{adj}(A)$, esto es, $\mathrm{adj}(A) = (A_{ij})$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 2.18

Consideremos una matriz genérica de orden dos, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

- El menor complementario del elemento a_{11} es $\Lambda_{11} = a_{22}$, por lo que su adjunto es $A_{11} = (-1)^{1+1}\Lambda_{11} = a_{22}$.
- El menor complementario de a_{12} es $\Lambda_{12} = a_{21}$, de donde $A_{12} = (-1)^{1+2}\Lambda_{12} = -a_{21}$.
- Para a_{21}, se tiene que $\Lambda_{21} = a_{12}$ y, por tanto, $A_{21} = (-1)^{2+1}\Lambda_{21} = -a_{12}$.
- Por último, el menor complementario de a_{22} es $\Lambda_{22} = a_{11}$ y su adjunto es $A_{22} = (-1)^{2+2}\Lambda_{22} = a_{11}$.

Por tanto, la matriz adjunta de la matriz A dada es

$$\operatorname{adj}(A) = \operatorname{adj}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 2.19

Sea la matriz cuadrada de orden 3 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Para hallar la adjunta de B, a partir de la definición,

$$\operatorname{adj}(B) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Mediante el concepto de adjunto tenemos un nuevo método para calcular el determinante de una matriz.

Resultado 2.20

Sea una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}$.

1. *Para cualquier índice* i $(1 \leq i \leq n)$ *se verifica que*

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

   (Desarrollo por filas)

2. *Para cualquier índice* j $(1 \leq j \leq n)$ *se verifica que*

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.$$

   (Desarrollo por columnas)

Ejemplo 2.21

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Para calcular su determinante, desarrollamos por la primera fila ($i = 1$).

$$
\begin{aligned}
\det A &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} \\
&= 1 \cdot (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\
&\quad + 1 \cdot (-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+4} \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
&= 1 \cdot 1 \cdot 10 + (-1) \cdot (-1) \cdot 25 + 1 \cdot 1 \cdot 20 + 2 \cdot (-1) \cdot 5 \\
&= 10 + 25 + 20 - 10 = 45.
\end{aligned}
$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (2.21 cont.)

También se puede desarrollar por los elementos de la segunda fila ($i = 2$), lo que requiere menos cálculos ya que dos elementos de dicha fila son nulos.

$$\begin{aligned}\det A &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24} \\ &= 2 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{24} \\ &= 2 \cdot A_{21} - A_{23}.\end{aligned}$$

Por tanto, solo hay que calcular dos adjuntos. Como

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 5$$

y

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = -35,$$

concluimos que

$$\det A = 2 \cdot A_{21} - A_{23} = 2 \cdot 5 - (-35) = 45.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Veamos, sin demostración, varios resultados útiles para calcular determinantes.

Resultado 2.22

Sean $A, B, A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{M}_{n\times n}$ matrices cuadradas de orden n.

- *El determinante de A coincide con el determinante de su traspuesta A^T, es decir,* $\det A = \det(A^T)$.
- *El determinante de A cambia de signo si se intercambian dos filas (o dos columnas) entre sí.*
- *El determinante de A no varía si a una fila o columna se le suma otra multiplicada por cualquier número real.*
- *Si de una fila o columna de A se extrae un factor común a todos sus elementos, el determinante de A es igual al factor extraído por el determinante de la matriz resultante tras la extracción de dicho factor común.*

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \lambda a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \lambda a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Resultado (2.22 cont.)

- *Si la i-ésima fila (o columna) de* A_1 *es la suma de las i-ésimas filas (o columnas) de* A_2 *y* A_3*, entonces* $\det A_1 = \det A_2 + \det A_3$*. Esto es,*

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} + a_{1i}^* & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} + a_{ni}^* & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}^* & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}^* & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

- *Si una matriz tiene una fila (o columna) de ceros, el determinante es cero.*
- *Si una matriz tiene dos filas (o columnas) iguales o proporcionales, entonces su determinante es cero.*
- *Si una fila (o columna) se obtiene como combinación lineal de otras filas (o columnas), entonces el determinante es cero.*
- *El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de sus determinantes. Esto es,* $\det(AB) = \det A \det B$.

Ejemplo 2.23

Podemos calcular el determinante del Ejemplo 2.21 utilizando algunas de las propiedades anteriores. En concreto, si a la segunda fila le restamos dos veces la primera ($F_2 - 2F_1$), a la tercera cuatro veces la primera ($F_3 - 4F_1$) y, finalmente, a la cuarta la primera ($F_4 - F_1$), entonces

$$
\begin{aligned}
\det A &= \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2-2\cdot 1 & 0-2\cdot(-1) & -1-2\cdot 1 & 0-2\cdot 2 \\ 4-4\cdot 1 & 3-4\cdot(-1) & 2-4\cdot 1 & 1-4\cdot 2 \\ 1-1 & 2-(-1) & 3-1 & 4-2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 7 & -2 & -7 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ahora se puede desarrollar por los elementos de la primera columna, que tiene todos sus elementos nulos excepto el primero. Por tanto,

$$
\det A = 1 \cdot (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 7 & -2 & -7 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.
$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (2.23 cont.)

En lugar de emplear la Regla de Sarrus, sigamos aplicando las propiedades de Resultado 2.22.

$$
\begin{aligned}
\det A &= \det\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 7 & -2 & -7 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4+2 \\ 7 & -2 & -7+7 \\ 3 & 2 & 2+3 \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 7 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \\
&= (-2)\cdot(-1)^{1+3}\det\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + 5\cdot(-1)^{3+3}\det\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \\
&= -2\cdot 20 + 5\cdot(-4+21) = -40+85 = 45.
\end{aligned}
$$

¿Qué propiedades se han usado?

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Usando determinantes, podemos hallar la inversa de una matriz regular.

Resultado 2.24
Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Entonces A es invertible si y solo si $\det A \neq 0$.
En caso afirmativo,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,(\operatorname{adj} A)^T.$$

Ejemplo 2.25
Haciendo uso del resultado anterior, hallemos la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo (2.25 cont.)

- $\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -3 \Rightarrow A$ es regular.
- $\operatorname{adj} A = \operatorname{adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
- $A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\operatorname{adj} A)^T = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^T = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Por tanto,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 2.26

Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times m}$ tales que $A \sim_f B$ y B es escalonada. Se llama *rango* de A, y se denota por $\operatorname{rg} A$, al número de filas no nulas de B.

Observación 2.27

Se deduce, por la unicidad de la matriz escalonada reducida, que el rango de una matriz es independiente de la matriz escalonada que se considere. En consecuencia, dos matrices equivalentes por filas tienen el mismo rango.

El rango de una matriz se puede caracterizar mediante submatrices regulares (o por determinantes).

Resultado 2.28

El rango de una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$ coincide con el mayor orden posible de las submatrices cuadradas regulares de A.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 2.29

Usando el Resultado 2.28, vamos a calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- $(a_{11}) = (1) \neq (0) \Rightarrow \operatorname{rg} A \geq 1.$
- Tomado a_{11} como elemento fijo, las posibles submatrices de A formadas con elementos de la primera y segunda filas son

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \; B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \; B_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\det(B_1) = 0, \; \det(B_2) = 0, \; det(B_3) = 5 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} A \geq 2.$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (2.29 cont.)

- Fijando B_3 como submatriz regular de orden 2 de A, formamos submatrices de orden 3 utilizando los elementos de la tercera fila.

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\det(C_1) = 0,\ \det(C_2) = 0 \Rightarrow$ no hay submatrices regulares de orden 3.

Por lo tanto, $\operatorname{rg} A = 2$.

¿Sería más rápido calcular el rango hallando una matriz escalonada equivalente (usando transformaciones elementales)? Inténtese.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 3.1

- Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones del tipo

$$\left.\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\cdots & +a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\cdots & +a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +\cdots & +a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}\right\}.$$

- Matricialmente, el sistema se escribe de la forma $Ax = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

- A es la *matriz de coeficientes* del sistema, x es el *vector de incógnitas* del sistema y b es el *vector de términos independientes* del sistema.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 3.2

Sea $Ax = b$ un sistema de ecuaciones lineales con matriz de coeficientes $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$, vector de incógnitas $x \in \mathcal{M}_{m\times 1}$ y vector de términos independientes $b \in \mathcal{M}_{n\times 1}$.
Se dice que $s \in \mathcal{M}_{m\times 1}$ es una solución del sistema $Ax = b$, si al sustituir x_1 por s_1, x_2 por s_2, $\ldots$, x_m por s_M, se satisfacen todas las igualdades.

Ejemplo 3.3

¿Es $s = (2,1,3,0)^T$ una solución del sistema

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 - x_2 + x_3 & = & 4 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 & = & -3 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 & = & 16 \\ 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 & = & 7 \end{array}\right\}?$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 3.4

Sea $Ax = b$, un sistema de ecuaciones lineales con matriz de coeficientes $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$, vector de incógnitas $x \in \mathcal{M}_{m\times 1}$ y vector de términos independientes $b \in \mathcal{M}_{n\times 1}$. El sistema es

- *compatible determinado* si tiene una única solución x,
- *compatible indeterminado* si tiene infinitas soluciones,
- *incompatible* si no tiene solución.

El sistema se dice *compatible* si es compatible determinado o indeterminado.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Resultado 3.5 (Teorema de Rouché-Frobenius)

Sea $Ax = b$ un sistema de ecuaciones lineales, con matriz de coeficientes $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$, vector de incógnitas $x \in \mathcal{M}_{m\times 1}$ y vector de términos independientes $b \in \mathcal{M}_{n\times 1}$.
Notemos por $(A|b) \in \mathcal{M}_{n\times(m+1)}$ a la matriz ampliada del sistema.

- *Si $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|b) = m$, entonces el sistema es compatible determinado.*
- *Si $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|b) < m$, entonces el sistema es compatible indeterminado.*
- *Si $\operatorname{rg} A \neq \operatorname{rg}(A|b)$, entonces el sistema es incompatible.*

Observación 3.6

- m es, justamente, el número de incógnitas del sistema.
- El Teorema de Rouché-Frobenius es también conocido como Teorema de Kronecker-Capelli (Rusia), Teorema de Rouché-Capelli (Italia), o Teorema de Rouché-Fontené (Francia).

Ejemplo 3.7

Estudiemos el carácter del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcr} x+y+z & = & 1 \\ x-2y+2z & = & 0 \\ 2x-y+4z & = & -1 \end{array}\right\}.$$

- La matriz de coeficientes del sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.
- La matriz ampliada del sistema es $(A|b)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.
- Como $\det A=-3$, se cumple que $\operatorname{rg} A=3$.
- Como A es un menor de orden 3 de la matriz $(A|b)$, y no puede haber menores de orden 4, se cumple que $\operatorname{rg}(A|B)=3$.
- Conclusión: como $\operatorname{rg} A=\operatorname{rg}(A|B)=3$ y 3 es el número de incógnitas del sistema, entonces el sistema es compatible determinado.

Por cierto, ¿cómo hallaremos la única solución del sistema en este ejemplo?

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- Consideremos una matriz cuadrada A de orden n y que $\operatorname{rg} A = n$.
- Entonces el sistema $Ax = b$ es compatible determinado (como en el Ejemplo 3.7).
- La única solución del sistema $Ax = b$ se puede calcular
  - a partir de la inversa de A (puesto que $x = A^{-1}b$),
  - aplicando transformaciones elementales (como se verá más adelante),
  - o mediante la Regla de Cramer.
- Recordemos que, por la Regla de Cramer, la $i-$ésima componente de la solución es

$$x_i = \frac{\det \widetilde{A}_i}{\det A},$$

donde $\widetilde{A}_i$ es la matriz obtenida el reemplazar la columna $i-$ésima de A por el vector b de términos independientes.

Ejemplo 3.8

Resolvamos el sistema del Ejemplo 3.7 usando la Regla de Cramer.

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}} = \frac{-10}{-3} = \frac{10}{3}, \quad y = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3},$$

$$z = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}} = \frac{6}{-3} = -2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 3.9

Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x + y + z + w & = & 0 \\ -4x - 2y + z - 5w & = & 7 \\ 7x + \frac{7}{2}y + 2z + 8w & = & 9 \end{array}\right\}.$$

En forma matricial, el sistema viene dado como $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 1 & -5 \\ 7 & \frac{7}{2} & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

- $\det(a_{11}) = \det(2) = 2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} A \geq 1.$
- $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} A \geq 2.$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (3.9 cont.)

- $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & -5 \\ 7 & 2 & 8 \end{pmatrix} = 18 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} A \geq 3.$
- Como el sistema solo tiene tres ecuaciones, entonces $\operatorname{rg} A = 3$.
- Además, $\operatorname{rg}(A|b) = 3$.
- Como $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|b)$, el sistema es compatible.
- Como el número de incógnitas es 4, el sistema es compatible indeterminado. Pero, ¿qué incógnita "sobra"?
- Como el menor de mayor orden en A se ha formado a partir de las columnas primera, tercera y cuarta, la incógnita "sobrante" es la que corresponde a la segunda columna, es decir, la incógnita y.
- Por tanto, tomando $y = \lambda$ (parámetro), el sistema auxiliar a resolver es

$$\left.\begin{array}{rcc} 2x + z + w & = & -\lambda \\ -4x + z - 5w & = & 7 + 2\lambda \\ 7x + 2z + 8w & = & 9 - \frac{7}{2}\lambda \end{array}\right\}.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (3.9 cont.)

- Teniendo en cuenta que el determinante, de la matriz de coeficientes del sistema auxiliar, es igual a 18 (¿por qué?), aplicando la Regla de Cramer tenemos que

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 7+2\lambda & 1 & -5 \\ 9-\frac{7}{2}\lambda & 2 & 8 \end{pmatrix}}{18} = \frac{-9\lambda - 96}{18} = -\frac{3\lambda+32}{6},$$

$$z = \frac{\det\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 1 \\ -4 & 7+2\lambda & -5 \\ 7 & 9-\frac{7}{2}\lambda & 8 \end{pmatrix}}{18} = \frac{13}{2},$$

$$w = \frac{\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -\lambda \\ -4 & 1 & 7+2\lambda \\ 7 & 2 & 9-\frac{7}{2}\lambda \end{pmatrix}}{18} = \frac{25}{6}.$$

- Así pues, la solución del sistema (original) es

$$(x, y, z, w)^T = \left(-\frac{3\lambda+32}{6}, \lambda, \frac{13}{2}, \frac{25}{6}\right)^T, \text{ para cualquier } \lambda \in \mathbb{R}.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Resultado 3.10 (Básico para estudiar sistemas de ecuaciones lineales)

Sea $Ax = b$ un sistema de ecuaciones lineales, con n ecuaciones y m incógnitas, tal que $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$ es escalonada y $k = \operatorname{rg} A$.

- *El sistema es incompatible si, y solo si, existe una fila i de A que es nula y tal que b_i es no nulo (¿por qué?).*
- *El sistema es compatible determinado si, y solo si, es compatible y $k = m$ (esto es, $\operatorname{rg} A$ es igual al número de incógnitas).*

  La única solución se obtiene despejando las incógnitas y sustituyéndolas hacia atrás, desde la última ecuación no nula hasta la primera.
- *El sistema es compatible indeterminado si, y solo si, es compatible y $k < m$ (esto es, $\operatorname{rg} A$ es menor que el número de incógnitas).*

  Las incógnitas correspondientes a las k columnas que hacen que el rango de A sea igual a k se llaman incógnitas dependientes y las $m - k$ restantes se llaman incógnitas libres.

  El número $m - k$ es el número de grados de libertad del sistema.

  El sistema se resuelve a partir de un sistema auxiliar en el que se despejan las incógnitas dependientes y, además, a cada incógnita libre se le asigna un valor paramétrico.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Resultado 3.11

Si se transforma la matriz ampliada, de un sistema de ecuaciones lineales, en otra mediante transformaciones elementales, entonces el sistema resultante tiene las mismas soluciones que el inicial.

Observación 3.12

- El Resultado 3.11, junto con el el Resultado 3.10, es la base de los métodos de Gauss y de Gauss-Jordan para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.
- Concretamente, la idea subyacente de ambos métodos es transformar, mediante el Resultado 3.11, un sistema dado en un sistema escalonado y, posteriormente, estudiar este último aplicando el Resultado 3.10.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- El *método de Gauss* para la discusión y resolución de un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, con $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$ y $b \in \mathbb{R}^n$, consiste en transformar la matriz $(A|b)$ en una matriz escalonada equivalente por filas que, gracias al Resultado 3.11, tendrá el mismo conjunto de soluciones.

- El *método de Gauss-Jordan* para la discusión y resolución de un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, con $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$ y $b \in \mathbb{R}^n$, consiste en transformar la matriz $(A|b)$ en una matriz escalonada reducida equivalente por filas que, gracias al Resultado 3.11, tendrá el mismo conjunto de soluciones.

- La principal ventaja de ambos métodos es que la discusión, mediante el Resultado 3.10, de sistemas cuya matriz ampliada es escalonada o escalonada reducida resulta muy simple de realizar. Además, la resolución de tales tipos de sistema también es bastante simple.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 4.1

Discutamos y resolvamos, en su caso, el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & & 3x_2 & - & 4x_3 & = & -1 \\ x_1 & - & 3x_2 & & & = & -2 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}\right\} .$$

Para llevar a cabo este problema, consideramos la matriz ampliada asociada y la transformamos en una matriz escalonada equivalente mediante transformaciones elementales por filas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4 - 2F_1 \to F_4]{F_3 - F_1 \to F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4 - 3F_2 \to F_2]{F_3 + 2F_2 \to F_3}$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (4.1 cont.)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow -F_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_4+3F_3 \leftrightarrow F_4}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Por tanto, como $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|b) = 3$, que es el número de incógnitas, concluimos que el sistema es compatible determinado.

El sistema equivalente asociado es

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_2 - x_3 & = & 0 \\ x_3 & = & 1 \end{array}\right\}.$$

Ahora, despejando y sustituyendo de abajo arriba, tenemos que la solución es

$$(x_1, x_2, x_3)^T = (1, 1, 1)^T.$$

Ejemplo 4.2

Discutamos y resolvamos, en su caso, el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & 3x_2 & - & 4x_3 & = & -1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \end{array}\right\}.$$

Consideramos la matriz ampliada asociada y la transformamos en una matriz escalonada equivalente.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{F_3 - F_1 \to F_3 \\ F_4 - 2F_1 \to F_4}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{F_3 - F_2 \to F_3 \\ F_4 - F_2 \to F_4}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3}F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (4.2 cont.)

Por tanto, como $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|b) = 2$, que es menor que el número de incógnitas, entonces el sistema es compatible indeterminado.

El sistema equivalente es

$$\left.\begin{array}{rcc} x_1 - x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_2 - \frac{4}{3}x_3 & = & -\frac{1}{3} \end{array}\right\}.$$

Si k representa el número de incógnitas del sistema, entonces $k - \operatorname{rg} A = 1$, por lo que hay 1 grado de libertad en el sistema.

Ahora, eligiendo como parámetro la incógnita x_3 (por ejemplo, $x_3 = \lambda$) y despejando el resto de las incógnitas, tenemos el sistema

$$\left.\begin{array}{rcc} x_1 - x_2 & = & 1 - \lambda \\ x_2 & = & -\frac{1}{3} - \frac{4}{3}\lambda \end{array}\right\},$$

cuya solución general es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\lambda \\ -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 4.3

Discutamos y resolvamos el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & & & & 4x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 3x_2 & - & 3x_3 & = & -4. \end{array}\right\}.$$

Empezamos transformando la matriz ampliada del sistema en una escalonada equivalente.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & -3 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & -3 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4 - 4F_1 \rightarrow F_4]{\substack{F_2 + 2F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3 - 2F_1 \rightarrow F_3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & -11 & 9 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -11 & 9 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{7} F_2 \rightarrow F_2}$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (4.3 cont.)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -11 & 9 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4+11F_2\to F_4]{F_3-4F_2\to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}F_3\to F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_4+2F_3\to F_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}F_4\to F_4}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Por tanto, como aparece una ecuación del tipo $0 = 1$, el sistema es incompatible.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 4.4

Discutamos y resolvamos, por el método de Gauss-Jordan, el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & & 3x_2 & - & 4x_3 & = & -1 \\ x_1 & - & 3x_2 & & & = & -2 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}\right\}.$$

Transformamos la matriz ampliada en una escalonada equivalente.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F_3 - F_1 \to F_3 \\ F_4 - 2F_1 \to F_4}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4 - 3F_2 \to F_4]{\substack{F_1 + F_2 \to F_1 \\ F_3 + 2F_2 \to F_3}}$$

Ejemplo (4.4 cont.)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{3}F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F_2+F_3 \to F_2 \\ F_4+F_3 \to F_4}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Por tanto, como $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|b) = 3$, que es el número de incógnitas, entonces el sistema es compatible determinado.

El sistema equivalente es

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 & = & 1 \\ x_2 & = & 1 \\ x_3 & = & 1 \end{array}\right\},$$

cuya solución es, obviamente,

$$(x_1, x_2, x_3)^T = (1, 1, 1)^T.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Queremos reducir (esto es, transformar) el siguiente sistema a un *sistema triangular superior* equivalente.

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x-2y+5z &=& 6\\ 2x+3y+z &=& 13\\ -x+4y-4z &=& 3 \end{array}\right\}$$

Paso 1. Con ayuda de la primera ecuación, efectuamos operaciones elementales para conseguir nuevas ecuaciones segunda y tercera cuyos coeficientes en x sean iguales a 0.

$$\begin{array}{r} \\ (E_2-E_1)\\ (E_3+\frac{1}{2}E_1) \end{array}\quad \left.\begin{array}{rcl} 2x-2y+5z &=& 6\\ 5y-4z &=& 7\\ 3y-\frac{3}{2}z &=& 6 \end{array}\right\}$$

Paso 2. Con ayuda de la segunda ecuación, efectuamos operaciones elementales para conseguir una nueva ecuación tercera cuyo coeficiente en y sea igual a 0.

$$\begin{array}{r} \\ \\ (E_3-\frac{3}{5}E_2) \end{array}\quad \left.\begin{array}{rcl} 2x-2y+5z &=& 6\\ 5y-4z &=& 7\\ \frac{9}{10}z &=& \frac{9}{5} \end{array}\right\}$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

El nuevo sistema es equivalente al inicial y es de tipo triangular superior.

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x-2y+5z & = & 6 \\ 5y-4z & = & 7 \\ \frac{9}{10}z & = & \frac{9}{5} \end{array}\right\}$$

Para resolverlo usaremos sustitución regresiva.

$$\frac{9}{10}z=\frac{9}{5}\Longrightarrow z=2$$

$$5y-4z=7\Longrightarrow 5y-8=7\Longrightarrow y=3$$

$$2x-2y+5z=6\Longrightarrow 2x-6+10=6\Longrightarrow x=1$$

Usando notación matricial, el proceso que acabamos de ver sería el siguiente.

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 13 \\ -1 & 4 & -4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & -\frac{3}{2} & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & \frac{9}{10} & \frac{9}{5} \end{pmatrix}$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

En general, queremos reducir el sistema

$$\left.\begin{array}{r}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3\end{array}\right\}$$

a un sistema de tipo triangular superior equivalente.

Paso 0. Escribimos el sistema original de la forma

$$\left.\begin{array}{r}a_{11}^{(0)}x_1 + a_{12}^{(0)}x_2 + a_{13}^{(0)}x_3 = b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)}x_1 + a_{22}^{(0)}x_2 + a_{23}^{(0)}x_3 = b_2^{(0)} \\ a_{31}^{(0)}x_1 + a_{32}^{(0)}x_2 + a_{33}^{(0)}x_3 = b_3^{(0)}\end{array}\right\}.$$

Paso 1. Si $a_{11}^{(0)} \neq 0$, efectuamos operaciones elementales para conseguir nuevas ecuaciones segunda y tercera con coeficientes nulos en x_1.

$$\left.\begin{array}{lr} & a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = b_1^{(1)} \\ (E_2 - \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}E_1) & a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = b_2^{(1)} \\ (E_3 - \frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}E_1) & a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = b_3^{(1)} \end{array}\right\}$$

donde $a_{1j}^{(1)} = a_{1j}^{(0)}$, $j = 1, 2, 3$, y $b_1^{(1)} = b_1^{(0)}$.

Paso 2. Si $a_{22}^{(1)} \neq 0$, con ayuda de la segunda ecuación, efectuamos operaciones elementales para conseguir una nueva ecuación tercera cuyo coeficiente en x_2 sea igual a 0.

$$\left.\begin{array}{lr} & a_{11}^{(2)}x_1 + a_{12}^{(2)}x_2 + a_{13}^{(2)}x_3 = b_1^{(2)} \\ & a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = b_2^{(2)} \\ (E_3 - \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}E_2) & a_{33}^{(2)}x_3 = b_3^{(2)} \end{array}\right\}$$

donde $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)}$, $i = 1, 2$, $i \leq j \leq 3$, y $b_i^{(2)} = b_i^{(1)}$, $i = 1, 2$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- La aplicación de la Regla de Cramer no es un procedimiento adecuado para resolver un sistema de ecuaciones lineales, pues obliga a realizar, incluso cuando la matriz de coeficientes es de orden bajo, un gran número de operaciones. Se suele decir que Cramer es un *método costoso*.
- Sin embargo, los métodos de Gauss y Gauss-Jordan son más *baratos* y adecuados para emplear en un ordenador.
- En este sección veremos algunos procedimientos básicos que son, incluso, mejores que el método de Gauss.
- Comenzaremos recordando cómo resolver los *sistemas triangulares superiores* con igual número de ecuaciones e incógnitas. Esto es, sistemas cuya matriz de coeficientes es una *matriz cuadrada triangular superior.*

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- Sea A una matriz cuadrada tal que $a_{i,j} = 0$ cuando $i > j$, es decir,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

- Sea $b = (b_1, \ldots, b_n)^T$ el vector de términos independientes.
- Entonces el sistema $Ax = b$ puede escribirse como

$$\left.\begin{array}{rcc} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n & = & b_{n-1} \\ a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}\right\}. \qquad (1)$$

- Es claro que el sistema (1) tiene solución (única) si y sólo si

$$a_{i,i} \neq 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

En lo que sigue, supondremos que se cumple esta condición.

- Despejando x_n en la última ecuación, obtenemos

$$x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}.$$

Tenemos así el valor de la componente $n-$ésima de la solución s del sistema, es decir,

$$s_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}.$$

- Conocido s_n, sustituimos en la penúltima ecuación del sistema (1) y despejamos x_{n-1}. Obtenemos así el valor de la componente s_{n-1} del vector solución s.

$$a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}s_n = b_{n-1} \implies$$

$$a_{n-1,n-1}x_{n-1} = b_{n-1} - a_{n-1,n}s_n \implies$$

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}s_n}{a_{n-1,n-1}}$$

- Halladas sucesivamente las componentes $s_n, s_{n-1}, \ldots, s_2$ de la solución del sistema mediante el procedimiento de sustitución indicado, s_1 se determina de igual modo, obteniéndose

$$s_1 = \frac{b_1 - a_{1,2}s_2 - a_{1,3}s_3 - \cdots - a_{1,n}s_n}{a_{1,1}} = \frac{1}{a_{1,1}}\left(b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1,j}s_j\right).$$

- El método descrito para la resolución de sistemas triangulares es ciertamente sencillo.
- Este será nuestro objetivo: (intentar) trabajar con sistemas triangulares.

Observación 5.1

Cuando $a_{i,j} = 0$, para $j > i$, el sistema se llama *triangular inferior* y puede ser resuelto por eliminación progresiva, es decir, hallar (progresivamente) los valores s_1, s_2, ..., s_n de la solución s del sistema.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Para alcanzar nuestro objetivo haremos uso de varias propiedades elementales.

Propiedad 5.2

Si s es solución de una ecuación e_i, entonces s también es solución de la ecuación ke_i, donde $k \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus 0$.

Propiedad 5.3

Si s es solución de las ecuaciones e_i y e_j, entonces s también es solución de $e_i + e_j$.

Propiedad 5.4

El orden de las ecuaciones del sistema no afecta a la solución del mismo.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- Es (posiblemente) el método más importante de entre los métodos directos de resolución de sistemas lineales.
- La idea que se sigue en este método es la eliminación sistemática de las variables, desde x_1 hasta x_{n-1}, en determinadas ecuaciones del sistema de partida hasta llegar a un sistema triangular.
- Básicamente, es el método de reducción de la matriz ampliada del sistema a forma escalonada por filas, pero permitiendo las transformaciones elementales (dadas por las Propiedades 5.2 y 5.3) sólo en determinado orden.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- Consideremos un sistema $Ax = b$ de orden n con

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

- La existencia de solución del sistema $Ax = b$ está caracterizada por la no anulación del determinante de A (Teorema de Rouché-Frobenius), en cuyo caso la solución será única.
- Por tanto, en lo que sigue, supondremos que $\det A \neq 0$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Paso 1. Definimos $A^{(0)} = A$ y $b^{(0)} = b$ y suponemos que $a_{1,1}^{(0)} = a_{1,1} \neq 0$.

- Se elimina la variable x_1, desde la segunda ecuación hasta la $n-$ésima, del siguiente modo: para cada $i = 2, \dots, n$, se resta la primera ecuación multiplicada por $l_{i,1} = \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}} = \frac{a_{i,1}^{(0)}}{a_{1,1}^{(0)}}$ a la $i-$ésima ecuación, obteniéndose un nuevo sistema $A^{(1)}x = b^{(1)}$, donde

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & \cdots & a_{1,n}^{(1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(1)} & \cdots & a_{2,n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,2}^{(1)} & \cdots & a_{n,n}^{(1)} \end{pmatrix},$$

$$b^{(1)} = \left(b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, \dots, b_n^{(1)}\right)^T,$$

con

$$\begin{cases} a_{1,j}^{(1)} = a_{1,j}^{(0)} = a_{ij}, & 1 \leq j \leq n, \\ a_{i,j}^{(1)} = a_{i,j}^{(0)} - l_{i,1} a_{1j}^{(0)}, & 2 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n, \end{cases}$$

$$b_1^{(1)} = b_1^{(0)};\ b_i^{(1)} = b_i^{(0)} - l_{i,1} b_1^{(0)},\ 2 \leq i \leq n.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Paso k+1. Supongamos que se ha conseguido el sistema equivalente

$$A^{(k)}x = b^{(k)},$$

con

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(k)} & \cdots & a_{1,k-1}^{(k)} & a_{1,k}^{(k)} & \cdots & a_{1,j}^{(k)} & \cdots & a_{1,n}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{k-1,k-1}^{(k)} & a_{k-1,k}^{(k)} & \cdots & a_{k-1,j}^{(k)} & \cdots & a_{k-1,n}^{(k)} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k,k}^{(k)} & \cdots & a_{k,j}^{(k)} & \cdots & a_{k,n}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{i,k}^{(k)} & \cdots & a_{i,j}^{(k)} & \cdots & a_{i,n}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,k}^{(k)} & \cdots & a_{n,j}^{(k)} & \cdots & a_{n,n}^{(k)} \end{pmatrix},$$

$$b^{(k)} = \left(b_1^{(k)}, b_2^{(k)}, \ldots, b_n^{(k)}\right)^T,$$

y que, además, $a_{kk}^{(k)} \neq 0$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- Se determinan $A^{(k+1)} = \left(a_{i,j}^{(k+1)}\right)_{1\le i,j\le n}$ y $b^{(k+1)} = \left(b_i^{(k+1)}\right)_{1\le i\le n}$ por medio de las expresiones

$$a_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} a_{i,j}^{(k)}, & i \le k, \\ a_{i,j}^{(k)} - l_{i,k}a_{k,j}^{(k)}, & i \ge k,\ j \ge k+1, \\ 0 & i \ge k+1,\ j \le k, \end{cases}$$

$$b_i^{(k+1)} = \begin{cases} b_i^{(k)} & i \le k, \\ b_i^{(k)} - l_{i,k}b_k^{(k)} & i \ge k+1. \end{cases}$$

siendo $l_{i,k} = \frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}$.

- Si el proceso puede ser completado, es decir, si todos los *pivotes* $a_{k,k}^{(k)}$ son no nulos, entonces la matriz $A^{(n)}$ será triangular superior y el sistema $A^{(n)}x = b^{(n)}$ se podrá resolver por sustitución regresiva.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Resultado 5.5

El método de eliminación de Gauss descrito puede completarse sin encontrar ningún divisor nulo si, y sólo si, las submatrices menores principales

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} \end{pmatrix}, \ 1 \leq k \leq n,$$

de A son invertibles.

Observación 5.6

El número de operaciones que hay que efectuar para reducir el sistema a forma triangular y resolver el sistema por sustitución regresiva es $\frac{1}{6}\left(4n^3 + 9n^2 - 7n\right)$, frente a las $(n+1)!n - 1$ operaciones de la Regla de Cramer.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Observación 5.7

- Si alguno de los pivotes es nulo entonces la eliminación gaussiana no puede llevarse a término.
- Aun no siendo nulo, un valor muy pequeño de un pivote tendría como efecto una amplificación de los errores de redondeo a los que todo cálculo conduce.
- Estos dos inconvenientes motivan el diseño de estrategias para disminuir, en lo posible, sus efectos.

Observación 5.8

- El proceso de eliminación gaussiana también se puede aplicar a un sistema $m \times n$ (m ecuaciones con n incógnitas), $m < n$, siguiendo las mismas etapas anteriormente indicadas, sólo que al final, de poder completar todas las etapas, se obtendrá un sistema reducido del tipo siguiente.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

$$\left.\begin{array}{rcl}
a_{1,1}^{(1)}x_1 + a_{1,2}^{(1)}x_2 + a_{1,3,}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{1,m}^{(1)}x_m + a_{1,m+1}^{(1)}x_{m+1} + \cdots + a_{1,n}^{(1)}x_n & = & b_1^{(1)} \\
a_{2,2}^{(2)}x_2 + a_{2,3}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{2,m}^{(2)}x_m + a_{2,m+1}^{(2)}x_{m+1} + \cdots + a_{2,n}^{(2)}x_n & = & b_2^{(2)} \\
a_{3,3}^{(3)}x_3 + \cdot s + a_{3,m}^{(3)}x_m + a_{3,m+1}^{(3)}x_{m+1} + \cdots + a_{3,n}^{(3)}x_n & = & b_3^{(3)} \\
& \vdots & \\
a_{m,m}^{(m)}x_m + a_{m,m+1}^{(m)}x_{m+1} + \cdots + a_{m,n}^{(m)}x_n & = & b_n^{(m)}
\end{array}\right\}$$

- Para obtener un sistema triangular basta con pasar al segundo miembro los sumandos asociados a las variables $x_{m+1}, \ldots, x_n$.
- A continuación el sistema triangular obtenido se resuelve mediante sustitución regresiva.
- La solución vendrá expresada en términos de las variables $x_{m+1}, \ldots, x_n$, resultando una familia de soluciones dependiente de $m - n$ parámetros.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- El método de Gauss-Jordan consiste en encontrar un sistema diagonal equivalente al de partida.
- Como en el método de Gauss, se hace uso del correspondiente pivote para anular los elementos por debajo y, en este caso, también por encima de la diagonal principal.
- Es, básicamente, equivalente a encontrar la forma escalonada reducida por filas de la matriz ampliada del sistema.
- En la práctica, tiene las mismas ventajas e inconvenientes que el método de Gauss.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- Consideremos un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, donde
  - A es una matriz real de orden n tal que $\det A \neq 0$,
  - b es un vector de $\mathbb{R}^n$.
- Un método iterativo para resolver tal sistema es cualquier procedimiento que genere, a partir de un vector inicial prefijado $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, una sucesión $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}, \ldots$ (de vectores en $\mathbb{R}^n$) que converja a la solución exacta, es decir,

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = A^{-1}b.$$

- Describiremos dos de estos métodos.
  - Método de Jacobi.
  - Método de Gauss-Seidel.

- Supongamos que $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ y $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$.
- Entonces el sistema $Ax = b$ es el que sigue.

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}\right\}$$

- La idea del método de Jacobi es sustituir este sistema por otro equivalente de manera que las nuevas ecuaciones nos permitan definir la sucesión de aproximaciones a la solución.
- Supondremos (por el momento) que los elementos $a_{i,i}$ de la diagonal principal de la matriz de coeficientes (o sea, de la matriz A dada al principio) son no nulos.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Paso 1. Se despeja x_1 de la primera ecuación.

$$x_1 = \frac{1}{a_{1,1}} \left(b_1 - a_{1,2}x_2 - \cdots - a_{1,n}x_n \right).$$

Paso 2. Se despeja x_2 de la segunda ecuación.

$$x_2 = \frac{1}{a_{2,2}} \left(b_2 - a_{2,1}x_1 - a_{2,3}x_3 - \cdots - a_{2,n}x_n \right).$$

...

Paso j. En general, se despeja x_j de la $j-$ésima ecuación.

$$x_j = \frac{1}{a_{j,j}} \left(b_j - a_{j,1}x_1 - \cdots - a_{j,j-1}x_{j-1} - a_{j,j+1}x_{j+1} - \cdots - a_{j,n}x_n \right).$$

...

Paso n. Por último, se despeja x_n de la $n-$ésima ecuación.

$$x_n = \frac{1}{a_{n,n}} \left(b_n - a_{n,1}x_1 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1} \right).$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- Dado $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots x_n^{(0)}\right)^T$, generamos los vectores $x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right)^T$, $k \geq 1$, mediante el siguiente método recurrente.

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{a_{1,1}} \left(b_1 - a_{1,2} x_2^{(k-1)} - \cdots - a_{1,n} x_n^{(k-1)}\right),$$

$$x_2^{(k)} = \frac{1}{a_{2,2}} \left(b_2 - a_{2,1} x_1^{(k-1)} - a_{2,3} x_3^{(k-1)} - \cdots - a_{2,n} x_n^{(k-1)}\right),$$

$$\vdots$$

$$x_j^{(k)} = \frac{1}{a_{j,j}} \left(b_j - a_{j,1} x_1^{(k-1)} - \cdots - a_{j,j-1} x_{j-1}^{(k-1)} - a_{j,j+1} x_{j+1}^{(k-1)} - \cdots - a_{j,n} x_n^{(k-1)}\right),$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(k)} = \frac{1}{a_{n,n}} \left(b_n - a_{n,1} x_1^{(k-1)} - \cdots - a_{n,n-1} x_{n-1}^{(k-1)}\right).$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- Matricialmente, el método recurrente descrito se expresa de la forma

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} & \cdots & -\frac{a_{1,n}}{a_{1,1}} \\ -\frac{a_{2,1}}{a_{2,2}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{n,1}}{a_{2,2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n,1}}{a_{n,n}} & -\frac{a_{n,2}}{a_{n,n}} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{b_1}{a_{1,1}} \\ \dfrac{b_2}{a_{2,2}} \\ \vdots \\ \dfrac{b_n}{a_{n,n}} \end{pmatrix}.$$

- O sea, como

$$x^{(k)} = M_J\, x^{(k-1)} + c_J,$$

donde

$$M_J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} & \cdots & -\frac{a_{1,n}}{a_{1,1}} \\ -\frac{a_{2,1}}{a_{2,2}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{n,1}}{a_{2,2}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{a_{n,1}}{a_{n,n}} & -\frac{a_{n,2}}{a_{n,n}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad c_J = \begin{pmatrix} \dfrac{b_1}{a_{1,1}} \\ \dfrac{b_2}{a_{2,2}} \\ \vdots \\ \dfrac{b_n}{a_{n,n}} \end{pmatrix}.$$

- El vector c_J y la matriz M_J son, respectivamente, el vector y la matriz del método de Jacobi.
- Como la aproximación inicial $x^{(0)}$ es arbitraria, es frecuente escogerla con todas sus componentes nulas, esto es, $x_i^{(0)} = 0$, $1 \leq i \leq n$.
- A partir de $x^{(0)}$ calculamos el vector $x^{(1)}$; una vez conocido $x^{(1)}$, calculamos $x^{(2)}$, y así sucesivamente.
- Es frecuente recoger toda esta información elaborando una tabla.

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$\cdots$	$x_n^{(k)}$
1	$x_1^{(1)}$	$x_2^{(1)}$	$\cdots$	$x_n^{(1)}$
2	$x_1^{(2)}$	$x_2^{(2)}$	$\cdots$	$x_n^{(2)}$
3	$x_1^{(3)}$	$x_2^{(3)}$	$\cdots$	$x_n^{(3)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- Consideremos la matrices

$$D = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}, \quad A_L = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_U = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- Con esta notación, es fácil comprobar que

$$M_J = -D^{-1}(A_L + A_U), \quad c_J = D^{-1}b.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- El método de Gauss-Seidel es similar al método de Jacobi.
- Pero, en Gauss-Seidel, cada componente calculada se utiliza para hallar los valores de las siguientes componentes.

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k)} &= \frac{1}{a_{1,1}}\left(b_1 - a_{1,2}x_2^{(k-1)} - \cdots - a_{1,n}x_n^{(k-1)}\right),\\
x_2^{(k)} &= \frac{1}{a_{2,2}}\left(b_2 - a_{2,1}x_1^{(k)} - a_{2,3}x_3^{(k-1)} - \cdots - a_{2,n}x_n^{(k-1)}\right),\\
&\ \ \vdots\\
x_j^{(k)} &= \frac{1}{a_{j,j}}\left(b_j - a_{j,1}x_1^{(k)} - \cdots - a_{j,j-1}x_{j-1}^{(k)} - a_{j,j+1}x_{j+1}^{(k-1)} - \cdots - a_{j,n}x_n^{(k-1)}\right),\\
&\ \ \vdots\\
x_n^{(k)} &= \frac{1}{a_{n,n}}\left(b_n - a_{n,1}x_1^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right).
\end{aligned}
$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- Puede probarse que, para el método de Gauss-Seidel,

$$x^{(k)} = M_{GS}\; x^{(k-1)} + c_{GS},$$

donde

$$M_{GS} = -\left(D + A_L\right)^{-1} A_U, \quad c_J = \left(D + A_L\right)^{-1} b.$$

- Recuérdese la notación

$$D = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}, \quad A_L = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_U = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

- Los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel son casos particulares del esquema general
$$x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + c, \; k = 1, 2, \ldots,$$
donde B es una matriz de orden n, $c \in \mathbb{R}^n$ y el vector $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ es una aproximación inicial dada.

- Para que la sucesión $x^{(k)}$ converja a la solución $x = A^{-1}b$ del sistema, la matriz B y el vector c deben ser elegidos de modo que $c = (I - B)A^{-1}b$.

- La sucesión generada por tal método, partiendo de un $x^{(0)}$ arbitrario, converge si, y sólo si, el radio espectral de B es menor que 1, lo que notaremos por $\rho(B) < 1$.

  $\rho(B) = \text{máx}\,\{|\lambda| \mid \lambda \text{ es valor propio de } B\}$.

- Calcular el radio espectral de B no es fácil.

- Sin embargo, existen resultados que permiten asegurar la convergencia sin tener que calcular $\rho(B)$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Definición 5.9

Dada una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

decimos que A es *diagonalmente dominante por filas en sentido estricto* si se verifican las siguientes desigualdades.

- $|a_{1,1}| > |a_{1,2}| + |a_{1,3}| + \cdots + |a_{1,n}|$
- $|a_{2,2}| > |a_{2,1}| + |a_{2,3}| + \cdots + |a_{2,n}|$
- ...
- $|a_{k,k}| > |a_{k,1}| + |a_{k,2}| + \cdots + |a_{k,k-1}| + |a_{k,k+1}| + \cdots + |a_{k,n}|$
- ...
- $|a_{n,n}| > |a_{n,1}| + |a_{n,2}| + \cdots + |a_{n,n-1}|$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Resultado 5.10

Dado un sistema lineal de ecuaciones $Ax = b$ tal que A es una matriz diagonalmente dominante por filas en sentido estricto, entonces los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel convergen.

Observación 5.11

- Con el anterior resultado, no es preciso realizar el método para saber, *a priori*, si va a ser convergente.
- Sin embargo, el anterior resultado no informa sobre qué ocurre en el caso de que la matriz A no sea diagonalmente dominante por filas en sentido estricto. Es decir, el resultado proporciona una condición suficiente pero no necesaria.

Recuérdese que si llueve, entonces el jardín se moja. Pero si no llueve, entonces el jardín puede mojarse o no; por ejemplo, si alguien lo riega, entonces se mojará aunque no llueva.
Conclusión: es suficiente que llueva para que el jardín se moje; pero no es necesario que llueva para que el jardín se moje.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 5.12

Consideremos el sistema

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 + 3x_2 - x_3 & = & 6 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 & = & 5 \\ x_1 + x_2 - 7x_3 & = & -9 \end{array}\right\}.$$

¿Es la matriz de coeficientes (de este sistema) diagonalmente dominante en sentido estricto? En caso negativo, indica si hay algún intercambio entre las ecuaciones que permita pasar a un sistema equivalente cuya matriz sí lo sea.

- La matriz del sistema propuesto es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

- Como $|1| \not> |3| + |1|$, $|-1| \not> |4| + |1|$, $|-7| > |1| + |1|$, entonces la matriz A no es diagonalmente dominante en sentido estricto.
- Si intercambiamos las ecuaciones primera y segunda del sistema, la matriz de coeficientes del nuevo sistema será diagonalmente dominante en sentido estricto (¡comprobarlo!) y podremos aplicar, con éxito asegurado, los métodos iterativos de Jacobi o de Gauss-Seidel.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo 5.13

Consideremos el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z & = & 2 \\ \frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z & = & 2 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + z & = & 2 \end{array}\right\}.$$

- En este caso, la matriz de coeficientes (del sistema) tampoco es diagonalmente dominante en sentido estricto (¿por qué?).
- Para el método de Jacobi se puede asegurar que no hay convergencia, aunque ocurre un fenómeno curioso. Lo veremos a continuación.
- Sin embargo, sí hay convergencia para el método de Gauss-Seidel. También lo veremos después.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (5.13 cont.)

- En este ejemplo, el método de Jacobi, matricialmente escrito, viene dado por el esquema recurrente

$$\begin{pmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \\ z^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \\ z^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad k \geq 0.$$

- Empezando con la aproximación $\left(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}\right)^T = (0.8, 0.8, 0.8)^T$, obtenemos la siguiente tabla.

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	$z^{(k)}$
0	0.8	0.8	0.8
1	1.2	1.2	1.2
2	0.8	0.8	0.8
3	1.2	1.2	1.2
4	0.8	0.8	0.8
5	1.2	1.2	1.2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (5.13 cont.)

- En este ejemplo, el método de Gauss-Seidel, matricialmente escrito, viene dado por el esquema recurrente

$$\begin{pmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \\ z^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \\ z^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad k \geq 0.$$

- Empezando con la aproximación $\left(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}\right)^T = (0.8, 0.8, 0.8)^T$ una vez más, obtenemos una tabla (véase la siguiente transparencia) que nos lleva a pensar que la solución del sistema es $(x, y, z)^T = (1, 1, 1)^T$ (¡comprobar que efectivamente esa es la solución del sistema dado!).
- Tenemos que (casi con toda seguridad) el método de Gauss-Seidel converge a la solución del sistema.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Matemática Aplicada

Ejemplo (5.13 cont.)

- La tabla para el método de Gauss-Seidel es la siguiente.

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	$z^{(k)}$
0	0.8	0.8	0.8
1	1.2	1.	0.9
2	1.05	1.	0.9625
3	1.0062	1.0156	0.98906
4	0.997656	1.00664	0.9978
5	0.997754	1.0022	1.00002
6	0.998889	1.00054	1.00028
7	0.999586	1.00006	1.00017
8	0.99988	0.999973	1.00007

- Los datos sugieren que las iteraciones convergen a la solución exacta del problema.
- Por tanto, tenemos un sistema con matriz de coeficientes que no es diagonalmente dominante en sentido estricto, para el cual el método de Jacobi no es convergente y sí lo es el de Gauss-Seidel (aunque debería ser demostrado).
- Recuérdese: Resultado 5.10 da una condición suficiente, pero no necesaria. El ejemplo dado ilustra esta situación.