

## 5.1. Introducción

En esta sesión de prácticas veremos una (muy) breve introducción a los métodos numéricos de resolución de problemas de valores iniciales.

El estudio de estos métodos numéricos viene motivado por la imposibilidad, en muchas ocasiones, de conocer una expresión explícita de la solución de un problema dado,

- bien porque no haya un método que nos permita resolver la ecuación diferencial,
- bien porque podamos resolver la ecuación pero no obtengamos una expresión explícita de la solución en términos de funciones elementales.

Recordemos dos conceptos relacionados con los problemas de valores iniciales (p.v.i.).

**Definición 1.** Un problema de valores iniciales viene dado por

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (5.1)$$

donde  $f(t, x)$  es una función continua definida en un dominio  $D$  (subconjunto abierto y arco-conexo de  $\mathbb{R}^2$ ) y  $(t_0, x_0)$  es un punto de  $D$ .

Si queremos que esté asegurada la unicidad de solución, exigiremos también que  $f(t, x)$  tenga derivada parcial continua con respecto a  $x$ .

**Definición 2.** Una solución de (5.1) es una función  $x(t)$ , definida en un intervalo abierto  $I$  (que contiene a  $t_0$ ), tal que

- $x \in C^1(I)$ ,
- $(t, x(t)) \in D, \forall t \in I$ ,
- $x(t_0) = x_0$ ,
- $x'(t) = f(t, x(t)), \forall t \in I$ .

La idea básica en los métodos numéricos para problemas de valores iniciales es, partiendo de la condición inicial  $(t_0, x_0)$ ,

- aproximar el valor  $x(t_1)$  de la solución para  $t_1$  cercano a  $t_0$ ;
- a continuación, aproximar  $x(t_2)$  para  $t_2$  cercano a  $t_1$ ;
- y así sucesivamente.

En otras palabras, si  $x(t)$  es la solución de (5.1), definida en el intervalo  $[a, b] \subset I$  (con  $a = x_0$ ), nuestro objetivo es calcular una sucesión de valores  $\{x_k\}$  de forma que  $x(t_k) \approx x_k$  para  $t_k = x_0 + kh$ , donde  $k = 0, 1, \dots, n$  y  $h = \frac{b-a}{n}$ .

Al parámetro  $h$  se le denomina *paso del método* y, aunque en general puede ser variable, en los métodos que veremos aquí siempre será constante.

Por otro lado, y teóricamente, cuando  $h \rightarrow 0$  (esto es, cuando  $n \rightarrow \infty$ ) obtendremos la solución exacta de (5.1). En la práctica esto no ocurrirá debido, entre otras razones, a los errores de redondeo que aparecen cuando realizamos cálculos con el ordenador.

## 5.2. Método de Euler

Supongamos que una función  $x(t)$  es derivable. En tal caso es bien conocida la fórmula asociada al desarrollo de Taylor de primer orden en  $t = a$ . A saber,

$$x(t) = x(a) + (t - a)x'(a) + R_1(t),$$

donde  $R_1(t)$  representa el error cometido al tomar  $x(a) + (t - a)x'(a)$  como aproximación de  $x(t)$ .

Si  $x(t)$  es la solución del problema de valores iniciales (5.1), entonces

$$x(t_1) \approx x(t_0) + hx'(t_0) = x(t_0) + hf(t_0, x(t_0)) = x_0 + hf(t_0, x_0), \quad (5.2)$$

donde  $h = t_1 - t_0$ . Por tanto, si damos por buena la anterior aproximación, entonces

$$x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0),$$

siendo  $x_1 = x(t_1)$ . Si hacemos lo mismo para sucesivos puntos de la forma

$$t_2 = t_1 + h, \quad t_3 = t_2 + h, \quad \dots, \quad t_n = t_{n-1} + h$$

entonces tenemos definida la recurrencia para el método de Euler,

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

siendo  $x_k = x(t_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ .

**Nota 3.** El método de Euler es un caso particular de los llamados métodos explícitos de un paso, pues cada término de la sucesión  $\{x_k\}$  se calcula directamente a partir del anterior.

**Ejemplo 4.** Consideremos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = x(t), \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Claramente la solución de este problema es  $x(t) = e^t$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Si aplicamos el método de Euler para aproximar  $x(0.5)$ , con  $h = 0.1$  (obsérvese que  $f(t, x) = x$ ), obtenemos los siguientes valores.

- $x(0) = x_0 = 1$
- $x(0.1) \approx x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0) = 1 + 0.1f(0, 1) = 1 + 0.1 \cdot 1 = 1.1$
- $x(0.2) \approx x_2 = x_1 + hf(t_1, x_1) = 1.1 + 0.1f(0.1, 1.1) = 1.1 + 0.1 \cdot 1.1 = 1.21$
- $x(0.3) \approx x_3 = x_2 + hf(t_2, x_2) = 1.21 + 0.1f(0.2, 1.21) = 1.21 + 0.1 \cdot 1.21 = 1.331$
- $x(0.4) \approx x_4 = x_3 + hf(t_3, x_3) = 1.331 + 0.1f(0.3, 1.331) = 1.331 + 0.1 \cdot 1.331 = 1.4641$
- $x(0.5) \approx x_5 = x_4 + hf(t_4, x_4) = 1.4641 + 0.1f(0.4, 1.4641) = 1.4641 + 0.1 \cdot 1.4641 = 1.61051$

Puesto que

$$e^{0.1} = 1.10517\dots, \quad e^{0.2} = 1.22140\dots, \quad e^{0.3} = 1.34985\dots, \quad e^{0.4} = 1.49182\dots, \quad e^{0.5} = 1.64872\dots,$$

vemos que los valores aproximados se van alejando de los exactos. El motivo de este alejamiento es la acumulación de errores en las sucesivas aproximaciones que, en este ocasión, se deben al método empleado.

Como es habitual en el cálculo numérico, uno de los objetivos al trabajar es conseguir controlar los errores que se deben al método, además de los que se deriven de los posibles redondeos resultantes de operar con el ordenador.

### 5.2.1. Generalización del método de Euler

El método de Euler es un caso particular de los métodos de Taylor. En estos métodos se emplean desarrollos de Taylor de orden uno o superior.

Por ejemplo, para el método de Taylor de orden 2, consideramos la aproximación

$$x(t_k + h) \approx x(t_k) + hx'(t_k) + \frac{h^2}{2}x''(t_k).$$

En este caso, necesitamos calcular  $x''(t_k)$ , para lo cual derivamos  $f(t, x(t))$  con respecto a  $t$ . Así

$$x''(t) = (x'(t))' = (f(t, x(t)))' = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t)) \cdot x'(t),$$

donde hemos empleado la regla de la cadena. En conclusión, tenemos la recurrencia

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k) + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial t}(t_k, x_k) + \frac{\partial f}{\partial x}(t_k, x_k) \cdot f(t_k, x_k) \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

### 5.3. Método de Heun (o de Euler mejorado)

Consideremos ahora la aproximación

$$x(t_1) \approx x(t_0) + hx'(t_1) = x(t_0) + hf(t_1, x(t_1)), \quad (5.3)$$

donde, de nuevo,  $h = t_1 - t_0$ . Si combinamos (5.2) y (5.3) adecuadamente, entonces

$$x(t_1) = x(t_0) + h \frac{f(t_0, x(t_0)) + f(t_1, x(t_1))}{2}.$$

Así, si definimos  $x_1 = x(t_1)$ , tenemos la expresión

$$x_1 = x_0 + h \frac{f(t_0, x_0) + f(t_1, x_1)}{2}.$$

Haciendo lo mismo en los puntos sucesivos, obtenemos la recurrencia asociada al denominado método de Heun (o de Euler mejorado),

$$x_{k+1} = x_k + h \frac{f(t_k, x_k) + f(t_{k+1}, x_{k+1})}{2}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

**Nota 5.** El método de Heun es un ejemplo de los denominados métodos implícitos. En tales métodos, cada término  $x_{k+1}$  está definido en función de sí mismo. Por tanto, salvo que  $f$  sea lineal en  $x$ , necesitaremos resolver una ecuación no lineal. Para solventar este inconveniente podemos calcular un valor previo  $x_{k+1}^*$  y, a partir de él, determinar  $x_{k+1}$ . Tenemos así que Heun es un ejemplo de los llamados métodos predictor-corrector.

A partir del comentario anterior, el método de Heun viene dado por la recurrencia

$$\begin{aligned} (\text{predicción:}) \quad x_{k+1}^* &= x_k + hf(t_k, x_k), \\ (\text{corrección:}) \quad x_{k+1} &= x_k + h \frac{f(t_k, x_k) + f(t_{k+1}, x_{k+1}^*)}{2}, \end{aligned}$$

para  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . En este método, las predicciones se realizan aplicando el método de Euler.

**Ejemplo 6.** De nuevo consideramos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = x(t), \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Aplicando el método de Heun para aproximar  $x(0.5)$  con  $h = 0.1$ , obtenemos los valores

- $x(0) = x_0 = 1$
- $x_1^* = x_0 + hf(t_0, x_0) = 1 + 0.1f(0, 1) = 1 + 0.1 \cdot 1 = 1.1$   
 $x(0.1) \approx x_1 = x_0 + \frac{h}{2} [f(t_0, x_0) + f(t_1, x_1^*)] = 1 + 0.05 \cdot [1 + 1.1] = 1.105$
- $x_2^* = x_1 + hf(t_1, x_1) = 1.105 + 0.1f(0.1, 1.105) = 1.105 + 0.1 \cdot 1.105 = 1.2155$   
 $x(0.1) \approx x_2 = x_1 + \frac{h}{2} [f(t_1, x_1) + f(t_2, x_2^*)] = 1.105 + 0.05 \cdot [1.105 + 1.2155] = 1.221025$
- $x_3^* = 1.3431275$ ,  $x(0.1) \approx x_3 = 1.349232625$
- $x_4^* = 1.4841558875$ ,  $x(0.4) \approx x_4 = 1.490902050625$
- $x_5^* = 1.6399922556875$ ,  $x(0.5) \approx x_5 = 1.647446765940625$

Las aproximaciones de este método son mejores que las obtenidas mediante el método de Euler.

## 5.4. Método de Euler modificado

Ahora tomamos las aproximaciones

$$x(t_{1/2}) \approx x(t_0) + \frac{h}{2} x'(t_{1/2}) = x(t_0) + \frac{h}{2} f(t_{1/2}, x(t_{1/2})), \quad (5.4)$$

$$x(t_1) \approx x(t_{1/2}) + \frac{h}{2} x'(t_{1/2}) = x(t_{1/2}) + \frac{h}{2} f(t_{1/2}, x(t_{1/2})), \quad (5.5)$$

donde  $h = t_1 - t_0$  y  $t_{1/2} = \frac{t_0+t_1}{2} = t_0 + \frac{h}{2}$ . Sustituyendo (5.4) en (5.5), llegamos a la expresión

$$x(t_1) = x(t_0) + hf(t_{1/2}, x(t_{1/2})).$$

Y tomando  $x(t_{1/2}) = x_{1/2}$  y  $x(t_1) = t_1$ , entonces

$$x_1 = x_0 + hf(t_{1/2}, x_{1/2}).$$

En general, el denominado método de Euler modificado viene dado por la recurrencia

$$x_{k+1} = x_k + hf\left(t_k + \frac{h}{2}, x_{k+(1/2)}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

**Nota 7.** Este método no es implícito, pues no viene dado  $x_{k+1}$  en función de sí mismo, pero tampoco es explícito, pues necesitamos determinar previamente  $x_{k+(1/2)}$ . Como en Heun, usaremos Euler para hallar el valor previo. Por tanto, Euler modificado es también del tipo predictor-corrector.

Concluimos que el método de Euler modificado viene dado por la recurrencia

$$\begin{cases} \text{(predicción:)} & x_{k+1/2} = x_k + \frac{h}{2} f(t_k, x_k), \\ \text{(corrección:)} & x_{k+1} = x_k + hf\left(t_k + \frac{h}{2}, x_{k+(1/2)}\right), \end{cases}$$

para  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

**Ejemplo 8.** Aplicando Euler modificado al problema

$$\begin{cases} x'(t) = x(t), \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

para aproximar  $x(0.5)$  con  $h = 0.1$ , obtenemos

- $x(0) = x_0 = 1$

- $x_{1/2} = x_0 + \frac{h}{2}f(t_0, x_0) = 1 + 0.05f(0, 1) = 1 + 0.05 \cdot 1 = 1.05$   
 $x(0.1) \approx x_1 = x_0 + hf(t_0 + \frac{h}{2}, x_{1/2}) = 1 + 0.1 \cdot 1.05 = 1.105$
- $x_{3/2} = x_1 + \frac{h}{2}f(t_1, x_1) = 1.105 + 0.05f(0.1, 1.105) = 1.105 + 0.05 \cdot 1.105 = 1.16025$   
 $x(0.2) \approx x_2 = x_1 + hf(t_1 + \frac{h}{2}, x_{3/2}) = 1.105 + 0.1 \cdot 1.16025 = 1.221025$
- $x_{5/2} = 1.28207625, \quad x(0.3) \approx x_3 = 1.349232625$
- $x_{7/2} = 1.41669425625, \quad x(0.4) \approx x_4 = 1.490902050625$
- $x_{9/2} = 1.56544715315625, \quad x(0.5) \approx x_5 = 1.647446765940625$

En este ejemplo las aproximaciones en 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 coinciden con las del método de Heun. Por lo general, los resultados serán distintos.

## 5.5. Método de Runge-Kutta (de orden 4) clásico

Los métodos de Euler y de Heun son casos particulares de los métodos de Runge-Kutta. En efecto, Euler es un Runge-Kutta de primer orden y Heun un Runge-Kutta de segundo orden.

Por otra parte, el que quizás sea el método más usual, en la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales, es el método de Runge-Kutta de cuarto orden clásico (o, simplemente, método de Runge-Kutta). En este método, para determinar cada elemento de la sucesión  $\{x_k\}$  se realizan cuatro estimaciones previas, de acuerdo con el esquema

- $K_1 = f(t_k, x_k),$
- $K_2 = f(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2}K_1),$
- $K_3 = f(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2}K_2),$
- $K_4 = f(t_k + h, x_k + hK_3),$

y, a continuación, se define

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4).$$

**Ejemplo 9.** Aplicando el método de Runge-Kutta clásico al problema

$$\begin{cases} x'(t) = x(t), \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

para aproximar  $x(0.5)$  con  $h = 0.1$ , obtenemos la siguiente tabla.

- $x(0) = x_0 = 1$
- $x(0.1) \approx x_1 = 1.105170833333333$  con
  - $K_1 = 1, K_2 = 1.05, K_3 = 1.0525, K_4 = 1.10525.$
- $x(0.2) \approx x_2 = 1.221402570850694$  con
  - $K_1 = 1.105170833333333, K_2 = 1.160429375, K_3 = 1.163192302083333,$   
 $K_4 = 1.221490063541667.$
- $x(0.3) \approx x_3 = 1.349858497062538$  con
  - $K_1 = 1.221402570850694, K_2 = 1.282472699393229, K_3 = 1.285526205820356,$   
 $K_4 = 1.349955191432730.$

- $x(0.4) \approx x_4 = 1.491\,824\,240\,080\,686$  con
  - $K_1 = 1.349\,858\,497\,062\,538$ ,  $K_2 = 1.417\,351\,421\,915\,664$ ,  $K_3 = 1.420\,726\,068\,158\,321$ ,  
 $K_4 = 1.491\,931\,103\,878\,370$ .
- $x(0.5) \approx x_5 = 1.648\,720\,638\,596\,838$  con
  - $K_1 = 1.491\,824\,240\,080\,686$ ,  $K_2 = 1.566\,415\,452\,084\,720$ ,  $K_3 = 1.570\,145\,012\,684\,922$ ,  
 $K_4 = 1.648\,838\,741\,349\,178$ .

A la vista de este ejemplo, y en general, el método de Runge-Kutta (de orden 4) nos proporciona las mejores aproximaciones a la solución exacta.

## 5.6. Regla de los 3/8

Otro método de Runge-Kutta de cuarto orden es la llamada regla de los 3/8. Como en el caso anterior, para determinar cada elemento de la sucesión  $\{x_k\}$  se realizan cuatro estimaciones previas, pero ahora de acuerdo con el esquema

- $K_1 = f(t_k, x_k)$ ,
- $K_2 = f(t_k + \frac{h}{3}, x_k + \frac{h}{3}K_1)$ ,
- $K_3 = f(t_k + \frac{2h}{3}, x_k + \frac{h}{3}(3K_2 - K_1))$ ,
- $K_4 = f(t_k + h, x_k + h(K_1 - K_2 + K_3))$ ,

y, a continuación, se define

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{8}(K_1 + 3K_2 + 3K_3 + K_4).$$

**Ejemplo 10.** Aplicando la regla de los 3/8 al problema

$$\begin{cases} x'(t) = x(t), \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

para aproximar  $x(0.5)$  con  $h = 0.1$ , obtenemos la siguiente tabla.

- $x(0) = x_0 = 1$
- $x(0.1) \approx x_1 = 1.105\,170\,833\,333\,333$  con
  - $K_1 = 1$ ,  $K_2 = 1.033\,333\,333\,333\,333$ ,  $K_3 = 1.07$ ,  $K_4 = 1.103\,666\,666\,666\,667$ .
- $x(0.2) \approx x_2 = 1.221\,402\,570\,850\,695$  con
  - $K_1 = 1.105\,170\,833\,333\,333$ ,  $K_2 = 1.142\,009\,861\,111\,111$ ,  $K_3 = 1.182\,532\,791\,666\,667$ ,  
 $K_4 = 1.219\,740\,209\,722\,222$ .
- $x(0.3) \approx x_3 = 1.349\,858\,497\,062\,538$  con
  - $K_1 = 1.221\,402\,570\,850\,695$ ,  $K_2 = 1.262\,115\,989\,879\,051$ ,  $K_3 = 1.306\,900\,750\,810\,243$ ,  
 $K_4 = 1.348\,021\,304\,028\,883$ .
- $x(0.4) \approx x_4 = 1.491\,824\,240\,080\,686$  con
  - $K_1 = 1.349\,858\,497\,062\,538$ ,  $K_2 = 1.394\,853\,780\,297\,956$ ,  $K_3 = 1.444\,348\,591\,856\,915$ ,  
 $K_4 = 1.489\,793\,827\,924\,688$ .
- $x(0.5) \approx x_5 = 1.648\,720\,638\,596\,838$  con

- $K1 = 1.491\,824\,240\,080\,686$ ,  $K2 = 1.541\,551\,714\,750\,042$ ,  $K3 = 1.596\,251\,936\,886\,334$ ,  
 $K4 = 1.646\,476\,686\,302\,384$ .

En este ejemplo vemos que la regla de los 3/8 proporciona los mismos resultados que el método de Runge-Kutta clásico. Sin embargo, con un par más de decimales comprobaríamos que hay diferencias aunque muy pequeñas (de orden  $10^{-16}$ ).

## 5.7. Un método explícito de dos pasos

Para deducir la expresión general de este método, partimos de la ecuación diferencial de (5.1) y aproximamos la derivada mediante la fórmula de derivación numérica del punto medio. Es decir, para un punto  $t_{k+1}$ ,

$$x'(t_{k+1}) = f(t_{k+1}, x(t_{k+1})) \Rightarrow \frac{x(t_{k+2}) - x(t_k)}{t_{k+2} - t_k} \approx f(t_{k+1}, x(t_{k+1})).$$

Considerando  $h = t_{k+1} - t_k$  constante y la notación empleada en las secciones anteriores, llegamos a la recurrencia

$$x_{k+2} = x_k + 2hf(t_{k+1}, x_{k+1}), \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Este método es de dos pasos porque necesitamos conocer  $x_k$  y  $x_{k+1}$  para hallar  $x_{k+2}$ . Al ser un método de dos pasos, para el cálculo de  $x_1$  usaremos un método de un paso (por ejemplo, Euler).

## 5.8. Algunas cuestiones teóricas

Cuando se aplica un método, con paso  $h$ , se deben considerar los siguientes tipos de error.

**Definición 11.** El *error global* en el punto  $t_{k+1}$  es la cantidad  $e_{k+1}(h) = |x_{k+1} - x(t_{k+1})|$ , donde

- $x_{k+1}$  es el valor aproximado calculado, por el método correspondiente, en el punto  $t_{k+1}$ ;
- $x(t_{k+1})$  es el valor correspondiente para la solución exacta del problema de valores iniciales con  $x(t_0) = x_0$ .

**Definición 12.** El *error máximo global* es el valor

$$E(h) = \max_k \{e_k(h)\}.$$

**Definición 13.** El *error local* en el punto  $t_{k+1}$  es igual a la cantidad  $\varepsilon_{k+1}(h)$  resultante de tomar el valor absoluto de la diferencia entre

- el valor aproximado  $x_{k+1}$  calculado, por el método correspondiente, en el punto  $t_{k+1}$
- y el valor, en el punto  $t_{k+1}$ , de la solución exacta de la ecuación diferencial que satisface la condición inicial  $x(t_k) = x_n$ .

**Nota 14.** En la práctica, el error local es la suma de

- el *error local de truncamiento (o error de discretización)*  $\varepsilon_{1,k}(h)$  debido a la aproximaciones realizadas para definir el método;
- el *error local de redondeo*  $\varepsilon_{2,k}(h)$  debido a los redondeos de la representación en punto flotante (por parte del ordenador).

**Teorema 15.** Si los errores locales  $\varepsilon_k(h)$  están acotados por un valor  $\varepsilon(h)$ , entonces se satisface que

$$e_k(h) \leq C \frac{\varepsilon}{h},$$

para una cierta constante  $C$ .

Si suponemos que los cálculos se realizan de forma exacta, entonces  $\varepsilon_{2,k}(h)$  es siempre nulo, es decir,  $\varepsilon_k(h) = \varepsilon_{1,k}(h)$ . A partir de aquí se define el concepto de consistencia.

**Definición 16.** Se dice que un método es *consistente* si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{h} \varepsilon_1(h) \right) = 0,$$

donde  $\varepsilon_1(h) = \max_k \{\varepsilon_{1,k}(h)\}$ .

Hablando alegremente, que un método sea consistente significa que la aproximación considerada en su definición es “correcta” teóricamente. No debemos confundir la consistencia de un método con su convergencia, pues en este nuevo concepto intervienen los errores de redondeo.

**Definición 17.** Se dice que un método es *convergente* si  $\lim_{h \rightarrow 0} E(h) = 0$ .

**Definición 18.** Se dice que un método es *convergente* de orden  $r$  si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(h)}{h^r} = C,$$

donde  $C$  es una constante no nula.

Por otra parte, si sólo tenemos en cuenta los errores de redondeo, entonces surge el concepto de estabilidad.

**Definición 19.** Se dice que un método es *estable* cuando los errores de redondeo permanecen acotados. En caso contrario se dice que el método es inestable.

En términos más sencillos, un método es estable si pequeñas variaciones en la condición inicial producen pequeñas diferencias en la solución aproximada.

Para detectar un método inestable, una posible idea es comparar los resultados para distintos pasos y valores aproximados de la condición inicial. Cuando hay inestabilidad la diferencia de los resultados aumenta cuando se toman valores menores del paso.

## 5.9. Comparación de los métodos expuestos

- Los métodos vistos son consistentes y, en general, estables.
- Euler es de orden 1; Heun (Euler mejorado), Euler modificado y el explícito de dos pasos son de orden 2; Runge-Kutta clásico y la regla de los 3/8 son de orden 4.
- Euler y Runge-Kutta son bastantes exactos y fáciles de programar, pero
  - Euler no es “muy” exacto,
  - en Runge-Kutta necesitamos evaluar varias veces la función  $f(t, x)$ .
- Los métodos de varios pasos se pueden programar para que precisen menos evaluaciones de la función  $f(t, x)$  que Runge-Kutta, lo cual hace que su implementación sea algo más laboriosa.
- Si  $f(t, x)$  es complicada, entonces los métodos de varios pasos pueden ser más eficientes.



# Bibliografía

- [1] J. D. Lambert. “Computational methods in ordinary differential equations”. John Wiley & Sons, 1973.
- [2] D. G. Zill. “Ecuaciones diferenciales con aplicaciones al modelado (Séptima edición)”. Thomson Learning, 2002 .