

Entre otras cosas, en esta sesión de prácticas analizaremos la cónica dada por la expresión

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + 1 = 0. \quad (4.1)$$

Para poder realizar las gráficas de la cónica, daremos por supuesto que sabemos que esta cónica es una elipse. Si no diéramos esto por supuesto, entonces deberíamos analizarla matemáticamente y, posteriormente, representaríamos las gráficas que surgen durante el proceso de análisis.

4.1. Gráfica inicial (Sesion4.11.m)

Para pintar la gráfica de la cónica, despejamos la variable y en función de la variable x . Para ello, consideramos que (4.1) es una ecuación de segundo grado en y y tomamos x como parámetro (esto es, “constante”). Así,

$$\begin{aligned} 3y^2 - (4 + 2x)y + (3x^2 + 2x + 1) = 0 &\Rightarrow y = \frac{4 + 2x \pm \sqrt{(4 + 2x)^2 - 4 \times 3 \times (3x^2 + 2x + 1)}}{6} \Rightarrow \\ y &= \frac{2(2 + x) \pm \sqrt{4 \times (2 + x)^2 - 4 \times 3 \times (3x^2 + 2x + 1)}}{6} \Rightarrow \\ y &= \frac{2(2 + x) \pm 2\sqrt{(2 + x)^2 - 3 \times (3x^2 + 2x + 1)}}{6} \Rightarrow y = \frac{2 + x \pm \sqrt{1 - 2x - 8x^2}}{3}. \end{aligned}$$

Para que y tome valores reales, necesitamos que

$$1 - 2x - 8x^2 \geq 0,$$

lo cual es cierto si, y sólo si, $x \in [-0.5, 0.25]$. Para llegar a esta conclusión, tras haber calculado las soluciones de la ecuación $1 - 2x - 8x^2 = 0$ ($x = -0.5$ y $x = 0.25$), consideramos los intervalos $]-\infty, -0.5]$, $[-0.5, 0.25]$ y $[0.25, +\infty[$ y vemos en cuáles de ellos se cumple la desigualdad anterior.

Concluimos que, para representar nuestra cónica, tenemos que pintar las gráficas de las funciones

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{2 + x + \sqrt{1 - 2x - 8x^2}}{3}, \quad x \in [-0.5, 0.25], \\ y_m(x) &= \frac{2 + x - \sqrt{1 - 2x - 8x^2}}{3}, \quad x \in [-0.5, 0.25]. \end{aligned}$$

4.2. Gráfica intermedia (Sesion4.12.m)

Para determinar la ecuación reducida, expresamos matricialmente la ecuación general (4.1) de la cónica.

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 1 = 0.$$

Después, considerando

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

calculamos los valores propios y vectores propios de la matriz A mediante el comando `eig` de Octave. Con este comando obtenemos dos matrices, P y D , de forma que

- las columnas de P son vectores propios de A ;
- D es diagonal, siendo los elementos de la diagonal principal los valores propios de A .

Observemos que la matriz P obtenida es la matriz de una simetría, pues su determinante es igual a -1 . Esto puede variar si tomamos una ecuación de partida distinta a la de nuestra práctica. Si queremos que P represente un giro tenemos dos posibilidades.

1. Tomar el producto de matrices PN con $N = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Intercambiar las columnas de P .

Como es de esperar, las columnas de la nueva matriz también son vectores propios de A .

Si seguimos llamando P a la nueva matriz, el cambio de base dado por P nos permite eliminar el término en xy de la ecuación (4.1). En efecto, con el cambio

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

llegamos a la expresión

$$2x_1^2 + 4y_1^2 - \sqrt{2}x_1 - 3\sqrt{2}y_1 + 1 = 0. \quad (4.2)$$

Para pintar la gráfica de la nueva elipse, usaremos expresiones generales. Para ello, escribimos

$$a_1x_1^2 + a_2y_1^2 + l_1x_1 + l_2y_1 + c_1 = 0, \quad (4.3)$$

donde, en nuestro caso, a_1, a_2, c_1 son constantes positivas. Despejando y_1 en función de x_1 (considerando $a_1x_1^2 + l_1x_1 + c_1$ como el término independiente),

$$y_1 = \frac{-l_2 \pm \sqrt{l_2^2 - 4a_2(a_1x_1^2 + l_1x_1 + c_1)}}{2a_2}.$$

Ahora es necesario que $l_2^2 - 4a_2(a_1x_1^2 + l_1x_1 + c_1) \geq 0$, lo cual se verifica (razonado como en la sección anterior) si, y sólo si,

$$x \in I = \left[\frac{-l_1 - \sqrt{l_1^2 - 4a_1c_1 + \frac{a_1l_2^2}{a_2}}}{2a_1}, \frac{-l_1 + \sqrt{l_1^2 - 4a_1c_1 + \frac{a_1l_2^2}{a_2}}}{2a_1} \right].$$

Concluimos que, para representar la cónica (elipse) dada por (4.2), debemos pintar las gráficas de las funciones

$$y_{1p} = \frac{-l_2 + \sqrt{l_2^2 - 4a_2(a_1x_1^2 + l_1x_1 + c_1)}}{2a_2}, \quad x_1 \in I$$

y

$$y_{1m} = \frac{-l_2 - \sqrt{l_2^2 - 4a_2(a_1x_1^2 + l_1x_1 + c_1)}}{2a_2}, \quad x_1 \in I.$$

4.3. Ecuación reducida. Gráfica final (Sesion4.13.m)

Operando adecuadamente en (4.2), tenemos que

$$2 \left(x_1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 + 4 \left(y_1 - \frac{3\sqrt{8}}{2} \right)^2 - \frac{3}{8} = 0.$$

De aquí, tomando $x_2 = x_1 - \frac{\sqrt{2}}{4}$, $y_2 = y_1 - \frac{3\sqrt{8}}{2}$, llegamos a la ecuación reducida de nuestra cónica (elipse),

$$\frac{x_2^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} + \frac{y_2^2}{\left(\frac{\sqrt{6}}{8}\right)^2} = 1. \quad (4.4)$$

El mismo camino se emplea sobre (4.3) para realizar los cálculos en general. En efecto, operando en (4.3),

$$a_1 \left(x_1 + \frac{l_1}{2a_1} \right)^2 - a_1 \frac{l_1^2}{4a_1^2} + a_2 \left(y_1 + \frac{l_2}{2a_2} \right)^2 - a_2 \frac{l_2^2}{4a_2^2} + c_1 = 0.$$

Por tanto, tomando la traslación

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + \frac{l_1}{2a_1}, \\ y_2 &= y_1 + \frac{l_2}{2a_2}, \end{aligned}$$

y notando $c_2 = c_1 - a_1 \frac{l_1^2}{4a_1^2} - a_2 \frac{l_2^2}{4a_2^2}$, llegamos a la ecuación

$$a_1 x_2^2 + a_2 y_2^2 + c_2 = 0, \quad (4.5)$$

donde, en nuestro caso, la constante c_2 es negativa (recordemos que a_1, a_2 son positivas). Finalmente, obtenemos la ecuación reducida

$$\frac{x_2^2}{\left(\sqrt{-\frac{c_2}{a_1}}\right)^2} + \frac{y_2^2}{\left(\sqrt{-\frac{c_2}{a_2}}\right)^2} = 1. \quad (4.6)$$

Puesto que (4.5) y (4.6) son expresiones equivalentes, para representar la elipse en su forma reducida podemos emplear (4.5). Así, razonando como en las dos secciones anteriores, para obtener la gráfica de la elipse (en su forma reducida) basta con representar las funciones

$$\begin{aligned} y_{2p} &= \sqrt{-\frac{a_1 x_2^2 + c_2}{a_2}}, \quad x \in \left[-\sqrt{-\frac{c_2}{a_1}}, \sqrt{-\frac{c_2}{a_1}} \right], \\ y_{2m} &= -\sqrt{-\frac{a_1 x_2^2 + c_2}{a_2}}, \quad x \in \left[-\sqrt{-\frac{c_2}{a_1}}, \sqrt{-\frac{c_2}{a_1}} \right]. \end{aligned}$$

4.4. Elementos notables de la cónica (elipse) (Sesion4_14.m)

Para acabar, representemos los elementos notables de cada una de las elipses vistas en esta práctica.

Tomando $h_1 = \sqrt{-\frac{c_2}{a_1}}$, $h_2 = \sqrt{-\frac{c_2}{a_2}}$, la ecuación (4.6) queda

$$\frac{x_2^2}{h_1^2} + \frac{y_2^2}{h_2^2} = 1, \quad (4.7)$$

cuyos elementos son

- centro: $(0, 0)$;
- vértices en el eje de abscisas: $(\pm h_1, 0)$;
- vértices en el eje de ordenadas: $(0, \pm h_2)$;

- focos: $(\pm h_3, 0)$ (donde $h_3^2 = h_1^2 - h_2^2$, pues $h_1 > h_2$ en nuestro caso).

Observemos que (4.5), (4.6) y (4.7) son expresiones de la misma ecuación, por lo que sus elementos son los mismos.

Para recuperar los elementos de la elipse dada por (4.3) (en particular, (4.2)), consideraremos el cambio de coordenadas definido por la traslación (vista en la Sección 4.3) de ecuaciones

$$\begin{aligned}x_1 &= x_2 - \frac{l_1}{2a_1}, \\y_1 &= y_2 - \frac{l_2}{2a_2}.\end{aligned}$$

Finalmente, para obtener los elementos de la elipse dada por (4.1), usamos el giro de la transformación vista en la Sección 4.2, esto es,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

4.5. Complemento: parametrización de la elipse (Sesion4_15.m)

Si consideramos el cambio

$$\begin{aligned}x_3 &= \frac{x_2}{h_1}, \\y_3 &= \frac{y_2}{h_2},\end{aligned}$$

entonces (4.7) se transforma en la ecuación

$$x_3^2 + y_3^2 = 1, \tag{4.8}$$

que es una circunferencia de radio 1.

Es bien conocido que, para representar (4.8), podemos considerar la parametrización de la circunferencia dada por

$$\begin{aligned}x_3 &= \cos(\theta), \\y_3 &= \sin(\theta),\end{aligned}$$

donde $\theta \in [0, 2\pi]$.

Usando de nuevo los cambios de la Sección 4.3, tenemos que

$$\begin{aligned}x_2 &= h_1 x_3 = h_1 \cos(\theta), \\y_2 &= h_2 y_3 = h_2 \sin(\theta),\end{aligned}$$

lo cual nos lleva a

$$\begin{aligned}x_1 &= x_2 - \frac{l_1}{2a_1} = h_1 \cos(\theta) - \frac{l_1}{2a_1}, \\y_1 &= y_2 - \frac{l_2}{2a_2} = h_2 \sin(\theta) - \frac{l_2}{2a_2},\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} h_1 \cos(\theta) - \frac{l_1}{2a_1} \\ h_2 \sin(\theta) - \frac{l_2}{2a_2} \end{pmatrix},$$

con $\theta \in [0, 2\pi]$, es una parametrización de la elipse dada por (4.1).

Teniendo en cuenta que los parámetros $a_1, a_2, l_1, l_2, h_1, h_2$ se pueden expresar en términos de los coeficientes de la expresión (4.1), concluimos que se puede representar la elipse inicial mediante tal parametrización. Es decir, dando valores a θ (entre 0 y 2π) obtenemos los pares (x, y) que representan los distintos puntos de dicha elipse.