



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Departamento de
Matemática Aplicada

Doble Grado Ing. Civil–ADE

Matemática Aplicada

Convocatoria Ordinaria

Teoría y problemas

5 de junio de 2025

Apellidos, Nombre:

DNI, TIE o Pasaporte:

Responde, **justificadamente**, a las cuestiones planteadas en cada uno de los ejercicios.

1. (20) En el espacio vectorial usual $\mathbb{R}^4$, se consideran la base

$$B_1 = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\},$$

y el vector $v = (1, 2, 3, 4)$.

- a) (8) ¿Es $B_2 = \{(1, 1, 0, -1), (2, 1, -1, 0), (1, 2, 1, -1), (2, 1, 0, 1)\}$ un sistema de generadores de $\mathbb{R}^4$? ¿Son linealmente independientes los vectores de B_2 ?
- b) (6) Halla el subespacio vectorial U formado por los vectores de $\mathbb{R}^4$ que tienen las mismas coordenadas en las bases B_1 y B_2 .
- c) (6) Halla la proyección ortogonal de v sobre $U^\perp$.

2. (10) Sea el espacio vectorial usual $\mathbb{R}^4$ y el subespacio vectorial U dado por

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_3 = 0, x_2 + x_4 = 0\}.$$

Halla la expresión en coordenadas, con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^4$, de una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $N(T) = \text{Im}(T) = U$.

3. (15) En el espacio afín euclídeo usual $\mathbb{R}^4$, considera la variedad afín dada por

$$\mathcal{L} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_3 = 2, x_2 + x_4 = 2\}$$

y el punto $A = (1, 2, 3, 4)$.

- a) (10) Halla la proyección ortogonal de A sobre $\mathcal{L}$.
- b) (5) Como consecuencia del apartado anterior, halla la distancia de A a $\mathcal{L}$.

4. (15) Se sabe que la cónica C dada por la expresión

$$54x^2 + 40xy + 54y^2 + 154x + 290y - 857 = 0$$

se transforma, mediante la isometría afín

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

en la cónica C' dada por la expresión

$$\frac{(x')^2}{17} + \frac{(y')^2}{37} = 1.$$

Halla los puntos notables de C .

5. (10) Considera el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y''(x) - 6y'(x) + 8y(x) = 64x^2, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

- a) (3) Sin resolver el problema. ¿cuál es el intervalo maximal de definición de la solución buscada?
- b) (7) Resuelve el problema planteado.

6. (10) Considera el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} (ye^{xy} + 2)dx + (xe^{xy} - 2y)dy = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

- a) (3) La condición inicial determina un problema bien definido, ¿por qué?
- b) (7) Resuelve el problema planteado (pero no es necesario determinar el intervalo maximal de definición).

$$1) a) B_2 = \{ (1, 1, 0, -1), (2, 1, -1, 0), (1, 2, 1, -1), (2, 1, 0, 1) \}$$

$$(a, b, c, d) = \alpha(1, 1, 0, -1) + \beta(2, 1, -1, 0) + \gamma(1, 2, 1, -1) + \delta(2, 1, 0, 1) \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha + 2\beta + \gamma + 2\delta &= a \\ \alpha + \beta + 2\gamma + \delta &= b \\ -\beta + \gamma &= c \\ -\alpha - \gamma + \delta &= d \end{aligned} \right\} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & 2 & 1 & b \\ 0 & -1 & 1 & 0 & c \\ -1 & 0 & -1 & 1 & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & 1 & -1 & b-a \\ 0 & -1 & 1 & 0 & c \\ 0 & 2 & 0 & 3 & a+d \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -1 & 1 & a-b \\ 0 & -1 & 1 & 0 & c \\ 0 & 2 & 0 & 3 & a+d \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -1 & 1 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a-b+c \\ 0 & 0 & 2 & 1 & a+2b+d \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -1 & 1 & a-b \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -a+2b+d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a-b+c \end{pmatrix} \quad \text{Todo vector } (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \text{ se puede expresar como combinación lineal de los elementos de } B_2.$$

Por tanto, B_2 es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^4$. Además, cada vector (a, b, c, d) se expresa de una única manera como combinación lineal de los elementos de B_2 . Por tanto, B_2 es una base de $\mathbb{R}^4$ y, en consecuencia, los elementos de B_2 han de ser vectores linealmente independientes.

b) Sea $u \in \mathbb{R}^4$ tal que $u = (a, b, c, d)_{B_1} = (a, b, c, d)_{B_2}$.
Entonces,

$$\begin{aligned} a(1, 0, 0, 0) + b(1, 1, 0, 0) + c(1, 1, 1, 0) + d(1, 1, 1, 1) &= \\ a(1, 1, 0, -1) + b(2, 1, -1, 0) + c(1, 2, 1, -1) + d(2, 1, 0, -1) &\Rightarrow \\ (a+b+c+d, b+c+d, c+d, d) &= (a+2b+c+2d, a+b+2c+d, -b+c, -a-c-d) \Rightarrow \\ (b+d, a+c, -b-d, -a-c) &= (0, 0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} b+d=0 \\ a+c=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto, los vectores de U vienen dados por
 $(a, b, -a, -b)_{B_1} = (a, b, -a, -b)_{B_2}$

Pasando a coordenadas canónicas,

$$\begin{aligned} (a, b, -a, -b)_{B_1} &= (0, -a, -a-b, -b) \\ (a, b, -a, -b)_{B_2} &= (0, -a, -b-a, -b) \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{OJO: Debe salir} \\ \text{lo mismo en} \\ \text{ambos casos.} \end{array} \right.$$

Por tanto,

$$U = \{ (0, -a, -b-a, -b) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

o, lo que es equivalente,

$$U = \{ (0, a, a+b, b) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

$$c) (0, a, a+b, b) = a(0, 1, 1, 0) + b(0, 0, 1, 1) \Rightarrow$$

$B_U = \{ (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1) \}$ es una base de U .

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} \langle (0, 1, 1, 0), (x_1, x_2, x_3, x_4) \rangle = 0 \\ \langle (0, 0, 1, 1), (x_1, x_2, x_3, x_4) \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow U^\perp = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 + x_3 = 0, x_3 + x_4 = 0 \}$$

$$\Rightarrow U^\perp = \{ (x_1, x_2, -x_2, x_2) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \}$$

$$(x_1, x_2, -x_2, x_2) = x_1(1, 0, 0, 0) + x_2(0, 1, -1, 1) \Rightarrow$$

$$B_{U^\perp} = \{ (1, 0, 0, 0), (0, 1, -1, 1) \} \text{ es una base de } U^\perp$$

Así pues, $B = \{ (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, -1, 1) \}$ es una base de $\mathbb{R}^4$.

$$V = (1, 2, 3, 4) = a(0, 1, 1, 0) + b(0, 0, 1, 1) + c(1, 0, 0, 0) + d(0, 1, -1, 1) \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} c = 1 \\ a + d = 2 \\ a + b - d = 3 \\ b + d = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 1 \\ d = 1 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\text{proj}_{U^\perp}(V) = 1 \cdot (1, 0, 0, 0) + 1(0, 1, -1, 1) = (1, 1, -1, 1).$$

$$2) \quad U = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_3 = 0, x_2 + x_4 = 0 \}$$

$$U = \{ (x_1, x_2, -x_1, -x_2) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \} \Rightarrow$$

$$B_U = \{ (1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1) \} \text{ es una base de } U.$$

$$B = \{ (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1) \} \text{ es una base de } \mathbb{R}^4.$$

Sea $T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que:

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

T así definida es una aplicación lineal tal que $N(T) = \text{Im}(T) = U$.

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = a(1, 0, 0, 0) + b(0, 1, 0, 0) + c(1, 0, -1, 0) + d(0, 1, 0, -1)$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a+c = x_1 \\ b+d = x_2 \\ -c = x_3 \\ -d = x_4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = x_1 + x_3 \\ b = x_2 + x_4 \\ c = -x_3 \\ d = -x_4 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_C &= T \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_4 \\ -x_3 \\ -x_4 \end{pmatrix}_B = (x_1 + x_3) T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (x_2 + x_4) T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - x_3 T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - x_4 T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= (x_1 + x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (x_2 + x_4) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_4 \\ -x_1 - x_3 \\ -x_2 - x_4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$3) \mathcal{L} = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_3 = 2, x_2 + x_4 = 2 \}$$

$$A = (1, 2, 3, 4) \in \mathbb{R}^4$$

$$a) \mathcal{U} = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_3 = 0, x_2 + x_4 = 0 \}$$

es el subespacio vectorial asociado a $\mathcal{L}$.

$$\mathcal{U} = \{ (x_1, x_2, -x_1, -x_2) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \} \Rightarrow$$

$$B_{\mathcal{U}} = \{ (1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1) \} \text{ es una base de } \mathcal{U} \Rightarrow$$

$$\mathcal{U}^\perp = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_3 = 0, x_2 - x_4 = 0 \} \Rightarrow$$

$$\mathcal{U}^\perp = \{ (x_1, x_2, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \} \Rightarrow$$

$$B_{\mathcal{U}^\perp} = \{ (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1) \} \text{ es una base de } \mathcal{U}^\perp.$$

$$\vec{x} \in \mathcal{L}_A^\perp \Leftrightarrow \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathcal{L}_A^\perp \Leftrightarrow \vec{A}\vec{x} = (x_1 - 1, x_2 - 2, x_3 - 3, x_4 - 4) \in \mathcal{U}^\perp$$

$$\Leftrightarrow x_1 - 1 - (x_3 - 3) = 0, x_2 - 2 - (x_4 - 4) = 0 \Leftrightarrow x_1 - x_3 + 2 = 0, x_2 - x_4 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_3 = -2, x_2 - x_4 = -2 \Rightarrow \mathcal{L}_A^\perp = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_3 = -2, x_2 - x_4 = -2 \}$$

Calculamos $A' = \mathcal{L} \cap \mathcal{L}_A^\perp$:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_3 = -2 \\ x_2 - x_4 = -2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2 \\ x_4 = 2 \end{array} \right\} A' = (0, 0, 2, 2)$$

$$b) d(A, \mathcal{L}) = d(A, A') = \|(1, 2, 1, 2)\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{10}.$$

$$4) C: 54x^2 + 40xy + 54y^2 + 154x + 190y - 857 = 0$$

$$C': \frac{(x')^2}{17} + \frac{(y')^2}{37} = 1$$

$$C \rightarrow C' \text{ mediante } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

C y C' son elipses.

$$C': a = \sqrt{17}, b = \sqrt{37} \Rightarrow c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{37 - 17} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

* Puntos notables de C' :

• Focos: $(0, 2\sqrt{5}), (0, -2\sqrt{5})$

• Centro: $(0, 0)$

• Vértices: $(\sqrt{17}, 0), (-\sqrt{17}, 0), (0, \sqrt{37}), (0, -\sqrt{37})$

* Paso de C' a C

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \right]$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ -5/2 \end{pmatrix}$$

* Puntos notables de C : (cálculos en la otra cara)

• Focos: $(-\sqrt{10} - \frac{1}{2}, \sqrt{10} - \frac{5}{2}), (\sqrt{10} - \frac{1}{2}, -\sqrt{10} - \frac{5}{2})$

• Centro: $(-1/2, -5/2)$

• Vértices: $(\sqrt{\frac{17}{2}} - \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{17}{2}} - \frac{5}{2}), (-\sqrt{\frac{17}{2}} - \frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{17}{2}} - \frac{5}{2}),$
 $(-\sqrt{\frac{37}{2}} - \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{37}{2}} - \frac{5}{2}), (\sqrt{\frac{37}{2}} - \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{37}{2}} - \frac{5}{2})$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ -5/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -2\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ -5/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{10} \\ \sqrt{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ -5/2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ -5/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{10} - 1/2 \\ -\sqrt{10} - 5/2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{17} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ -5/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{17}{2}} - \frac{1}{2} \\ \sqrt{\frac{17}{2}} - \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{37} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ -5/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{37}{2}} - \frac{1}{2} \\ \sqrt{\frac{37}{2}} - \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$5) \begin{cases} y''(x) - 6y'(x) + 8y(x) = 64x^2 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

a) Como $y'' - 6y' + 8y = 64x^2$ es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes y $f(x) = 64x^2$ está bien definida en $\mathbb{R}$, entonces el intervalo maximal de definición de la solución buscada es $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

$$b) y'' - 6y' + 8y = 0 \Rightarrow r^2 - 6r + 8 = 0 \Rightarrow r = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = 2, 4$$

$$\Rightarrow y_h(x) = ae^{2x} + be^{4x} \text{ es solución de la homogénea.}$$

Busquemos una solución particular de la ecuación de la forma $y_p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

$$\begin{cases} y_p'(x) = 2\alpha x + \beta \\ y_p''(x) = 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha - 6(2\alpha x + \beta) + 8(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = 64x^2 \\ 8\alpha x^2 + (8\beta - 12\alpha)x + 2\alpha - 6\beta + 8\gamma = 64x^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8\alpha = 64 \\ 8\beta - 12\alpha = 0 \\ 2\alpha - 6\beta + 8\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 8 \\ \beta = \frac{12\alpha}{8} = 12 \\ \gamma = \frac{6\beta - 2\alpha}{8} = \frac{72 - 16}{8} = 7 \end{cases}$$

Por tanto, $y_p(x) = 8x^2 + 12x + 7$

Solución general de la completa:

$$y(x) = a e^{2x} + b e^{4x} + 8x^2 + 12x + 7, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Para resolver el problema de valores iniciales:

$$y'(x) = 2a e^{2x} + 4b e^{4x} + 16x + 12.$$

De donde:

$$\begin{cases} y(0) = a + b + 7 = 0 \\ y'(0) = 2a + 4b + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -7 \\ a + 2b = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = 1 \end{cases}$$

Por tanto, la solución buscada es:

$$y(x) = -8e^{2x} + e^{4x} + 8x^2 + 12x + 7, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$c) \begin{cases} (ye^{xy} + 2)dx + (xe^{xy} - 2y)dy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$a) (ye^{xy} + 2)dx + (xe^{xy} - 2y)dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = - \frac{ye^{xy} + 2}{xe^{xy} - 2y}$$

$$x=0, y=1 \Rightarrow 0 \cdot e^{0 \cdot 1} - 2 = -2 \neq 0 \Rightarrow g(x, y) = - \frac{ye^{xy} + 2}{xe^{xy} - 2}$$

es una función bien definida en $(x, y) = (0, 1) \Rightarrow$
 La condición $y(0) = 1$ determina un problema de valores iniciales bien definido.

$$b) \underbrace{(ye^{xy} + 2)}_{P(x, y)} dx + \underbrace{(xe^{xy} - 2y)}_{Q(x, y)} dy = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= e^{xy} + xy e^{xy} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= e^{xy} + xy e^{xy} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{la ecuación es exacta.}$$

$$d) F(x, y) \text{ tal que } \frac{\partial F}{\partial x} = P \text{ y } \frac{\partial F}{\partial y} = Q?$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P \Rightarrow F = \int (ye^{xy} + 2)dx = e^{xy} + 2x + h(y) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = xe^{xy} + h'(y) = xe^{xy} - 2y \Rightarrow h'(y) = -2y \Rightarrow h(y) = -y^2.$$

Por tanto, $F(x, y) = e^{xy} + 2x - y^2$.

La solución general viene dada por la expresión implícita $e^{xy} + 2x - y^2 = c$.

Pero,

$$y(0) = 1 \Rightarrow e^{0 \cdot 1} + 2 \cdot 0 - 1 = c \Rightarrow 0 = c.$$

Se concluye que la solución buscada viene dada por la expresión implícita

$$e^{xy} + 2x - y^2 = 0.$$
