



1. (12.5) En el espacio vectorial usual $\mathbb{R}^3$, se considera el subespacio vectorial

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}.$$

Además, sean $B_1 = \{(1, -1, 0), (3, -1, 2)\}$ y $B_2 = \{(1, -1, 0), (1, 1, 2)\}$ bases de U .

Halla, justificadamente, la matriz de cambio de base de B_1 a B_2 .

Resolución

Consideremos un vector cualquiera $\vec{u} = (x, y, z) \in U$. Puesto que B_1 y B_2 son bases de U , $\vec{u}$ tendrá coordenadas (únicas) en ambas bases. Por ejemplo,

- $\vec{u} = (r_1, s_1)$ en la base B_1 ,
- $\vec{u} = (r_2, s_2)$ en la base B_2 .

En este ejercicio nos piden cómo se pasa de (r_1, s_1) a (r_2, s_2) .

Empezamos hallando cómo se expresan los vectores de B_1 en la base B_2 .

- $(1, -1, 0) = 1(1, -1, 0) + 0(1, 1, 2)$, sin necesidad de más cálculos.
- $(3, -1, 2) = a(1, -1, 0) + b(1, 1, 2)$ para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$. Para hallarlos basta con resolver el sistema

$$\left. \begin{array}{l} a + b = 3 \\ -a + b = -1 \\ 2b = 2 \end{array} \right\}.$$

De la última ecuación, es claro que $b = 1$. Sustituyendo este valor tanto en la primera ecuación como en la segunda^(*), se obtiene $a = 1$.

Así pues, $(3, -1, 2) = 2(1, -1, 0) + 1(1, 1, 2)$.

Ya podemos determinar la relación entre (r_1, s_1) y (r_2, s_2) . En efecto,

$$\begin{aligned} r_1(1, -1, 0) + s_1(3, -1, 2) &= r_1[1(1, -1, 0) + 0(1, 1, 2)] + s_1[2(1, -1, 0) + 1(1, 1, 2)] = \\ &= (r_1 + 2s_1)(1, -1, 0) + s_1(1, 1, 2) = r_2(1, -1, 0) + s_2(1, 1, 2), \end{aligned}$$

de donde,

$$\left. \begin{array}{l} r_1 + 2s_1 = r_2 \\ s_1 = s_2 \end{array} \right\} \implies \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_2 \\ s_2 \end{pmatrix}.$$

Tras los cálculos anteriores, podemos concluir que la matriz de cambio de base de B_1 a B_2 es

$$M_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

& - & - & - & - & - & - & - & - & -

^(*)Si el valor de a fuera diferente en cada una de las dos ecuaciones, entonces el problema no tendría solución, pues estaría mal planteado.

2. (15) En el espacio vectorial usual $\mathbb{R}^3$, se considera el endomorfismo T definido por

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - z \\ y \\ x + y + z \end{pmatrix}.$$

Halla, justificadamente, una base de $T(U)$ para $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\}$.

Resolución

Empezamos viendo cuáles son los vectores U . Para ello basta con resolver el sistema de ecuaciones (en realidad, la ecuación)

$$x - y - z = 0 \quad \}.$$

Es claro que las soluciones vienen dadas por

$$\begin{cases} x = \lambda + \mu, \\ y = \lambda, \\ z = \mu, \end{cases} \quad \text{con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, todos los vectores de U vienen dados por la expresión

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Ahora, teniendo en cuenta la linealidad de T , la imagen de cualquier vector de U vendrá dada por

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

De este modo, $\{(2, 1, 2), (0, 0, 2)\}$ es un sistema de generadores de $T(U)$.

Por otra parte, los vectores $(2, 1, 2)$ y $(0, 0, 2)$ son linealmente independientes pues, por ejemplo, (es claro que) ninguno de los dos es múltiplo del otro.

Por tanto, ya que $B = \{(2, 1, 2), (0, 0, 2)\}$ es un sistema de generadores de $T(U)$ formado por vectores linealmente independientes, podemos concluir que B es una base de $T(U)$.

& - & - & - & - & - & - & - &

3. (15) En el espacio afín euclídeo tridimensional usual $\mathbb{R}^3$, con el sistema de referencia canónico, se consideran las rectas

- r , que pasa por el punto $A = (1, -2, 4)$ y tiene a $\vec{v}_r = (1, -3, -2)$ como vector director;
- s , que pasa por el punto $B = (2, 4, -1)$ y tiene a $\vec{v}_s = (2, -2, -1)$ como vector director.

Halla, justificadamente, los puntos P (de r) y Q (de s) tales que $d(P, Q) = d(r, s)$.

Resolución

Comenzamos viendo la posición relativa de r y s . Así, puesto que $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ no son proporcionales, podemos asegurar que r y s no pueden ser paralelas, esto es, se cortarán en un punto (serán secantes) o no se cortarán en ningún punto (se cruzarán).

Para comprobar si son secantes, tendremos en cuenta que

- los puntos de r son de la forma $(1, -2, 4) + \lambda(1, -3, -2)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$,
- los puntos de s son de la forma $(2, 4, -1) + \mu(2, -2, -1)$ con $\mu \in \mathbb{R}$.

Por tanto, si r y s se cortarán en un punto X , entonces existirían $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que

$$X = (1, -2, 4) + \lambda(1, -3, -2) = (2, 4, -1) + \mu(2, -2, -1).$$

En tal caso el sistema

$$\left. \begin{array}{l} 1 + \lambda = 2 + 2\mu \\ -2 - 3\lambda = 4 - 2\mu \\ 4 - 2\lambda = -1 - \mu \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} \lambda - 2\mu = 1 \\ 3\lambda - 2\mu = -6 \\ 2\lambda - \mu = 5 \end{array} \right\}$$

debería ser compatible. Pero, de la tercera ecuación, $\mu = 2\lambda - 5$ y, sustituyendo en las dos primeras:

- $\lambda - 2(2\lambda - 5) = 1 \implies -3\lambda + 10 = 1 \implies \lambda = 3;$
- $3\lambda - 2(2\lambda - 5) = -6 \implies -\lambda + 10 = -6 \implies \lambda = 16.$

Como obtenemos dos valores distintos de λ , podemos asegurar que el sistema es incompatible. Por tanto, r y s no tienen puntos en común. O sea, las rectas r y s se cruzan.

Para hallar los puntos P de r y Q de s tales que $d(P, Q) = d(r, s)$, podemos seguir varios caminos. Veamos dos posibles modos.

Modo 1 (usando las proyecciones de puntos sobre variedades afines)

Puesto que $d(P, Q) = d(r, s)$ (con P punto de r y Q punto de s), entonces es necesario que $d(P, Q) = d(r, s) = d(P, s) = d(Q, r)$. Por tanto, Q será la proyección de P sobre s y, a su vez, P será la proyección de Q sobre r . En consecuencia, el vector $\overrightarrow{PQ}$ será ortogonal tanto a r como a s . Es decir, $\overrightarrow{PQ}$ será ortogonal a $\vec{v}_r$ (vector director de r) y $\vec{v}_s$ (vector director de s).

Ahora bien,

- $P = (1, -2, 4) + \lambda(1, -3, -2) = (1 + \lambda, -2 - 3\lambda, 4 - 2\lambda),$
- $Q = (2, 4, -1) + \mu(2, -2, -1) = (2 + 2\mu, 4 - 2\mu, -1 - \mu).$

De donde, $\overrightarrow{PQ} = (1 - \lambda + 2\mu, 6 + 3\lambda - 2\mu, -5 + 2\lambda - \mu).$

Exigiendo que $\overrightarrow{PQ}$ sea ortogonal a $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$, tenemos que

$$\left. \begin{array}{l} \langle \overrightarrow{PQ}, \vec{v}_r \rangle = 0 \\ \langle \overrightarrow{PQ}, \vec{v}_s \rangle = 0 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} \langle (1 - \lambda + 2\mu, 6 + 3\lambda - 2\mu, -5 + 2\lambda - \mu), (1, -3, -2) \rangle = 0 \\ \langle (1 - \lambda + 2\mu, 6 + 3\lambda - 2\mu, -5 + 2\lambda - \mu), (2, -2, -1) \rangle = 0 \end{array} \right\} \implies$$

$$\left. \begin{aligned} 1 - \lambda + 2\mu - 18 - 9\lambda + 6\mu + 10 - 4\lambda + 2\mu &= 0 \\ 2 - 2\lambda + 4\mu - 12 - 6\lambda + 4\mu + 5 - 2\lambda + \mu &= 0 \end{aligned} \right\} \implies \left. \begin{aligned} -7 - 14\lambda + 10\mu &= 0 \\ -5 - 10\lambda + 9\mu &= 0 \end{aligned} \right\} \implies \left. \begin{aligned} 14\lambda - 10\mu &= -7 \\ 10\lambda - 9\mu &= -5 \end{aligned} \right\} \implies \lambda = -\frac{1}{2}, \mu = 0 \implies P = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 5\right), Q = (2, 4, -1).$$

Modo 2 (hallando, en $\mathbb{R}^3$, la recta perpendicular común a dos rectas que se cruzan)^(†)

Para hallar la recta t que corta perpendicularmente a r y s , determinaremos los planos

- π_1 que contiene a r y t ,
- π_2 que contiene a s y t .

Por consiguiente, $t = \pi_1 \cap \pi_2$. Además, al ser t la única recta que corta perpendicularmente a r y s , podemos afirmar que $P = r \cap t$ y $Q = s \cap t$.

Ya que t cortar perpendicularmente a r y s , el vector director de t será ortogonal a los vectores $\vec{v}_r = (1, -3, -2)$ y $\vec{v}_s = (2, -2, -1)$. Por tanto, si denotamos por $\vec{v}_t = (x, y, z)$, entonces

$$\left. \begin{aligned} \langle \vec{v}_t, \vec{v}_r \rangle &= 0 \\ \langle \vec{v}_t, \vec{v}_s \rangle &= 0 \end{aligned} \right\} \implies \left. \begin{aligned} \langle (x, y, z), (1, -3, -2) \rangle &= 0 \\ \langle (x, y, z), (2, -2, -1) \rangle &= 0 \end{aligned} \right\} \implies \left. \begin{aligned} x - 3y - 2z &= 0 \\ 2x + 2y - z &= 0 \end{aligned} \right\} \implies \left. \begin{aligned} x - 3y &= 2z \\ 2x + 2y &= z \end{aligned} \right\} \implies x = -\frac{z}{4}, y = -\frac{z}{4}.$$

Así, tomando $z = -4$, tenemos que $\vec{v}_t = (1, 3, -4)$.

Ahora hallamos la ecuación cartesiana del plano π_1 . Para ello, ya que dicho plano debe pasar por el punto $A = (1, -2, 4)$ y tener a $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_t$ como vectores directores, entonces las ecuaciones paramétricas serán

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu, \\ y = -2 - 3\lambda + 3\mu, \\ z = 4 - 2\lambda - 4\mu, \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Resolviendo este sistema en λ y μ ,

$$\left. \begin{aligned} \lambda + \mu &= x - 1 \\ 3\lambda - 3\mu &= -y - 2 \\ 2\lambda + 4\mu &= -z + 4 \end{aligned} \right\} \implies \left. \begin{aligned} \lambda + \mu &= x - 1 \\ -6\mu &= -3x - y + 1 \\ 2\mu &= -2x - z + 6 \end{aligned} \right\} \implies \left. \begin{aligned} \lambda + \mu &= x - 1 \\ 0 &= -9x - y - 3z + 19 \\ 2\mu &= -2x - z + 6 \end{aligned} \right\}$$

y, por tanto, el plano π_1 viene dado por la ecuación cartesiana $9x + y + 3z = 19$.

Procedemos de manera similar para hallar la ecuación cartesiana del plano π_2 , que debe pasar por el punto $B = (2, 4, -1)$ y tener a $\vec{v}_s$ y $\vec{v}_t$ como vectores directores.

$$\left. \begin{aligned} x &= 2 + 2\lambda + \mu, \\ y &= 4 - 2\lambda + 3\mu, \\ z &= -1 - \lambda - 4\mu, \end{aligned} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \implies \left. \begin{aligned} 2\lambda + \mu &= x - 2 \\ 2\lambda - 3\mu &= -y + 4 \\ \lambda + 4\mu &= -z - 1 \end{aligned} \right\} \implies \left. \begin{aligned} \lambda + 4\mu &= -z - 1 \\ 2\lambda + \mu &= x - 2 \\ 2\lambda - 3\mu &= -y + 4 \end{aligned} \right\} \implies \left. \begin{aligned} \lambda + 4\mu &= -z - 1 \\ -7\mu &= x + 2z \\ -11\mu &= -y + 2z + 6 \end{aligned} \right\} \implies \left. \begin{aligned} \lambda + 4\mu &= -z - 1 \\ 77\mu &= -11x - 22z \\ 77\mu &= 7y - 14z - 42 \end{aligned} \right\} \implies \left. \begin{aligned} \lambda + 4\mu &= -z - 1 \\ 77\mu &= -11x - 22z \\ 0 &= 11x + 7y + 8z - 42 \end{aligned} \right\}$$

y, por tanto, el plano π_2 viene dado por la ecuación cartesiana $11x + 7y + 8z = 42$.

^(†) Puesto que r y s se cruzan, solo puede existir una recta ortogonal a ambas.

Para terminar, basta con calcular $P = r \cap t$ y $Q = s \cap t$. Para ello, teniendo en cuenta que $t = \pi_1 \cap \pi_2$, podemos asegurar que t viene dada por las ecuaciones cartesianas

$$\left. \begin{array}{l} 9x + y + 3z = 19 \\ 11x + 7y + 8z = 42 \end{array} \right\}.$$

- **Cálculo de P .** Como los puntos de r son de la forma $(1 + \lambda, -2 - 3\lambda, 4 - 2\lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, sustituyendo en las cartesianas de t :

$$\left. \begin{array}{l} 9(1 + \lambda) + (-2 - 3\lambda) + 3(4 - 2\lambda) = 19 \\ 11(1 + \lambda) + 7(-2 - 3\lambda) + 8(4 - 2\lambda) = 42 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} 19 = 19 \\ 29 - 26\lambda = 42 \end{array} \right\} \implies \lambda = -\frac{1}{2}.$$

Por tanto, $P = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 5)$.

- **Cálculo de Q .** Como los puntos de s son de la forma $(2 + 2\mu, 4 - 2\mu, -1 - \mu)$ con $\mu \in \mathbb{R}$, sustituyendo en las cartesianas de t :

$$\left. \begin{array}{l} 9(2 + 2\mu) + (4 - 2\mu) + 3(-1 - \mu) = 19 \\ 11(2 + 2\mu) + 7(4 - 2\mu) + 8(-1 - \mu) = 42 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} 19 + 13\mu = 19 \\ 42 = 42 \end{array} \right\} \implies \mu = 0.$$

Por tanto, $Q = (2, 4, -1)$.

& - & - & - & - & - & - & - &

4. (12.5) Se considera una elipse C que admite la expresión $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ como forma canónica.

Justifica por qué $F_1 = (0, 0)$ y $F_2 = (0, -6)$ pueden ser los focos de C y, además, halla una expresión general $a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00} = 0$ de C para tales F_1 y F_2 .

Resolución

A partir de la expresión canónica de C , sabemos que su semieje mayor mide 5 unidades y el menor 4. Por tanto, la semidistancia entre focos es un valor c tal que $4^2 + c^2 = 5^2$, esto es, $c = \sqrt{25 - 16} = 3$.

Ahora bien, ya que $d(F_1, F_2) = \|(0 - 6) - (0, 0)\| = \|(0, -6)\| = 6$, concluimos que los focos de C pueden estar situados en los puntos $F_1 = (0, 0)$ y $F_2 = (0, -6)$.

Para hallar una expresión general de C , basta tener en cuenta la definición de elipse: lugar geométrico de los puntos (x, y) tales que la suma de las distancia a los focos F_1 y F_2 es constante e igual a la longitud del semieje mayor. Así pues, C corresponde a los puntos (x, y) tales que

$$d((x, y), (0, 0)) + d((x, y), (0, -6)) = 10,$$

de donde

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y + 6)^2} = 10 &\implies \sqrt{x^2 + (y + 6)^2} = 10 - \sqrt{x^2 + y^2} \implies \\ (\sqrt{x^2 + (y + 6)^2})^2 = (10 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 &\implies x^2 + (y + 6)^2 = 100 - 20\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2 \implies \\ x^2 + y^2 + 12y + 36 = 100 - 20\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2 &\implies 12y + 36 = 100 - 20\sqrt{x^2 + y^2} \implies \\ 20\sqrt{x^2 + y^2} = 64 - 12y &\implies 5\sqrt{x^2 + y^2} = 16 - 3y \implies (5\sqrt{x^2 + y^2})^2 = (16 - 3y)^2 \implies \\ 25(x^2 + y^2) = 256 - 96y + 9y^2 &\implies 25x^2 + 16y^2 + 96y - 256 = 0. \end{aligned}$$

Concluimos que una expresión general de C es $25x^2 + 16y^2 + 96y - 256 = 0$.

& - & - & - & - & - & - & - &

5. (10) Comprueba, justificadamente, que la ecuación diferencial

$$\frac{t^2 + x^2}{x^2} dt + \frac{t^2 + x^2}{tx} dx = 0$$

admite un factor integrante del tipo $\mu(t, x) = t^\alpha x^\beta$ para ciertos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Resolución

Comenzamos comprobando que la ecuación dada no es exacta.^(†)

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{t^2 + x^2}{x^2} \right) &= \frac{2x \cdot x^2 - (t^2 + x^2)2x}{x^4} = -\frac{2t^2}{x^3}. \\ \blacksquare \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{t^2 + x^2}{tx} \right) &= \frac{2t \cdot tx - (t^2 + x^2)x}{t^2 x^2} = \frac{t^2 x - x^3}{t^2 x^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{t^2}. \end{aligned}$$

Como $-\frac{2t^2}{x^3} \neq \frac{1}{x} - \frac{x}{t^2}$, la ecuación dada no es exacta.

Pasamos a buscar un factor integrante del tipo indicado. Para ello consideramos la ecuación

$$t^\alpha x^\beta \frac{t^2 + x^2}{x^2} dt + t^\alpha x^\beta \frac{t^2 + x^2}{tx} dx = 0,$$

que se puede reescribir de la forma

$$(t^{\alpha+2} x^{\beta-2} + t^\alpha x^\beta) dt + (t^{\alpha+1} x^{\beta-1} + t^{\alpha-1} x^{\beta+1}) dx = 0.$$

A partir de aquí,

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \frac{d(t^{\alpha+2} x^{\beta-2} + t^\alpha x^\beta)}{dx} &= (\beta - 2)t^{\alpha+2} x^{\beta-3} + \beta t^\alpha x^{\beta-1}, \\ \blacksquare \quad \frac{d(t^{\alpha+1} x^{\beta-1} + t^{\alpha-1} x^{\beta+1})}{dt} &= (\alpha + 1)t^\alpha x^{\beta-1} + (\alpha - 1)t^{\alpha-2} x^{\beta+1}. \end{aligned}$$

Así, imponiendo la condición de exactitud, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d(t^{\alpha+2} x^{\beta-2} + t^\alpha x^\beta)}{dx} &= \frac{d(t^{\alpha+1} x^{\beta-1} + t^{\alpha-1} x^{\beta+1})}{dt} \implies \\ (\beta - 2)t^{\alpha+2} x^{\beta-3} + \beta t^\alpha x^{\beta-1} &= (\alpha + 1)t^\alpha x^{\beta-1} + (\alpha - 1)t^{\alpha-2} x^{\beta+1} \implies \\ (\beta - 2)t^{\alpha+2} x^{\beta-3} + (\beta - \alpha - 1)t^\alpha x^{\beta-1} - (\alpha - 1)t^{\alpha-2} x^{\beta+1} &= 0 \implies \\ t^{\alpha-2} x^{\beta-3} ((\beta - 2)t^4 + (\beta - \alpha - 1)t^2 x^2 - (\alpha - 1)x^4) &= 0 \implies \\ (\beta - 2)t^4 + (\beta - \alpha - 1)t^2 x^2 - (\alpha - 1)x^4 &= 0 \implies \\ \left. \begin{aligned} \beta - 2 &= 0 \\ \beta - \alpha - 1 &= 0 \\ \alpha - 1 &= 0 \end{aligned} \right\} &\implies \left\{ \begin{aligned} \alpha &= 1, \\ \beta &= 2. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

De los cálculos anteriores, concluimos que $\mu(t, x) = tx^2$ es un factor integrante para la ecuación diferencial

$$\frac{t^2 + x^2}{x^2} dt + \frac{t^2 + x^2}{tx} dx = 0.$$

& - & - & - & - & - & - & - &

^(†) Si la ecuación dada fuera exacta, entonces la pregunta planteada quedaría respondida tomando $\alpha = \beta = 0$. Esto es, considerando $\mu(t, x) = 1$.

6. (15) Considera la ecuación diferencial

$$tx'(t) = t + x(t). \quad (1)$$

Halla, justificando adecuadamente cada paso e indicando explícitamente su dominio maximal, la solución de (1) que satisface la condición inicial $x(-1) = 2$.

Resolución

Comencemos expresando (1) en forma normal:

$$x'(t) = 1 + \frac{1}{t}x(t) \quad \left(\implies x' = 1 + \frac{x}{t} \right).$$

Así tenemos que (1) es una ecuación lineal de primer orden, $a_1(t)x'(t) = a_0(t)x(t) + b(t)$, con

- $a_1(t) = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$;
- $a_0(t) = \frac{1}{t}$ para todo $t < 0$ o $a_0(t) = \frac{1}{t}$ para todo $t > 0$;
- $b(t) = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Por tanto, podemos asegurar que las soluciones de (1) admiten como dominios maximales los intervalos $I_- =]-\infty, 0[$ o $I_+ =]0, +\infty[$.

Además, es claro que (1) es también homogénea. Por tanto, podemos resolverla como homogénea o como lineal.

Resolución como homogénea

Considerando el cambio de variable $u = \frac{x}{t}$, tenemos que

$$\begin{aligned} u = \frac{x}{t} &\implies x = tu \implies x' = u + tu' \implies 1 + u = u + tu' \implies u' = \frac{1}{t} \implies \\ u &= \ln|t| + C \implies \frac{x}{t} = \ln|t| + C \implies x = t \ln|t| + Ct. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos dos familias de soluciones para (1). A saber,

- $x(t) = t \ln(-t) + Ct, \forall t < 0, C \in \mathbb{R}$;
- $x(t) = t \ln(t) + Ct, \forall t > 0, C \in \mathbb{R}$.

Puesto que nos dan la condición inicial $x(-1) = 2$, debemos considerar la familia cuyo dominio contenga a $t = -1$, es decir, la expresión asociada a $t < 0$. Así pues,

$$x(t) = t \ln(-t) + Ct \implies x(-1) = (-1) \ln(1) + C(-1) = C(-1) = 2 \implies C = -2.$$

Concluimos que la solución buscada es

$$x(t) = t \ln(-t) - 2t, \forall t < 0.$$

Resolución como lineal

Comenzamos resolviendo la ecuación lineal homogénea asociada.

$$\begin{aligned} x' = 1 + \frac{x}{t} &\implies \int \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{t} dt \implies \ln|x| = \ln|t| + C, C \in \mathbb{R} \implies \\ \ln\left(\frac{|x|}{|t|}\right) &= C, C \in \mathbb{R} \implies \ln\left|\frac{x}{t}\right| = C, C \in \mathbb{R} \implies \left|\frac{x}{t}\right| = K, K > 0 \implies \\ \frac{x}{t} &= K, K \neq 0 \implies x(t) = Kt, K \neq 0. \end{aligned}$$

Además, $x \equiv 0$ es también solución, como se puede comprobar por sustitución directa. Por tanto, hay dos familias de soluciones para la lineal homogénea. A saber,

- $x_h(t) = Kt, \forall t < 0, K \in \mathbb{R}$;
- $x_h(t) = Kt, \forall t > 0, K \in \mathbb{R}$.

A continuación hallamos una solución particular $x_p(t)$ de la ecuación lineal completa. Para esto emplearemos el método de variación de constantes, esto es, supondremos que $x_p(t) = h(t)t$.^(§)

$$x_p = th \implies x'_p = h + th' \implies h + th' = 1 + \frac{th}{t} \implies th' = 1 \implies$$

$$h' = \frac{1}{t} \implies h = \int \frac{1}{t} dt \implies h(t) = \ln |t| \implies x_p = t \ln |t|.$$

Por tanto, como soluciones particulares de la ecuación completa, tenemos

- $x_p(t) = t \ln(-t), \forall t < 0;$
- $x_p(t) = t \ln(t), \forall t > 0.$

A partir de los cálculos anteriores, hay dos familias de soluciones para (1). En efecto,

- $x(t) = x_h(t) + x_p(t) = Kt + t \ln(-t), \forall t < 0, K \in \mathbb{R};$
- $x(t) = x_h(t) + x_p(t) = Kt + t \ln(t), \forall t > 0, K \in \mathbb{R}.$

A partir de aquí, se sigue igual que en la resolución como homogénea.

& - & - & - & - & - & - & - &

^(§)En principio no haremos distinción según el dominio. O sea, supondremos que un proceso único proporcionará $x_p(t)$, tanto para $t < 0$ como para $t > 0$. Solo si fuera necesario, distinguiríamos casos.