



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Departamento de
Matemática Aplicada

Doble Grado Ing. Civil-ADE

Matemática Aplicada

Convocatoria Extraordinaria

Teoría y problemas

12 de julio de 2024

Apellidos, Nombre:

DNI o Pasaporte:

Responde a las cuestiones planteadas en cada uno de los ejercicios.

1. (14) En el espacio vectorial usual $\mathbb{R}^4$, se consideran los subespacios vectoriales

$$U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, x_1 - x_4 = 0\},$$

$$U_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, x_1 + x_3 = 0\}.$$

- a) (5) Halla, justificadamente, una base B_1 de U_1 y una base B_2 de U_2 .
b) (9) Halla, justificadamente, la expresión matricial de un endomorfismo $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $N(T) = U_1$ e $\text{Im}(T) = U_2$.

Resolución

- a) Para hallar una base de U_1 , empezamos viendo cómo son los vectores de U_1 . Para ello basta con resolver el sistema lineal dado por sus ecuaciones cartesianas.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} -x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{array} \right\} \implies$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\alpha, \beta, \beta, \alpha), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \implies$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha(1, 0, 0, 1) + \beta(0, 1, 1, 0), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, todos los vectores de U_1 son combinaciones lineales de $(1, 0, 0, 1)$ y $(0, 1, 1, 0)$, es decir, U_1 está generado por los vectores $(1, 0, 0, 1)$ y $(0, 1, 1, 0)$.

Por otra parte, es claro que $(1, 0, 0, 1)$ no es múltiplo $(0, 1, 1, 0)$ (ni al contrario). Por tanto, $(1, 0, 0, 1)$ y $(0, 1, 1, 0)$ son vectores linealmente independientes.

Así pues, podemos afirmar que $B_1 = \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\}$ es una base de U_1 .

Para hallar una base de U_2 procedemos de modo similar.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} -x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{array} \right\} \implies$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\alpha, \beta, -\alpha, -\beta), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \implies$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha(1, 0, -1, 0) + \beta(0, 1, 0, -1), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, U_2 está generado por los vectores $(1, 0, -1, 0)$ y $(0, 1, 0, -1)$.

Por otra parte, es claro que $(1, 0, -1, 0)$ no es múltiplo $(0, 1, 0, -1)$ (ni al contrario). Por tanto, $(1, 0, -1, 0)$ y $(0, 1, 0, -1)$ son vectores linealmente independientes.

Así pues, $B_2 = \{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1)\}$ es una base de U_2 .

- b) Para dar la expresión matricial de T , será suficiente con tener la imagen de los vectores de una base de $\mathbb{R}^4$. Para ello, y puesto que $N(T) = U_1$, vamos a construir una base de $\mathbb{R}^4$ que incluya a B_1 . Por ejemplo, de entre las muchas posibles (infinitas posibles), consideremos $B = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\}$. Comprobemos que B es una base de $\mathbb{R}^4$.

Primero nos aseguramos de que todo vector de $\mathbb{R}^4$ se puede poner como combinación lineal de los vectores $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 1)$ y $(0, 1, 1, 0)$. Para ello, sea (x_1, x_2, x_3, x_4) un vector cualquiera de $\mathbb{R}^4$. Entonces

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_1(1, 0, 0, 0) + a_2(0, 1, 0, 0) + a_3(1, 0, 0, 1) + a_4(0, 1, 1, 0)$$

si, y solo si, es compatible el sistema lineal dado por

$$\left. \begin{array}{l} a_1 + a_3 = x_1 \\ a_2 + a_4 = x_2 \\ a_4 = x_3 \\ a_3 = x_4 \end{array} \right\}$$

Es (casi) inmediato que $a_1 = x_1 - x_4$, $a_2 = x_2 - x_3$, $a_3 = x_4$, $a_4 = x_3$ es la única solución de este sistema y, por tanto, que es compatible determinado. Por consiguiente, B es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^4$.

Por otro lado, si consideramos la combinación lineal

$$a_1(1, 0, 0, 0) + a_2(0, 1, 0, 0) + a_3(1, 0, 0, 1) + a_4(0, 1, 1, 0) = (0, 0, 0, 0),$$

podemos afirmar, por lo visto en el párrafo anterior, que la única posibilidad para que se de la igualdad es que $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$. Por tanto, los vectores que forman B son linealmente independientes.

Por todo lo anterior, concluimos que B es una base de $\mathbb{R}^4$.

Para finalizar este apartado, como $N(T) = U_1$, entonces $T(1, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$ y $T(0, 1, 1, 0) = (0, 0, 0, 0)$. Por otra parte, ya que $\text{Im}(T) = U_2$, podemos considerar que $T(1, 0, 0, 0) = (1, 0, -1, 0)$ y $T(0, 1, 0, 0) = (0, 1, 0, -1)$. Así, teniendo en cuenta la linealidad de T , llegamos a que

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = T((x_1 - x_4)(1, 0, 0, 0) + (x_2 - x_3)(0, 1, 0, 0) + x_4(1, 0, 0, 1) + x_3(0, 1, 1, 0)) =$$

$$(x_1 - x_4)T(1, 0, 0, 0) + (x_2 - x_3)T(0, 1, 0, 0) + x_4T(1, 0, 0, 1) + x_3T(0, 1, 1, 0) =$$

$$(x_1 - x_4)(1, 0, -1, 0) + (x_2 - x_3)(0, 1, 0, -1) + x_4(0, 0, 0, 0) + x_3(0, 0, 0, 0) \implies$$

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_4, x_2 - x_3, -x_1 + x_4, -x_2 + x_3) \implies$$

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_4 \\ x_2 - x_3 \\ -x_1 + x_4 \\ -x_2 + x_3 \end{pmatrix} \implies T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

siendo esta última igualdad la expresión matricial de T (con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^4$).

& - & - & - & - & - & - & - & - & -

2. (14) En el espacio vectorial euclídeo usual $\mathbb{R}^4$, con la base canónica $C = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$, se consideran el vector $\vec{w} = (1, 1, 1, 1)_C$, la base $B = \{(1, 0, 0, 0)_C, (1, 1, 0, 0)_C, (1, 1, 1, 0)_C, (1, 1, 1, 1)_C\}$ y el subespacio vectorial

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)_C \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\}.$$

- a) (9) Halla, justificadamente, todos los vectores $\vec{v} \in \mathbb{R}^4$ tales que $p_{U^\perp}(\vec{v}) = \vec{w}$.
 b) (5) Halla, justificadamente, las coordenadas en la base B de los vectores obtenidos en a).

Resolución

- a) A partir de las ecuaciones cartesianas de U , tenemos que

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\} \implies (x_1, x_2, x_3, x_4) = (\alpha, -\alpha, \beta, -\beta), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \implies$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha(1, -1, 0, 0) + \beta(0, 0, 1, -1), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, todos los vectores de U son combinaciones lineales de $(1, -1, 0, 0)$ y $(0, 0, 1, -1)$, es decir, U está generado por los vectores $(1, -1, 0, 0)$ y $(0, 0, 1, -1)$.

Por otra parte, es claro que $(1, -1, 0, 0)$ no es múltiplo $(0, 0, 1, -1)$ (ni al contrario). Por tanto, $(1, -1, 0, 0)$ y $(0, 0, 1, -1)$ son vectores linealmente independientes.

Así pues, podemos afirmar que $B_U = \{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1)\}$ es una base de U .

Ahora, para calcular los vectores $\vec{v} \in \mathbb{R}^4$ tales que $p_{U^\perp}(\vec{v}) = \vec{w}$, por el concepto de proyección ortogonal sabemos que $\vec{v} - p_{U^\perp}(\vec{v}) = \vec{v} - \vec{w} \in (U^\perp)^\perp = U$. Por tanto, si $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, entonces

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) - (1, 1, 1, 1) \in U \implies$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) - (1, 1, 1, 1) = a(1, -1, 0, 0) + b(0, 0, 1, -1), \forall a, b \in \mathbb{R} \implies$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 + a, 1 - a, 1 + b, 1 - b), \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Conviene comentar que, en este apartado, todos los vectores se han expresado en la base canónica C . Por este motivo no se ha indicado explícitamente en cada vector.

- b) Para hallar las coordenadas de los vectores de la forma $(1 + a, 1 - a, 1 + b, 1 - b)_C$, con $a, b \in \mathbb{R}$, en la base $B = \{(1, 0, 0, 0)_C, (1, 1, 0, 0)_C, (1, 1, 1, 0)_C, (1, 1, 1, 1)_C\}$, supongamos que dichas coordenadas son $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)_B$. Entonces,

$$(1 + a, 1 - a, 1 + b, 1 - b)_C = \alpha_1(1, 0, 0, 0)_C + \alpha_2(1, 1, 0, 0)_C + \alpha_3(1, 1, 1, 0)_C + \alpha_4(1, 1, 1, 1)_C$$

$$\implies \left. \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1 + a \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1 - a \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 1 + b \\ \alpha_4 = 1 - b \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \alpha_4 = 1 - b, \\ \alpha_3 = 1 + b - \alpha_4 = 2b, \\ \alpha_2 = 1 - a - \alpha_3 - \alpha_4 = -a - b, \\ \alpha_1 = 1 + a - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = 2a. \end{array} \right.$$

Por tanto, tenemos que

$$(1 + a, 1 - a, 1 + b, 1 - b)_C = (2a, -a - b, 2b, 1 - b)_B.$$

& - & - & - & - & - & - & - & -

3. (14) Sea A una matriz simétrica real de orden 3×3 tal que

- $\lambda_1 = 1$ es valor propio de A con subespacio propio asociado

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\},$$

- $\lambda_2 = -1$ es valor propio de A con subespacio propio asociado V_2 .

a) (5) ¿Esta V_2 generado por $\vec{u} = (1, 1, 1)$? ¿Y por $\vec{w} = (1, 2, 1)$? Justifica tus respuestas.

b) (9) Halla, explícita y justificadamente, A .

Resolución 1

a) Como A es una matriz simétrica, entonces es diagonalizable por semejanza ortogonal, es decir, existen una matriz ortogonal Q (o sea, $Q^{-1} = Q^T$) y una matriz diagonal D tales que $A = QDQ^T$.

Para construir Q necesitamos una base ortonormal por cada uno de los subespacios propios asociados a A . Empezamos con V_1 .

$$x + 2y + z = 0 \implies (x, y, z) = (\alpha, \beta, -\alpha - 2\beta) = \alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, -2).$$

Razonando de modo similar al visto en los ejercicios 1, 2 y 3, tenemos que una base de V_1 es $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} = \{(1, 0, -1), (0, 1, -2)\}$. Para obtener una base ortogonal, aplicamos el método de Gram-Schmidt.

- $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 = (1, 0, -1)$.
- $\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \alpha\vec{v}_1 = (-\alpha, 1, -2 + \alpha)$ de forma que $\langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle = 0$. Entonces

$$\langle (-\alpha, 1, -2 + \alpha), (1, 0, -1) \rangle = 0 \implies -\alpha + 2 - \alpha = 0 \implies \alpha = 1,$$

de donde $\vec{v}_2 = (-1, 1, -1)$.

Finalmente, normalizando $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, tenemos que $B_1 = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\}$ es una base ortonormal de V_1 .

Supongamos ahora que $\vec{u} = (1, 1, 1)$ genera a V_2 . Entonces $B_2 = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\}$ sería una base ortonormal de V_2 y, por tanto,

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \implies QQ^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

Ya que Q^T no es la inversa de Q , podemos asegurar que V_2 no está generado por el vector $\vec{u} = (1, 1, 1)$.

Veamos qué pasa si escogemos a $\vec{w} = (1, 2, 1)$. Entonces $B_2 = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right\}$ sería una base ortonormal de V_2 , de donde

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \implies QQ^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así, Q^T es la inversa de Q y podemos asegurar que V_2 está generado por $\vec{w} = (1, 2, 1)$.

NOTA: Este apartado se podría hacer mucho más brevemente si se recuerda que, para matrices simétricas, los vectores propios de espacios propios distintos son, necesariamente, ortogonales. En este ejercicio, esto equivale a que V_1 y V_2 sean ortogonales entre sí.

Durante el curso, este hecho se usa al hallar la forma canónica de una cónica.

- b) Como las columnas de Q son vectores propios de A , se verifica que $AQ = DQ$, siendo D la matriz diagonal formada por los valores propios de A . Y como $Q^{-1} = Q^T$, entonces $A = QDQ^T$.

Por lo cálculos realizados en el apartado anterior,

$$A = QDQ^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Resolución 2

Se pueden resolver ambos apartados de una vez, tomando una matriz simétrica cualquiera

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}$$

e imponiendo las condiciones del ejercicio.

Por los cálculos ya hechos, sabemos que $B = \{(1, 0, -1), (0, 1, -2)\}$ es una base de V_1 . Así,

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_1 - a_3 = 1 \\ a_2 - a_5 = 0 \\ a_3 - a_6 = -1 \end{cases},$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_2 - 2a_3 = 0 \\ a_4 - 2a_5 = 1 \\ a_5 - 2a_6 = -2 \end{cases}.$$

Supongamos ahora que V_2 está generado por $\vec{u} = (1, 1, 1)$. Entonces

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = -1 \\ a_2 + a_4 + a_5 = -1 \\ a_3 + a_5 + a_6 = -1 \end{cases}.$$

Por tanto, tenemos que, los tres sistemas anteriores, nos conducen a un sistema de nueve ecuaciones con seis incógnitas (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 y a_6). Pero, si nos fijamos, veremos que las ecuaciones su pueden agrupar en tres sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas, los cuales son más fáciles de resolver. En efecto,

$$\begin{cases} a_1 - a_3 = 1 \\ a_2 - 2a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = -1, a_3 = \frac{-1}{2},$$

$$\begin{cases} a_2 - a_5 = 0 \\ a_4 - 2a_5 = 1 \\ a_2 + a_4 + a_5 = -1 \end{cases} \Rightarrow a_2 = \frac{-1}{2}, a_4 = 0, a_5 = \frac{-1}{2},$$

$$\begin{cases} a_3 - a_6 = -1 \\ a_5 - 2a_6 = -2 \\ a_3 + a_5 + a_6 = -1 \end{cases} \Rightarrow a_3 = \frac{-1}{2}, a_5 = -1, a_6 = \frac{1}{2}.$$

Como los valores de a_2 y a_5 no son los mismos en los tres sistemas, podemos afirmar que V_2 no está generado por el vector $\vec{u} = (1, 1, 1)$.

Para ver si V_2 está generado por $\vec{w} = (1, 2, 1)$, razonamos de modo similar. El sistema para $\vec{w}$ es

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \left. \begin{aligned} a_1 + 2a_2 + a_3 &= -1 \\ a_2 + 2a_4 + a_5 &= -2 \\ a_3 + 2a_5 + a_6 &= -1 \end{aligned} \right\}.$$

Ahora, combinando este sistema con los dos asociados a los vectores de V_1 y, agrupando adecuadamente las nueve ecuaciones resultantes, tenemos que

$$\left. \begin{aligned} a_1 - a_3 &= 1 \\ a_2 - 2a_3 &= 0 \\ a_1 + 2a_2 + a_3 &= -1 \end{aligned} \right\} \implies a_1 = \frac{2}{3}, a_2 = \frac{-2}{3}, a_3 = \frac{-1}{3},$$

$$\left. \begin{aligned} a_2 - a_5 &= 0 \\ a_4 - 2a_5 &= 1 \\ a_2 + 2a_4 + a_5 &= -2 \end{aligned} \right\} \implies a_2 = \frac{-2}{3}, a_4 = \frac{-1}{3}, a_5 = \frac{-2}{3},$$

$$\left. \begin{aligned} a_3 - a_6 &= -1 \\ a_5 - 2a_6 &= -2 \\ a_3 + 2a_5 + a_6 &= -1 \end{aligned} \right\} \implies a_3 = \frac{-1}{3}, a_5 = \frac{-2}{3}, a_6 = \frac{2}{3}.$$

En este caso, todas las incógnitas toman los mismo valores en los tres sistemas, por lo que $\vec{w} = (1, 2, 1)$ sí puede generar a V_2 . De paso, tenemos que

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

& - & - & - & - & - & - & - & - & -

4. (14) En el espacio afín usual $\mathbb{R}^3$, con el sistema de referencia canónico $\mathcal{R} = \{O; C = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}\}$, se consideran los sistemas de referencia

- $\mathcal{R}_1 = \{O_1; B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}\}$, siendo $O_1 = (1, 1, 1)_{\mathcal{R}}$, $\vec{u}_1 = (1, 1, 0)_C$, $\vec{u}_2 = (1, 0, 1)_C$ y $\vec{u}_3 = (0, 1, 1)_C$,
- $\mathcal{R}_2 = \left\{O_2; B_2 = \left\{\overrightarrow{O_2P_1}, \overrightarrow{O_2P_2}, \overrightarrow{O_2P_3}\right\}\right\}$, con $O_2 = (1, 0, 2)_{\mathcal{R}}$, $P_1 = (2, 0, 3)_{\mathcal{R}}$, $P_2 = (2, 1, 2)_{\mathcal{R}}$ y $P_3 = (1, 1, 3)_{\mathcal{R}}$.

Además, sea la variedad afín $\mathcal{L} = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid P = (x, y, z)_{\mathcal{R}_1} = (x, y, z)_{\mathcal{R}_2}\}$.

- a) (7) Justificando cada paso, expresa $\mathcal{L}$ mediante ecuaciones cartesianas.
b) (7) Justificando cada paso, expresa $\mathcal{L}$ mediante ecuaciones paramétricas.

Resolución

- a) Sea P un punto de la variedad $\mathcal{L}$. Por ser $P = (x, y, z)_{\mathcal{R}_1}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O_1P} &= P - O_1 = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3 \implies P = O_1 + (x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3) \implies \\ P &= (1, 1, 1)_{\mathcal{R}} + (x(1, 1, 0)_C + y(1, 0, 1)_C + z(0, 1, 1)_C) \implies \\ P &= (1, 1, 1)_{\mathcal{R}} + (x + y, x + z, y + z)_C \implies P = (x + y + 1, x + z + 1, y + z + 1)_{\mathcal{R}}.\end{aligned}$$

Por otra parte, puesto que

- $\overrightarrow{O_2P_1} = (2, 0, 3)_{\mathcal{R}} - (1, 0, 2)_{\mathcal{R}} = (1, 0, 1)_C$,
- $\overrightarrow{O_2P_2} = (2, 1, 2)_{\mathcal{R}} - (1, 0, 2)_{\mathcal{R}} = (1, 1, 0)_C$,
- $\overrightarrow{O_2P_3} = (1, 1, 3)_{\mathcal{R}} - (1, 0, 2)_{\mathcal{R}} = (0, 1, 1)_C$,

entonces

$$\begin{aligned}P &= (x, y, z)_{\mathcal{R}_2} \implies \overrightarrow{O_2P} = P - O_2 = x(1, 0, 1)_C + y(1, 1, 0)_C + z(0, 1, 1)_C \implies \\ P &= (1, 0, 2)_{\mathcal{R}} + (x + y, y + z, x + z)_C \implies P = (x + y + 1, y + z, x + z + 2)_{\mathcal{R}}.\end{aligned}$$

De las dos expresiones obtenidas para P , y ya que ambas están dadas en el mismo sistema de referencia, vemos que

$$\begin{aligned}(x + y + 1, x + z + 1, y + z + 1)_{\mathcal{R}} &= (x + y + 1, y + z, x + z + 2)_{\mathcal{R}} \implies \\ \left. \begin{aligned}x + y + 1 &= x + y + 1 \\ x + z + 1 &= y + z \\ y + z + 1 &= x + z + 2\end{aligned} \right\} &\implies \left. \begin{aligned}0 &= 0 \\ x + 1 &= y \\ y &= x + 1\end{aligned} \right\}.\end{aligned}$$

Ya que la primera ecuación ($0 = 0$) no aporta información y las otras dos son la misma, concluimos que la variedad afín $\mathcal{L}$ está definida por la ecuación cartesiana

$$x - y = -1$$

(respecto del sistema de referencia $\mathcal{R}$).

- b) Sabiendo que la ecuación cartesiana $x - y = -1$ define a la variedad $\mathcal{L}$, tenemos que los puntos de $\mathcal{L}$ son de la forma

$$\begin{cases} x = \alpha, \\ y = \alpha + 1, \\ z = \beta, \end{cases} \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Esta es, precisamente, una representación de $\mathcal{L}$ mediante ecuaciones paramétricas (respecto del sistema de referencia $\mathcal{R}$).

5. (12) Considera la ecuación diferencial

$$(t^3 + tx^2)dt + (xt^2 + x^3)dx = 0. \quad (1)$$

- a) (4) ¿Es (1) exacta? ¿Es $\mu(t, x) = (t^2 + x^2)^{-1}$ un factor integrante de (1)? Justifica tus respuestas.
- b) (8) Halla, justificando adecuadamente cada paso, la solución de (1) que satisface la condición inicial $x(3) = -4$. Se dará explícitamente el dominio maximal de la solución obtenida.

Resolución

- a) La ecuación (1) es de la forma $M(t, x)dt + N(t, x)dx = 0$, con $M(t, x) = t^3 + tx^2$ y $N(t, x) = xt^2 + x^3$. Por tanto, para comprobar si es exacta, necesitamos ver que $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}$. Como

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial(t^3 + tx^2)}{\partial x} = 2tx \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial(xt^2 + x^3)}{\partial t} = 2tx,$$

podemos afirmar que (1) es exacta.

Para comprobar si $\mu(t, x) = (t^2 + x^2)^{-1} = \frac{1}{t^2 + x^2}$ un factor integrante de (1), consideramos la ecuación

$$\frac{t^3 + tx^2}{t^2 + x^2}dt + \frac{xt^2 + x^3}{t^2 + x^2}dx = 0 \implies tdt + xdx = 0$$

y vemos si es exacta. Tomando $\tilde{M}(t, x) = t$ y $\tilde{N}(t, x) = x$, tenemos que

$$\frac{\partial \tilde{M}(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \tilde{N}(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} = 0.$$

Como $\frac{\partial \tilde{M}}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial t}$, tenemos que $\mu(t, x) = (t^2 + x^2)^{-1}$ es un factor integrante de (1).

- b) Observemos que la forma normal de (1) es

$$x' = \frac{dx}{dt} = -\frac{t^3 + tx^2}{xt^2 + x^3} = -\frac{t}{x}.$$

Por tanto, podemos asegurar que sus soluciones estarán bien definidas siempre que $x(t)$ no se anule.

Para resolver la ecuación dada, podríamos usar exactitud e, incluso, que es homogénea. Sin embargo recurriremos a que es de variables separadas. En efecto,

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{t^3 + tx^2}{xt^2 + x^3} = -\frac{t}{x} \implies \int xdx = -\int tdt \implies \frac{x^2}{2} = -\frac{t^2}{2} + C \implies$$

$$x^2 = C - t^2 \implies x(t) = \sqrt{C - t^2} \quad \text{o} \quad x(t) = -\sqrt{C - t^2}.$$

Por cierto, ya que $C = x^1 + t^2$, en realidad C será siempre positiva.

Ahora bien, como queremos hallar la solución que satisface la condición inicial $x(3) = -4$, entonces debemos tomar $x(t) = -\sqrt{C - t^2}$, de donde

$$x(3) = -\sqrt{C - 9} = -4 \implies \sqrt{C - 9} = 4 \implies C - 9 = 16 \implies C = 25.$$

Por tanto, la función buscada tiene la forma $x(t) = -\sqrt{25 - t^2}$, que estará bien definida siempre que $25 - t^2 \geq 0$. Pero, como $x(t) = -\sqrt{25 - t^2}$ ha de ser derivable, entonces debe verificarse que $25 - t^2 > 0$ (de paso aseguramos que $x(t)$ no se anule). Por tanto, $t \in]-5, 5[$.

Así pues, podemos concluir que la solución buscada es

$$x(t) = -\sqrt{25 - t^2}, \quad \forall t \in]-5, 5[.$$

Resolución de b aplicando exactitud

Puesto que (1) es exacta, sabemos que existirá una función $F(t, x)$, de clase C^1 , tal que $\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = t^3 + tx^2$ y $\frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = xt^2 + x^3$. Por tanto,

$$\begin{aligned} F(t, x) &= \int (t^3 + tx^2) dt \implies F(t, x) = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2x^2 + h(x) \implies \\ \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} &= \frac{\partial (\frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2x^2 + h(x))}{\partial x} = t^2x + h'(x) = xt^2 + x^3 \implies \\ h'(x) &= x^3 \implies h(x) = \frac{1}{4}x^4 \implies F(t, x) = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2x^2 + \frac{1}{4}x^4. \end{aligned}$$

Por tanto, las soluciones de (1) vienen dadas, implícitamente, por la expresión

$$\frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2x^2 + \frac{1}{4}x^4 = K, \text{ con } K \in \mathbb{R},$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2x^2 + \frac{1}{4}x^4 &= K, \quad K \in \mathbb{R} \implies t^4 + 2tx + x^4 = K, \quad K \in \mathbb{R} \implies \\ (t^2 + x^2)^2 &= K, \quad K \in \mathbb{R}^+ \implies t^2 + x^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Y, a partir de aquí, ya se continua como en la resolución por variables separadas.

& - & - & - & - & - & - & - &

6. (12) Considera la ecuación diferencial

$$x''(t) = x'(t) + 2x(t) + 4t^2. \quad (2)$$

- a) (8) Halla, justificando adecuadamente cada paso, la solución general de (2). Se dará explícitamente el dominio maximal de la solución general obtenida.
- b) (4) Halla, justificando adecuadamente cada paso, la solución de (2) que satisface la condición inicial $(x(0), x'(0)) = (0, 2)$. Se dará explícitamente el dominio maximal de la solución obtenida.

Resolución

- a) La ecuación diferencial (2) es una ecuación lineal de segundo orden $x''(t) = a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t)$ con coeficientes $a_1(t) = 1$, $a_0(t) = 2$ y término independiente $b(t) = 4t^2$. Como $a_1(t)$, $a_0(t)$ y $b(t)$ son funciones continuas definidas en todo $\mathbb{R}$, podemos afirmar que la solución general de (2) está definida en todo $\mathbb{R}$.

Para hallar la solución general $x(t)$ de (2), tenemos en cuenta que $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$, donde

- $x_h(t)$ es la solución general de la ecuación homogénea asociada $x''(t) = x'(t) + 2x(t)$
- y $x_p(t)$ es una solución particular de (2).

Para resolver $x''(t) = x'(t) + 2x(t)$, al ser una ecuación de coeficientes constantes, basta con calcular las raíces su polinomio característico asociado. Así,

$$\begin{aligned} r^2 = r + 2 &\implies r^2 - r - 2 = 0 \implies r = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} \implies \\ r &= \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \implies r_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \text{ y } r_2 = \frac{1-3}{2} = -1. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$x_h(t) = \alpha e^{2t} + \beta e^{-t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Para hallar una solución particular de (2), aplicamos el método de coeficientes indeterminados. Para ello, suponemos que existe una solución de la forma $x_p(t) = at^2 + bt + c$. Derivando y sustituyendo en (2),

$$\begin{aligned} x_p(t) = at^2 + bt + c &\implies x'_p(t) = 2at + b \implies x''_p(t) = 2a \implies \\ 2a = 2at + b + 2(at^2 + bt + c) + 4t^2 &\implies 2a = (2a + 4)t^2 + 2(a + b)t + 2c \implies \\ \left. \begin{aligned} 0 &= 2a + 4 \\ 0 &= 2(a + b) \\ 2a &= b + 2c \end{aligned} \right\} &\implies a = -2, \quad b = -a = 2, \quad c = \frac{2a - b}{2} = -3 \implies \\ x_p(t) &= -2t^2 + 2t - 3, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Concluimos que la solución general de (2) es

$$x(t) = \alpha e^{2t} + \beta e^{-t} - 2t^2 + 2t - 3, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- b) Para hallar la solución de (2) que satisface la condición inicial $(x(0), x'(0)) = (0, 2)$, basta con sustituir $t = 0$ en la solución general $x(t) = \alpha e^{2t} + \beta e^{-t} - 2t^2 + 2t - 3$ y su derivada $x'(t) = 2\alpha e^{2t} - \beta e^{-t} - 4t + 2$. Así,

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= \alpha + \beta - 3 = 0 \\ x'(0) &= 2\alpha - \beta + 2 = 2 \end{aligned} \right\} \implies \left. \begin{aligned} \alpha + \beta &= 3 \\ 2\alpha - \beta &= 0 \end{aligned} \right\} \implies \alpha = 1, \quad \beta = 2.$$

Por tanto, la solución buscada es

$$x(t) = e^{2t} + 2e^{-t} - 2t^2 + 2t - 3, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

& - & - & - & - & - & - & - & - & -