Asignatura: MATEMÁTICA APLICADA – Curso: 2022–2023
Relación de ejercicios del Tema 7: Ecuaciones diferenciales y métodos numéricos de resolución (Segunda parte)

$\boxed{7.1}$ Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $x'' - 2x' - 3x = 4$.
b) $x' = 1 + e^{2t}$.
c) $(t^2 + 9)x' + tx = 0$.
d) $x' = \frac{1+t}{t^2x^2}$.
e) $x' = \frac{x}{t}(\ln x - \ln t)$.
f) $tx' + x = 2t$.

$\boxed{7.2}$ Resuelve los siguientes problemas de valores iniciales.

a) $tx' + x = 2t,\ x(1) = 0$.
b) $(\cos^2 t)x' + x = 1,\ x(0) = -3$.
c) $tx' + tx + 2x + 2e^{-t} = 0,\ x(1) = 0$.
d) $x' = x^2 - 4,\ x(0) = -2$.
e) $xx' + t = 0,\ x(4) = 3$.
f) $2x' - \frac{1}{x} = 2\frac{t}{x},\ x(0) = -\frac{1}{2}$.

$\boxed{7.3}$ La ecuación diferencial $t + x' + tx = 0$, ¿es lineal? ¿Y de variables separadas? Resuélvela dando su solución general.

$\boxed{7.4}$ Entre las siguientes ecuaciones diferenciales hay una lineal, una de variables separadas y una homogénea (no lineal). Deduce el tipo de cada una de ellas y resuélvelas.

a) $x' = 5\frac{x-2t^2}{t}$.
b) $\frac{x'}{x-1} = 2t(x+1)$.
c) $t^2x' = x^2 + tx + t^2$.

$\boxed{7.5}$ Señala cuáles de las siguientes ecuaciones diferenciales son lineales.

a) $(1+t)x' - tx = t + t^2$.
b) $(1+t)x' - tx^2 = t + t^2$.
c) $x' + 2t = e^x + (\operatorname{tg} t)e^{-2t}$.
d) $x' + 2x = e^t + (\operatorname{tg} t)e^{-2t}$.

Resuelve la ecuación del apartado *d*) y determina la solución que en $x = 0$ toma el valor 1.

$\boxed{7.6}$ Un cultivo tiene inicialmente una cantidad P_0 de bacterias. Tras una hora, el número de bacterias es $\frac{3}{2}P_0$. Si la rapidez de multiplicación es proporcional al número de bacterias presentes, determina el tiempo necesario para que el número inicial de bacterias se triplique.

(Indicación: siendo $P(t)$ el número de bacterias en el instante t, se verifica que $P'(t) = kP(t)$, con $k \in \mathbb{R}^+$).

7.7 En cada caso, determina la familia de trayectorias ortogonales a la familia dada.

a) $x^2 + y^2 = c$.

b) $y^2 = 2px$.

c) $y^2 = cx^3$.

d) $2x^2 - y^2 = c$.

e) $y = ce^x$.

f) $x^2 = cy$.

7.8 Un reactor transforma plutonio 239 en uranio 238, que es relativamente estable, para la fabricación de energía eléctrica. Después de 15 años se determina que el 0.043 % de la cantidad inicial A_0 de plutonio se ha desintegrado. Determina la semivida de este isótopo si la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad que queda.

(Indicación: siendo $x(t)$ la cantidad de plutonio en el instante t, se verifica que $x'(t) = kx(t)$, con $k \in \mathbb{R}^-$).

7.9 Sabiendo que la semivida del carbono 14 radioactivo es aproximadamente de 5.600 años, determina la edad de un fósil que contiene $\frac{1}{1000}$ de la cantidad original de C-14.

(Indicación: siendo $x(t)$ la cantidad de carbono 14 en el instante t, se verifica que $x'(t) = kx(t)$, con $k \in \mathbb{R}^-$).

7.10 La ley de Newton del enfriamiento dice que, en un cuerpo que se está enfriando, la rapidez con que la temperatura $T(t)$ varía es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura T_0 del medio que lo rodea (que se supone constante).

Se saca un pastel del horno a una temperatura de 300°. Tres minutos después su temperatura es de 160°. Sabiendo que la temperatura del exterior es 20°, ¿qué temperatura tiene tras 9 minutos? ¿Cuánto tardará en enfriarse hasta una temperatura de 30°?

(Indicación: siendo $T(t)$ la temperatura del pastel en el instante t, se verifica que $T'(t) = k(T_0 - T(t))$, con $k \in \mathbb{R}$).

7.11 Un termómetro, que estaba en un recipiente aislado a una temperatura de 70°, se saca al exterior. Dos minutos más tarde el termómetro marca 40° y, tras dos minutos más, marca 25°. ¿Cuál es la temperatura del exterior?

(Indicación: siendo $T(t)$ la temperatura del termómetro en el instante t y T_e la temperatura del exterior, se verifica que $T'(t) = k(T_e - T(t))$, con $k \in \mathbb{R}$).

7.12 En un depósito, que contiene inicialmente 300 litros de salmuera en una concentración de 0.1 kg/l, se bombea, a razón de 3 litros por minuto, una solución salina cuya concentración es de 0.2 kg/l. De manera simultánea, la mezcla (adecuadamente uniformizada por agitación) se extrae a la misma velocidad.

Determina la cantidad de sal que hay en el depósito en un instante cualquiera. ¿Cuánta sal hay después de 50 minutos? ¿Y tras un tiempo largo?

Realiza el mismo ejercicio suponiendo que la velocidad con la que sale la mezcla fuera del depósito es de 2 litros por minuto.

(Indicación para la primera situación: siendo $x(t)$ la cantidad de sal en el depósito en el instante t, se verifica que $x'(t) = 0.2{\times}3 - \frac{3\,x(t)}{300}$).

$\boxed{7.13}$ Un estudiante portador de un virus de gripe regresa a un campus universitario aislado que tiene 1000 estudiantes. Si se supone que la rapidez de propagación del virus es proporcional tanto al número de estudiantes contagiados como al número de no contagiados y, además, se ha observado que después de 4 días hay 50 contagiados, determina el número de alumnos contagiados después de 6 días.

(Indicación: siendo $x(t)$ el número de infectados en el instante t, se verifica que $x'(t) = kx(t)(1000 - x(t))$, con $k \in \mathbb{R}$).

$\boxed{7.14}$ La población $P(t)$ de un suburbio de una gran ciudad en un instante cualquiera se rige por la ecuación

$$\frac{dP}{dt} = P(10^{-1} - 10^{-7}P),$$

donde t se mide en meses. Además, se sabe que la población inicial es $P(0) = 5000$. ¿Cuál es el valor límite de la población? ¿En qué momento será la población igual a la mitad de su valor límite?

$\boxed{7.15}$ Un cuerpo de masa m, que cae a través de un medio viscoso, encuentra una resistencia proporcional al cuadrado de su velocidad instantánea. En este caso, la ecuación diferencial para la velocidad $v(t)$ en un instante cualquiera es

$$mv' = mg - kv^2,$$

donde k es una constante positiva asociada al rozamiento. ¿Cuál es la velocidad límite del cuerpo que cae?

$\boxed{7.16}$ Está nevando con regularidad y, a las doce, sale una máquina quitanieves que recorre 2 km en la primera hora y 1 km en la segunda. Admitiendo que la cantidad de nieve quitada por la máquina quitanieves en unidad de tiempo es uniforme, es decir, que su velocidad de avance es inversamente proporcional a la altura de nieve encontrada en su camino, ¿a qué hora empezó a nevar?

$\big($Indicación: siendo $h(t)$ y $x(t)$ la altura de la nieve y la distancia recorrida por el quitanieves en el instante t, se verifica que $h(t) = at$ y $x'(t) = \frac{k}{h(t)}$, con $a, k \in \mathbb{R}\big)$.

$\boxed{7.17}$ Una batería de 12 voltios se conecta a un circuito simple en serie RL en el cual la inductancia es de 0.5 H y la resistencia de 10 Ω. Determina la corriente i si la intensidad inicial es nula.

$\big($Indicación: siendo $i(t)$ la intensidad de corriente en el instante t, L la inductancia y R la resistencia, se verifica que $L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E(t)$, donde $E(t)$ es el voltaje de la batería$\big)$.

$\boxed{7.18}$ Dos sustancias químicas A y B se combinan para formar un compuesto C. La reacción resultante entre las dos sustancias es tal que por cada 2 gramos de A se usan 3 gramos de B. Sabiendo que se forman 5 gramos del compuesto C en 15 minutos, determina la cantidad C en un instante cualquiera si la rapidez de reacción es proporcional a las cantidades A y B restantes y, además, en un principio hay 20 gramos de A y 15 gramos de B. ¿Qué cantidad de compuesto C hay tras 30 minutos? ¿Qué ocurre cuando $t \to \infty$?

$\big($Indicación: siendo $x(t)$ la cantidad de compuesto C en el instante t, se verifica que la dinámica de la reacción viene dada por la ecuación $x'(t) = k\left(20 - \frac{2}{5}x(t)\right)\left(15 - \frac{3}{5}x(t)\right)$, con $k \in \mathbb{R}\big)$.

$\boxed{7.19}$ En una cuenta de ahorros se depositan 2500 euros a un interés compuesto que se capitaliza continuamente al 0.05 % anual. Calcula la cantidad de dinero acumulada después de cinco años. ¿En cuántos años se duplicará la cantidad invertida?

(Indicación: siendo $x(t)$ la cantidad de dinero en el instante t, se verifica que $x'(t) = rx(t)$, donde r es el interés anual).

$\boxed{7.20}$ Usa el método de Euler para aproximar la solución del problema de valores iniciales

$$x' = -tx + \frac{4t}{x}, \quad x(0) = 1,$$

en el intervalo $[0, 1]$ para $h = 0.25$ y $h = 0.1$.

$\boxed{7.21}$ Usa el método de Euler para aproximar la solución del problema

$$x' = -\frac{x + x^2}{t}; \quad x(1) = -2,$$

en el intervalo $[1, 3]$ tomando $h = 0.2$.

$\boxed{7.22}$ Escribe los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales lineales en forma matricial.

a) $\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 3x - 5y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 8y \end{array}\right\}.$

b) $\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -3x + 4y - 9z \\ \frac{dy}{dt} = 6x - y \\ \frac{dz}{dt} = 10x + 4y + 3z \end{array}\right\}.$

$\boxed{7.23}$ Comprueba, en cada caso, que el vector dado X es solución del sistema correspondiente.

a) $\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 3x - 4y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 7y \end{array}\right\}; \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-5t}.$

b) $X' = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X; \quad X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{\frac{-3t}{2}}.$

c) $X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} X; \quad X = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}\cos t \\ -\operatorname{sen} t + \cos t \end{pmatrix}.$

$\boxed{7.24}$ Comprueba, en cada caso, que los vectores dados son un conjunto fundamental de soluciones del sistema correspondiente y, además, forma con ellos una matriz fundamental.

a) $X' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} X; \quad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2t}, \ X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{7t}.$

b) $X' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -9 & -2 \end{pmatrix} X; \quad X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{t}, \ X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} te^{t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t}.$

c) $X' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} X;\quad X_1 = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 3\cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} -2\operatorname{sen} t \\ \cos t - 3\operatorname{sen} t \end{pmatrix}.$

$\boxed{7.25}$ Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales lineales homogéneos.

a) $\left.\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= x + 2y \\ \tfrac{dy}{dt} &= 4x + 3y \end{aligned}\right\}.$

b) $\left.\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= x + y - z \\ \tfrac{dy}{dt} &= 2y \\ \tfrac{dz}{dt} &= y - z \end{aligned}\right\}.$

c) $\left.\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= 3x - y \\ \tfrac{dy}{dt} &= 9x - 3y \end{aligned}\right\}.$

d) $\left.\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= 3x - y - z \\ \tfrac{dy}{dt} &= x + y - z \\ \tfrac{dz}{dt} &= x - y + z \end{aligned}\right\}.$

e) $\left.\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= x \\ \tfrac{dy}{dt} &= 2x + 2y - z \\ \tfrac{dz}{dt} &= y \end{aligned}\right\}.$

f) $\left.\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= 6x - y \\ \tfrac{dy}{dt} &= 5x + 2y \end{aligned}\right\}.$

g) $\left.\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= x - y + 2z \\ \tfrac{dy}{dt} &= -x + y \\ \tfrac{dz}{dt} &= -x + z \end{aligned}\right\}.$

$\boxed{7.26}$ Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneos.

a) $\left.\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= 3x - 3y + 4 \\ \tfrac{dy}{dt} &= 2x - 2y - 1 \end{aligned}\right\}.$

b) $\left.\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= 2y + e^t \\ \tfrac{dy}{dt} &= -x + 3y - e^t \end{aligned}\right\}.$

$\boxed{7.27}$ Una fuerza de 400 N estira un resorte 2 m. Una masa de 50 kg se sujeta al extremo del resorte y se suelta desde la posición de equilibrio con una velocidad, dirigida hacia arriba, de 10 m/s. Halla la ecuación del movimiento y resuélvela.

(Indicación: a partir de los datos, sabemos que la constate de Hooke del resorte es $k = \frac{400}{2}$ N/m y que la masa considerada es $m = 50$ kg; por tanto, siendo $x(t)$ la posición de la masa en el instante t, se verifica que $mx''(t) = -kx(t)$. Obsérvese que en el enunciado también aparecen los valores iniciales de $x(t)$ y $x'(t)$).

$\boxed{7.28}$ Un cuerpo con masa igual a 10 kg está sujeto a un resorte alargándolo 2 m. Dicho cuerpo se engancha a un mecanismo de amortiguación que ofrece una resistencia numéricamente igual a β veces la velocidad instantánea. Determina el movimiento producido en función de los valores de β. Esboza las gráficas de los movimientos representativos.

(Indicación: siendo $x(t)$ la posición de la masa en el instante t, se verifica que $mx''(t) = -\beta x'(t) - kx(t)$, donde k es la constate de Hooke del resorte. Por otra parte, recuérdese que un cuerpo con una masa de 1 kg ejerce una fuerza aproximadamente igual a 9.8 N).

$\boxed{7.29}$ Resuelve el siguiente problema de valores iniciales

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen}(\omega t), \quad x(0) = x'(0) = 0,$$

donde ω y F_0 son constantes. Esboza la gráfica de la solución y da una interpretación física del resultado.