Asignatura: MATEMÁTICA APLICADA – Curso: 2022–2023
Relación de ejercicios del Tema 7: Ecuaciones diferenciales y métodos numéricos de resolución (Primera parte)

$\boxed{7.1}$ En los siguientes apartados se da una ecuación diferencial y una función. Comprueba que la función dada es una solución de la ecuación diferencial indicando, si es posible, el dominio de la función. (El símbolo C representa una constante).

a) $2x' + x = 0; \quad x(t) = e^{-t/2}$.
b) $x' + 4x = 32; \quad x(t) = 8$.
c) $\frac{dx}{dt} - 2x = e^{3t}; \quad x(t) = e^{3t} + 10e^{2t}$.
d) $\frac{dx}{dt} + 20x = 24; \quad x(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$.
e) $x' = 25 + x^2; \quad x(t) = 5\,\mathrm{tg}(5t)$.
f) $\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{x}{t}}; \quad x(t) = (\sqrt{t} + C)^2,\ t > 0,\ C > 0$.
g) $x' + x = \mathrm{sen}\, t; \quad x(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\, t - \frac{1}{2}\cos t + 10e^t$.
h) $2txdt + (t^2 + 2x)dx = 0; \quad t^2x + x^2 = C$.

$\boxed{7.2}$ Resuelve las siguientes ecuaciones mediante el método de separación de variables.

a) $\frac{dx}{dt} = \mathrm{sen}\, 5t$.
b) $\frac{dx}{dt} = (t + 1)^2$.
c) $dt + e^{3t}dx = 0$.
d) $dt - t^2dx = 0$.
e) $(t + 1)\frac{dx}{dt} = t$.
f) $e^t\frac{dx}{dt} = 2t$.
g) $tx' = 4x$.
h) $\frac{dx}{dt} + 2tx = 0$.

$\boxed{7.3}$ Comprueba que cada una de las siguientes ecuaciones es homogénea y resuélvela.

a) $2t^3xdt + (t^4 + x^4)dx = 0$.
b) $2(\sqrt{tx} - x)dt - tdx = 0$.
c) $(t - x)dt + tdx = 0$.
d) $(t + x)dt + tdx = 0$.
e) $tdt + (x - 2t)dx = 0$.
f) $(x^2 + xt)dt - t^2dx = 0$.
g) $(x^2 + xt)dt + t^2dx = 0$.
h) $\frac{dx}{dt} = \frac{x-t}{x+t}$.
i) $xdt + 2(t + x)dx = 0$.
j) $\frac{dx}{dt} = \frac{t+3x}{3t+x}$.
k) $-xdt + \left(t + \sqrt{tx}\right)dx = 0$.

$\boxed{7.4}$ Determina si cada una de las siguientes ecuaciones es exacta. Resuelve las exactas.

a) $(2t+4)dt+(3x-1)dx=0$.
b) $(2t+x)dt-(t+6x)dx=0$.
c) $(5t+4x)dt+(4t-8x^3)dx=0$.
d) $\frac{2t}{x}dt-\frac{t^2}{x^2}dx=0$.
e) $(2x^2t-3)dt+(2xt^2+4)dx=0$.
f) $(t+x)(t-x)dt+t(t-2x)dx=0$.
g) $x\frac{dx}{dt}=2te^t-x+6t^2$.
h) $(5x-2t)x'-2x=0$.

$\boxed{7.5}$ Comprueba que las ecuaciones dadas no son exactas, pero que la multiplicación por el correspondiente factor integrante $\mu(t,x)$ las transforma en ecuaciones exactas y, entonces, resuélvelas.

a) $(2x^2+3t)dt+2txdx=0; \quad \mu(t,x)=t$.
b) $6txdt+(4x+9t^2)dx=0; \quad \mu(t,x)=x^2$.
c) $(t^2+2tx-x^2)dt+(x^2+2tx-t^2)dx=0; \quad \mu(t,x)=(t+x)^{-2}$.
d) $(-tx(\operatorname{sen} t)+2x(\cos t))dt+2t(\cos t)dx=0; \quad \mu(t,x)=tx$.

$\boxed{7.6}$ Resuelve las siguientes ecuaciones cuando sean lineales de primer orden, dando un intervalo en el cual la solución general esté definida.

a) $\frac{dx}{dt}=4x$.
b) $2\frac{dx}{dt}+10x=1$.
c) $\frac{dx}{dt}+x=e^{3t}$.
d) $x'+3t^2x=t^2$.
e) $t^2x'+tx=1$.
f) $(t+4x^2)dx+2xdt=0$.
g) $\frac{dx}{dt}=t+x$.
h) $tdx=(t(\operatorname{sen} t)-x)dt$.
i) $(1+e^t)\frac{dx}{dt}+e^tx=0$.
j) $t\frac{dx}{dt}+4x=t^3-t$.

$\boxed{7.7}$ Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales sujetas a la condición inicial que se indica.

a) $\frac{dx}{dt}+5x=20,\ x(0)=2$.
b) $x'=2x+t(e^{3t}-e^{2t}),\ x(0)=2$.
c) $L\frac{di}{dt}+Ri=E,\ i(0)=i_0$ (donde L,R,E son constantes).
d) $x\frac{dt}{dx}-t=x^2,\ x(1)=5$.
e) $x'+x\operatorname{tg} t=\cos^2 t,\ x(0)=-1$.

$\boxed{7.8}$ Resuelve las siguientes ecuaciones lineales homogéneas de orden dos.

a) $x'' - 2x' - 2x = 0$.
b) $x'' - 7x' = 0$.
c) $x'' - 8x' + 16x = 0$.
d) $x'' + 10x' + 21x = 0$.
e) $x'' + 4x' + 5x = 0$.
f) $x'' + 4x = 0$.
g) $x'' - 3x' + 4x = 0$.
h) $x'' - 6x' + 25x = 0$.
i) $x'' = 0$.
j) $\frac{d^2I}{dt^2} + 20\frac{dI}{dt} + 200I = 0$.

$\boxed{7.9}$ Resuelve las siguientes ecuaciones lineales homogéneas.

a) $x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 0$.
b) $x^{(iv)} - 9x'' + 20x = 0$.
c) $x''' - 6x'' + 2x' + 36x = 0$.
d) $x^{(iv)} - 16x''' + 96x'' - 256x' + 256x = 0$.
e) $x^{(iv)} + 8x''' + 24x'' + 32x' + 16x = 0$.
f) $\frac{d^5P}{dt^5} - \frac{d^4P}{dt^4} - 2\frac{d^3P}{dt^3} + 2\frac{d^2P}{dt^2} + \frac{dP}{dt} - P = 0$.
g) $x''' - 12x'' + 9x' + 18x = 0$.

$\boxed{7.10}$ Resuelve las siguientes ecuaciones lineales no homogéneas.

a) $x'' - x' - 2x = 4t^2$.
b) $x'' - x' - 2x = e^{3t}$.
c) $x'' - x' - 2x = \operatorname{sen}(2t)$.
d) $x' - 5x = 3e^t - 2t + 1$.
e) $4x'' - 12x' + 5x = t$.
f) $2x'' - 6x' + 5x = \operatorname{sen} t$.
g) $4x''' - 12x'' = t$. (En este apartado, en lugar de emplear el método general para el cálculo de la solución particular, prueba con una del tipo $x_p = t^2(\alpha + \beta t)$, siendo α y β constantes).

$\boxed{7.11}$ Comprueba que

a) $x(t) = 4 + t + 2t^2 + 2t^3,\ \forall t \in \mathbb{R}$, es la solución del problema de valores iniciales

$$x'' - 4 = 12t,\ x(0) = 4,\ x'(0) = 1.$$

b) $x(t) = e^t + 2e^{-2t} - 3t,\ \forall t \in \mathbb{R}$, es la solución del problema de valores iniciales

$$x'' + x' - 2x = 6t - 3,\ x(0) = 3,\ x'(0) = -6.$$

$\boxed{7.12}$ Halla la solución de los siguientes problemas de valores iniciales.

a) $x'' - 12x' + 5x = t, \;\; x(0) = 1, \; x'(0) = 0.$

b) $2x'' - 6x' + 5x = \cos t, \;\; x(\pi) = 0, \; x'(\pi) = 1.$

c) $4x''' - 12x'' = t, \;\; x(-1) = 1, \; x'(-1) = 1, \; x''(-1) = 0.$

$\boxed{7.13}$ Halla la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $3x'' - x' = 0.$

b) $x'' - 16x = 0.$

c) $x'' + 9x = 0.$

d) $x'' + 8x' + 16x = 0.$

e) $3x'' + 2x' + x = 0.$

f) $x''' - 4x'' - 5x' = 0.$

g) $x'''' + x''' + x'' = 0.$

h) $16x'''' + 24x'' + 9x = 0.$

Escribe un problema de valores iniciales para cada una de las ecuaciones y resuélvelo.

$\boxed{7.14}$ Halla la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $x'' + x = \operatorname{sen} t.$

b) $x'' + x = \sec t.$

$\boxed{7.15}$ Interpreta físicamente los siguientes problemas de valores iniciales y resuélvelos.

a) $\frac{4}{32}x'' + 3x = 0; \;\; x(0) = -3, \; x'(0) = -2.$

b) $\frac{1}{2}x'' + x' + 5x = 0; \;\; x(0) = -2, \; x'(0) = 0.$