Asignatura: MATEMÁTICA APLICADA – Curso: 2022–2023
Relación de ejercicios del Tema 6: Cónicas y cuádricas

$\boxed{6.1}$ Determina las ecuaciones de cambio de sistema de referencia entre los sistemas de referencia de $\mathbb{R}^2$, dados por sus orígenes y sus bases asociadas, siguientes.

$$\mathcal{R}_1 = \{(0,1);(1,0),(2,1)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{R}_2 = \{(1,1);(1,1),(0,1)\}.$$

<u>Solución</u>: $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

$\boxed{6.2}$ Determina la ecuación general de la elipse de focos $(0,1)$ y $(-1,2)$ y semieje $a = \sqrt{2}$.

<u>Solución</u>: $7x^2 + 7y^2 + 4x - 20y + 2xy + 4 = 0$.

$\boxed{6.3}$ Halla la ecuación general de la parábola de foco $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y directriz la recta $x = -y$.

<u>Solución</u>: $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y - xy + 4 = 0$.

$\boxed{6.4}$ Escribe, cuando proceda, las coordenadas del centro, vértices y focos, así como unas ecuaciones de los ejes, asíntotas y directrices de las cónicas siguientes.

a) $2x^2 + y^2 = 4$.
b) $-x^2 + 3y^2 = -5$.
c) $4y^2 = 6x$.
d) $-x^2 + 2y = 0$.

<u>Solución</u>: a) Elipse; $C = (0,0)$; $V = (\pm\sqrt{2}, 0),\ (0, \pm 2)$; $F = (0, \pm\sqrt{2})$; *ejes:* $x = 0,\ y = 0$.

b) Hipérbola; $C = (0,0)$; $V = (\pm\sqrt{5}, 0)$; $F = \left(\pm\sqrt{\frac{20}{3}}, 0\right)$; *ejes:* $x = 0,\ y = 0$; *asíntotas:* $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}x$.

c) Parábola; $V = (0,0)$; $F = \left(\frac{3}{8}, 0\right)$; *eje:* $y = 0$; *directriz:* $x = -\frac{3}{8}$.

d) Parábola; $V = (0,0)$; $F = \left(0, \frac{1}{2}\right)$; *eje:* $x = 0$; *directriz:* $y = -\frac{1}{2}$.

$\boxed{6.5}$ Obtén la ecuación reducida de las siguientes cónicas, especificando el cambio de sistema de referencia realizado e indicando de qué tipo de cónica se trata.

a) $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 52 = 0$.
b) $xy + x + y + 1 = 0$.
c) $2x^2 + y^2 - 12x - 4y + 18 = 0$.

<u>Solución</u>: a) Par de rectas paralelas; $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ -\frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$; $(y')^2 = 4$.

b) Par de rectas secantes; $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $(x')^2 - (y')^2 = 0$.

c) Elipse; $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\frac{(x')^2}{2} + \frac{(y')^2}{4} = 1$.

$\boxed{6.6}$ Indica qué tipo de cónica representa cada una de las siguientes ecuaciones y calcula sus elementos geométricos: ejes, centro, vértices, focos, asíntotas y directriz, caso de existir.

a) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + 1 = 0.$

b) $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 6y + 1 = 0.$

<u>Solución</u>: a) Elipse; $C = \left(-\frac{1}{8}, \frac{5}{8}\right)$*; ejes:* $y - x = \frac{3}{4},\ y + x = \frac{1}{2}$*;*
$V = \left(-\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{6}}{8}, \frac{5}{8} + \frac{\sqrt{6}}{8}\right),\ \left(-\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{6}}{8}, \frac{5}{8} - \frac{\sqrt{6}}{8}\right),\ \left(-\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}, \frac{5}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right),\ \left(-\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}, \frac{5}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right);$
$F = \left(-\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}, \frac{5}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right),\ \left(-\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}, \frac{5}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right).$

b) Parábola; $V = \left(-\frac{31}{8}, -\frac{11}{8}\right);\ F = \left(-\frac{15}{4}, -\frac{5}{4}\right)$*; eje:* $x - y + \frac{5}{2} = 0$*; directriz:* $x + y + \frac{11}{2} = 0.$

$\boxed{6.7}$ Indica qué tipo de cuádrica representa cada una de las siguientes ecuaciones, obteniendo su ecuación reducida a partir de cambios de sistemas de referencia rectangulares.

a) $4x^2 + z^2 + 4xz - 4y + 1 = 0.$

b) $x^2 + y^2 + 9z^2 - 6xz + 2x - 2y + 2 = 0.$

c) $xy + yz + xz - 1 = 0.$

<u>Solución</u>: a) Cilindro parabólico, $(x')^2 = \frac{4}{5}y'.$

b) Paraboloide elíptico, $x' + \frac{\sqrt{10}}{6}(y')^2 + \frac{5\sqrt{10}}{3}(z')^2 = 0.$

c) Hiperboloide de dos hojas, $(x')^2 - \frac{(y')^2}{2} - \frac{(z')^2}{2} = 1.$