Asignatura: MATEMÁTICA APLICADA – Curso: 2022–2023
Relación de ejercicios del Tema 5: Espacio afín y espacio afín euclídeo.
Isometrías afines (Movimientos rígidos)

$\boxed{5.1}$ Se considera el espacio afín $(\mathcal{A}, \mathbb{R}^3, \phi)$ con

$$\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3).$$

a) Prueba que el subconjunto $L = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 1, x_2 = -1\}$ es un subespacio afín.

b) Determina el subespacio vectorial asociado a L y la dimensión de L.

$\boxed{5.2}$ En el espacio afín $(\mathcal{A}, \mathbb{R}^3, \phi)$ se considera el conjunto de puntos

$$\{P_0 = (2, -1, 1); P_1 = (3, 2, 0); P_2 = (3, 2, -1); P_3 = (3, 1, -1)\}.$$

a) Prueba que $\left\{P_0; \left\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}\right\}\right\}$ es un sistema de referencia de $(\mathcal{A}, \mathbb{R}^3, \phi)$.

b) Calcula las coordenadas de $X = (3, 5, 2)$ respecto de dicho sistema de referencia.

$\boxed{5.3}$ En el espacio afín $(\mathcal{A}_2, V_2, \phi)$ se consideran los sistemas de referencia

$$\mathcal{R} = \{O; \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}\} \quad \text{y} \quad \mathcal{R}' = \{O'; \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}\},$$

siendo $\overrightarrow{OO'} = 3\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, $\vec{v}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ y $\vec{v}_2 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$.

a) Determina las ecuaciones de los cambios de sistema de referencia de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$ y de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$.

b) Si el punto P respecto del sistema de referencia $\mathcal{R}$ tiene coordenadas $(3, 5)$, halla sus coordenadas respecto de $\mathcal{R}'$.

c) Si Q respecto del sistema de referencia $\mathcal{R}'$ tiene coordenadas $(2, 3)$, halla sus coordenadas respecto de $\mathcal{R}$.

$\boxed{5.4}$ En el espacio afín $(\mathcal{A}_2, V_2, \phi)$ se consideran los puntos $O_1, O_2 \in \mathcal{A}_2$, con $O_1 \neq O_2$, y una base $B_1 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ de V_2. Sean los sistemas de referencia

$$\mathcal{R}_1 = \{O_1; B_1\} \quad \text{y} \quad \mathcal{R}_2 = \{O_2;\ B_2 = \{\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 - \vec{e}_2\}\}.$$

Además, supongamos que el vector $\overrightarrow{O_1O_2}$ tiene coordenadas $(1, 1)$ respecto de la base B_1.

a) Determina las ecuaciones de los cambios de sistema de referencia de $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_2$ y de $\mathcal{R}_2$ a $\mathcal{R}_1$.

b) Calcula las coordenadas de O_1 y O_2 en cada uno de los sistemas de referencia.

c) Determina, respecto del sistema de referencia $\mathcal{R}_1$, el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que el punto P de coordenadas $(a, 2)$ esté alineado con O_1 y O_2.

d) Para el valor de a hallado en el apartado anterior, determina las coordenadas de P respecto de $\mathcal{R}_2$.

$\boxed{5.5}$ En el espacio afín $(\mathcal{A}_3, V_3, \phi)$ se considera el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}\}$.

a) Comprueba que el sistema de puntos $\{O; P_1, P_2, P_3\}$, que respecto a $\mathcal{R}$ tienen por coordenadas $O(0,0,0)$, $P_1(1,2,0)$, $P_2(-1,1,0)$ y $P_3(0,0,1)$, forma un sistema de referencia $\mathcal{R}' = \left\{O; \left\{\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}\right\}\right\}$ del espacio afín dado.

b) Halla las ecuaciones de los cambios de sistema de referencia de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$ y de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$.

c) Determina las coordenadas, respecto del sistema de referencia $\mathcal{R}'$, del punto $X \in \mathcal{A}_3$ sabiendo que las coordenadas de X respecto de $\mathcal{R}$ son $(-1, 2, 1)$.

$\boxed{5.6}$ En el espacio afín $(\mathcal{A}_2, V_2, \phi)$ se consideran el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}\}$, el punto $O' \in \mathcal{A}_2$ de coordenadas $(2,1)$ respecto del sistema de referencia $\mathcal{R}$ y los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V_2$ que respecto de la base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ tienen coordenadas $(1,3)$ y $(2,4)$, respectivamente.

a) Comprueba que $\mathcal{R}' = \{O'; \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}\}$ es un sistema de referencia de $(\mathcal{A}_2, V_2, \phi)$.

b) Determina las coordenadas de O respecto del sistema de referencia $\mathcal{R}'$.

c) Determina las coordenadas de P respecto del sistema de referencia $\mathcal{R}'$ sabiendo que las coordenadas respecto de $\mathcal{R}$ son $(3, -1)$.

d) Determina, respecto del sistema de referencia $\mathcal{R}'$, las ecuaciones paramétricas de la recta r que respecto de $\mathcal{R}$ tiene por expresión $2x - y = 1$.

$\boxed{5.7}$ Sea $(\mathcal{A}_3, V_3, \phi)$ un espacio afín con sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}\}$. Sea $\mathcal{R}' = \{O'; B' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}\}$ otro sistema de referencia para el que $O' = (-1,0,0)_{\mathcal{R}}$, $\vec{u}_1 = (1,1,0)_B$, $\vec{u}_2 = (0,-1,0)_B$ y $\vec{u}_3 = (0,0,-1)_B$.

a) Determina las coordenadas del punto $P = (1,2,-1)_{\mathcal{R}}$ respecto de $\mathcal{R}'$.

b) Dado el plano π con ecuación cartesiana $2x - y + z + 2 = 0$ respecto de $\mathcal{R}$, determina las ecuaciones paramétricas respecto de $\mathcal{R}'$.

c) Determina, respecto de $\mathcal{R}'$, la forma continua de la recta r que, respecto de $\mathcal{R}$, tiene la expresión

$$r \equiv \left.\begin{array}{r} 2x + y = 0 \\ x - 2y + z = 1 \end{array}\right\}.$$

$\boxed{5.8}$ En el espacio afín $(\mathcal{A}_2, V_2, \phi)$, con sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}\}$, se considera el punto P de coordenadas $(1,-1)_{\mathcal{R}}$ y el subespacio vectorial W de V_2 dado por la ecuación cartesiana $2x - y = 0$ respecto de $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

Determina las ecuaciones paramétricas, respecto de $\mathcal{R}$, de la variedad afín S que contiene a P y que tiene por subespacio vectorial asociado W.

$\boxed{5.9}$ En el espacio afín $(\mathcal{A}_3, V_3, \phi)$ se considera el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}\}$, el punto P de coordenadas $(1,-2,1)_{\mathcal{R}}$ y el subespacio vectorial $W = L(\{u_1, u_2\})$, siendo $u_1 = (1,2,-1)_B$ y $u_2 = (2,1,1)_B$.

Determina las ecuaciones paramétricas y cartesianas, respecto de $\mathcal{R}$, de la variedad afín $P + W$.

$\boxed{5.10}$ Sea $\mathcal{R} = \{O; B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}\}$ un sistema de referencia de $\mathcal{A}_2$. Sean las rectas r y s de ecuaciones cartesianas, respecto de $\mathcal{R}$, $x + y = 1$ y $x - y = 1$, respectivamente.

Halla el sistema de referencia $\mathcal{R}'$ de $\mathcal{A}_2$ respecto del cual las ecuaciones cartesianas de r y s son $y' = 0$ y $x' = 0$, respectivamente.

5.11 En el espacio afín $(\mathcal{A}_3, V_3, \phi)$, con sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; B\}$, determina la posición relativa de las siguientes variedades afines.

a) Los planos $\pi_1 \equiv x - y + z = 2$ y $\pi_2 \equiv 2x - 2y + z = 1$.

b) La recta $r \equiv \left.\begin{array}{r} x + y + 2z = 1 \\ 2y - z = 1 \end{array}\right\}$ y el plano $\pi \equiv x - y + z = 1$.

c) Las rectas $r_1 \equiv \dfrac{x-1}{2} = y + 1 = \dfrac{z}{4}$ y $r_2 \equiv \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y+1}{-1} = z$.

En cada caso, halla la distancia entre las variedades.

5.12 En el espacio afín $(\mathcal{A}_3, V_3, \phi)$, con sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}\}$, se considera la recta

$$r \equiv X = P + \lambda\vec{u} \equiv \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{u},$$

donde P tiene coordenadas $(1, 0, 2)$ respecto de $\mathcal{R}$ y $\vec{u} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3$.

a) Determina la ecuación general del plano que pertenece al haz de planos que contiene a la recta r.

b) Determina la ecuación cartesiana del plano del haz anterior que es paralelo a la recta $r = O + L(\{\vec{e}_1\})$; esto es, r es la recta que contiene al punto O y tiene por subespacio vectorial asociado al generado por el vector $\vec{e}_1$.

c) Determina la ecuación paramétrica del plano γ que corta a la recta $s = O + L(\{\vec{e}_1\})$ en el punto $(1, 0, 0)$, siendo γ un plano del haz anterior.

5.13 En el espacio afín $(\mathcal{A}_2, V_2, \phi)$, con el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}\}$ usual, se definen las aplicaciones afines

- $T(x, y) = (x + 7, -y - 2)$,
- el giro G de ángulo $\frac{\pi}{2}$ alrededor del punto $(2, 2)$,
- $H = G \circ T$.

Responde a las siguientes cuestiones.

a) Halla la expresión matricial de cada aplicación dada.

b) ¿Cuáles son isometrías afines? En los casos afirmativos, determina si son directas o inversas.

c) En cada caso de isometría afín, y cuando existan, halla la variedad afín de puntos fijos F y la variedad invariante I.

5.14 En el espacio afín $(\mathcal{A}_3, V_3, \phi)$, con el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_2\}\}$ usual, se define la isometría afín $T_1(x, y, z) = (x, z - 1, -y + 3)$. Responde a las siguientes cuestiones.

a) Clasifica T_1.

b) Halla las ecuaciones de la simetría S_π respecto del plano $\pi \equiv y - z + 1 = 0$.

c) ¿Existe una isometría afín T_2 tal que $T_1 = T_2 \circ S_\pi$?