Asignatura: MATEMÁTICA APLICADA – Curso: 2022–2023
Relación de ejercicios del Tema 4: Diagonalización

$\boxed{4.1}$ Determina $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$, sabiendo que $(1, 1, 1)$, $(1, 0, -1)$ y $(1, -1, 0)$ son vectores propios de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}.$$

Solución: $a_1 = a_2 = a_3 = b_1 = b_2 = b_3 = 1$.

$\boxed{4.2}$ Diagonaliza las matrices que, de entre las siguientes, sean diagonalizables.

i) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Solución: No es diagonalizable.*

ii) $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. *Solución:* $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

iii) $A_3 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $(0 < \theta < \pi)$. *Solución: No es diagonalizable.*

iv) $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Solución: No es diagonalizable.*

v) $A_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix}$. *Solución:* $D = \begin{pmatrix} 21 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

*vi) $A_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. *Solución: No es diagonalizable.*

*vii) $A_7 = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$. *Solución:* $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \\ 1 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$.

*viii) $A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Solución:* $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{4.3}$ Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/3 \\ -2/5 & 1/10 & 1/5 \\ 2/5 & 2/5 & 2/15 \end{pmatrix}$ y los vectores $(1, -1, 0)$, $(1, 0, 2)$, $(0, -2, -3)$.

a) Comprueba que dichos vectores son vectores propios de A.

b) A partir de a), halla los valores propios de A. *Solución:* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$.

c) ¿Es A diagonalizable? ¿Por qué? En caso afirmativo, diagonaliza A.

<u>*Solución*</u>: $D = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

$\boxed{4.4}$ En función de los valores de los parámetros reales α y β, determina cuándo es diagonalizable la siguiente matriz.

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3.7 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

<u>*Solución*</u>: $\begin{cases} \beta \neq -1, 5 : \textit{diagonalizable.} \\ \beta = 5 : \textit{no diagonalizable.} \\ \beta = -1 : \textit{diagonalizable} \Leftrightarrow \alpha = 0. \end{cases}$

$\boxed{4.5}$ Decide, de forma razonada, cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas.

i) Cualquier matriz diagonal es diagonalizable.

ii) Sea A una matriz cuadrada de orden n de modo que $A^2 = -I_n$. Entonces A no posee valores propios.

iii) Una matriz cuadrada es diagonalizable si, y sólo si, es regular.

iv) Una matriz cuadrada es regular si, y sólo si, no admite a 0 como valor propio.

v) Si λ es un valor propio de una matriz cuadrada A, entonces $-\lambda$ es un valor propio de la matriz A^t.

vi) Supongamos que una matriz cuadrada A posee un valor propio λ. Entonces, para todo $k \in \mathbb{N}$, la matriz A^k admite a λ^k como valor propio.

vii) Sea A una matriz regular y sea λ un valor propio suyo. Entonces el número $\dfrac{1}{\lambda}$ es un valor propio de la matriz A^{-1}.

viii) Si A es una matriz cuadrada y $\lambda \geq 0$ es un valor propio de A^2, entonces, o bien $\sqrt{\lambda}$, o bien $-\sqrt{\lambda}$, son valores propios de A. (Indicación: $A^2 - \lambda I = (A + \sqrt{\lambda} I)(A - \sqrt{\lambda} I)$).

ix) Toda matriz diagonalizable es simétrica.

x) Cualquier matriz diagonalizable de orden n tiene n valores propios distintos.

$\boxed{4.6}$ Diagonaliza, mediante semejanza ortogonal, las siguientes matrices simétricas.

i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

<u>*Solución*</u>: $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

ii) $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>*Solución*</u>: $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{2}} & -\frac{5}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} & -4 \\ \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & 3 \end{pmatrix}$.

iii) $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

<u>*Solución*</u>: $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

iv) $E = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$.

<u>*Solución*</u>: $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

$\boxed{4.7}$ Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calcula A^{20}.

<u>*Solución:*</u> $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1048575 & 1048576 \end{pmatrix}$.

$\boxed{4.8}$ Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, calcula A^{10}.

<u>*Solución:*</u> $\begin{pmatrix} 1024 & -1023 & -1023 \\ 1023 & -1022 & -1023 \\ -1023 & 1023 & 1024 \end{pmatrix}$.