Asignatura: MATEMÁTICA APLICADA – Curso: 2022–2023
Relación de ejercicios del Tema 3: Aplicaciones lineales e isometrías lineales (transformaciones ortogonales)

$\boxed{3.1}$ Decide cuáles de las siguientes aplicaciones, entre los espacios vectoriales considerados, son lineales.

a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x, y, z) = (x - y, 3x + 2y, 0.3x + z + 2)$.

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x, y) = (y, 5x + 8y, 9x)$.

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad T(x, y, z) = 8x - y + 6z$.

d) $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^3, \quad T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0, a_0 - 3a_1, a_1)$.

e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad T(x, y, z) = (x, 8x + 2y, z + 2, 5y)$.

Solución: Son aplicaciones lineales b), c) y d). No lo son a) y e).

$\boxed{3.2}$ Calcula unas ecuaciones paramétricas, o cartesianas, del núcleo y la imagen de cada una de las aplicaciones del ejercicio anterior que sean lineales. ¿Es alguna de ellas un isomorfismo?

Solución: b) $N(T) = \{(0, 0)\}$ e $Im(T) = \{\lambda(0, 5, 9) + \mu(1, 8, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
c) $N(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 8x - y + 6z = 0\}$ e $Im(T) = \mathbb{R}$.
d) $N(T) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{P}_2 \mid a_0 = 0, a_1 = 0\}$ e $Im(T) = \{\lambda(1, 1, 0) + \mu(0, -3, 1) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
Ninguna es isomorfismo.

$\boxed{3.3}$ Responde razonadamente a las siguientes cuestiones.

a) ¿Existe una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ de forma que $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^4$?

b) ¿Es cierto que toda aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un isomorfismo?

c) ¿Hay algún isomorfismo entre los espacios vectoriales $\mathbb{R}^4$ y $\mathcal{M}_2$?

d) ¿Es posible definir un isomorfismo entre $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{P}_3$?

$\boxed{3.4}$ Sea $\mathbb{P}_5$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que cinco. Consideramos la aplicación $T : \mathbb{P}_5 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(p) = \left(p(0), p(1), \int_0^1 p(x)dx\right).$$

a) Demuestra que T es lineal.

b) Determina las ecuaciones paramétricas y cartesianas del núcleo y la imagen de T.

c) Indica si T es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

Solución: cartesianas (núcleo): $a = 0, b = 0, a + b/2 + c/3 + d/4 + e/5 + f/6 = 0$.
Base para las ec. paramétricas (núcleo): $\{(0, 0, -1, 0, 0, 2), (0, 0, -3, 0, 5, 0), (0, 0, -3, 4, 0, 0)\}$.
Es sobreyectiva.

$\boxed{3.5}$ Define, si es posible, una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuyo núcleo sea

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}.$$

$\boxed{3.6}$ Define, si es posible, una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya imagen sea

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}.$$

$\boxed{3.7}$ Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal tal que $T(1, 0) = (1, 2, 3)$ y $T(0, 1) = (-4, 0, 5)$. Calcula $T(2, 4)$ y $T(-3, 7)$.

Solución: $T(2, 4) = (-14, 4, 26)$; $T(-3, 7) = (-31, -6, 26)$.

$\boxed{3.8}$ Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal tal que $T(1, 1, 0) = (1, 2)$, $T(1, -1, 1) = (4, -5)$ y $T(0, 0, 1) = (-4, 0)$. Calcula $T(-2, 4, -5)$ y $T(3, 0, 7)$.

Solución: $T(-2, 4, -5) = (-3, 17)$; $T(3, 0, 7) = (-29/2, -9/2)$.

$\boxed{3.9}$ En las bases indicadas, determina la matriz asociada a cada una de las siguientes aplicaciones lineales.

a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y, x - y, z + 3x - y)$, $B_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ y $B_2 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.
Solución:

$$M(T, B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y, x - y, z + 3x - y)$, $B_1 = \{(1, 2, 3), (1, 1, 0), (0, 0, 4)\}$ y $B_2 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.
Solución:

$$M(T, B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x+y, x-y, z+3x-y)$, $B_1 = B_2 = \{(1, 2, 3), (1, 1, 0), (0, 0, 4)\}$.
Solución:

$$M(T, B_1, B_2) = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $T(x, y, z) = y - 0.5z$, $B_1 = \{(0, 4, 4), (5, 0, 5), (2, 4, 0)\}$ y $B_2 = \{4\}$.
Solución:

$$M(T, B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 1/2 & -5/8 & 1 \end{pmatrix}.$$

e) $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$, $T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = (a_0 + 2a_1, a_2 + 3a_1)$, $B_1 = \{x^2 - 2, x + 1, 3x^2 + 5x\}$ y $B_2 = \{(1, 2), (3, 4)\}$.
Solución:

$$M(T, B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 11/2 & -3/2 & 7 \\ -5/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{3.10}$ Sean $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ y $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ dos bases de $\mathbb{R}^3$ de forma que

$$u_1 = 2v_2 - v_3, \quad u_2 = v_1 - 4v_3, \quad u_3 = v_2 + 5v_1.$$

Supongamos además que $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una aplicación lineal tal que la matriz $M(T, B_1)$ asociada a T, en la base B_1, viene dada por

$$M(T, B_1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Halla la matriz $M(T, B_2)$ asociada a la aplicación lineal T en la base B_2.
Solución:

$$M(T, B_2) = \frac{1}{41} \begin{pmatrix} 50 & 734 & -90 \\ 24 & 208 & -35 \\ -89 & -293 & -12 \end{pmatrix}.$$

b) Sean $x = (1, -2, 4)_{B_1}$ e $y = (1, -2, 4)_{B_2}$. Calcula $T(x)$ y $T(y)$.
Solución: $T(x) = (8, 19, 19)_{B_1}$; $T(y) = \frac{1}{41}(1778, -532, 449)_{B_2}$.

$\boxed{3.11}$ Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal tal que

$$T(1, 1, 1) = (-1, 0, 1), \quad T(0, 1, -1) = (2, 1, 0), \quad T(1, 0, 0) = (1, 1, 1).$$

a) Halla la matriz asociada a T respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
Solución:

$$M(T, B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Halla una base del núcleo.
Solución: *Base*=$\{(0, 1, 0)\}$.

c) Halla una base de la imagen.
Solución: *Base*=$\{(1, 1, 1), (-2, -1, 0)\}$.

$\boxed{3.12}$ Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal tal que

$$T(-1, 1, 2) = (1, 3, 0, 4), \quad T(2, -1, 2) = (1, 0, -3, 1), \quad T(0, 1, 2) = (0, 1, 1, 1).$$

a) Calcula la matriz asociada a T en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$, respectivamente.
Solución:

$$M(T, B_c, B_c) = \begin{pmatrix} -1 & -3/2 & 3/4 \\ -2 & -3/2 & 5/4 \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Halla una base del núcleo.
Solución: *Base*=$\{(3, 1, 6)\}$.

c) Determina unas ecuaciones cartesianas del subespacio imagen.
Solución: $\left.\begin{array}{r} 3x - y + z = 0 \\ x + y - t = 0 \end{array}\right\}.$

3.13 Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por $T(x, y, z) = (2x - z, 2z - y)$.

a) Halla la matriz de la aplicación con respecto a las bases canónicas.

b) Halla la matriz asociada a T con respecto a las bases $\{(2, 1, 0), (1, -2, 0), (0, 0, 2)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\{(-2, 1), (1, -2)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

c) Comprueba el diagrama que relaciona la matriz de una aplicación respecto a diferentes bases, calculando las matrices de cambio de base en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente.

3.14 *a*) Encuentra una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuyo núcleo sea

$$N(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$$

y tal que el subespacio imagen esté generado por el vector $v = (0, 1, 0)$.

b) Escribe la matriz asociada a T en la base canónica.

3.15 En $\mathbb{R}^3$ se considera la aplicación lineal T cuya matriz asociada, con respecto a la base $B = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$, es

$$M(T, B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcula la matriz asociada a T con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

b) ¿Es T un isomorfismo? Razona la respuesta.

3.16 Determina, en la base canónica de $\mathbb{R}^2$, la matriz de las siguientes isometrías lineales.

a) Simetría respecto a la recta de ecuación $y = 5x$.

b) Giro de ángulo $\theta = \pi/6$.

c) Simetría respecto a la recta $2x - y = 0$.

d) Giro de ángulo $\theta = \pi/3$.

3.17 Determina, en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, la matriz de las siguientes isometrías lineales.

a) Simetría respecto al plano $x + y + 3z = 0$.

b) Giro de ángulo $\theta = \pi/3$ alrededor de la recta con vector director $(1, 2, 4)$.

c) Simetría respecto al plano generado por los vectores $(2, 1, -1)$ y $(1, 1, 0)$.

d) Giro de ángulo $\theta = \pi/2$ respecto de la recta $x = y = z$.

e) Simetría con respecto al plano ortogonal a la recta $x = y = z$.

f) La composición de las dos anteriores.

3.18 Determina los valores de a y b para los cuales

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & b & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

es la matriz asociada a una isometría lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$.