Asignatura: MATEMÁTICA APLICADA – Curso: 2022–2023
Relación de ejercicios del Tema 2: Espacio vectorial y espacio vectorial euclídeo

---

$\boxed{2.1}$ En cada caso, determina si el subconjunto W es un subespacio vectorial del espacio vectorial V.

a) $V = \mathbb{R}^2$ y $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$.
b) $V = \mathbb{R}^2$ y $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$
c) $V = \mathbb{R}^2$ y $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
d) $V = \mathbb{R}^2$ y $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$
e) $V = \mathbb{R}^3$ y $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$
f) $V = \mathbb{R}^3$ y $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 = y\}$

Solución: b) y d) sí; a), c), e) y f) no.

$\boxed{2.2}$ En cada caso, determina si el conjunto de vectores dado genera el espacio vectorial que se indica.

a) En $\mathbb{R}^2$,
i) $\{(1, 2), (3, 4)\}$;
ii) $\{(-1, 4), (3, 2), (5, -2)\}$;
iii) $\{(1, 1)\}$.

Solución: i) y ii) sí; iii) no.

b) En $\mathbb{R}^3$,
i) $\{(1, 2, 0), (4, 6, 1)\}$;
ii) $\{(1, 2, 3), (-1, 2, 3), (5, 2, 3)\}$;
iii) $\{(2, 0, 1), (3, 1, 2), (1, 1, 1), (7, 3, 5)\}$;
iv) $\{(1, 1, 1), (2, 1, 0)\}$.

Solución: en ningún caso.

$\boxed{2.3}$ En cada caso, determina si el vector $x \in \mathbb{R}^3$ indicado se puede expresar como combinación lineal de los vectores del conjunto dado.

a) $x = (5, 2, -3)$ como combinación lineal de $\{(1, 1, -1), (2, -1, 0)\}$.
b) $x = (-1, 2, 1)$ como combinación lineal de $\{(1, 1, -1), (2, -1, 0), (3, 0, -1)\}$.
c) $x = (-1, -1, -1)$ como combinación lineal de $\{(1, 1, -1), (2, -1, 0), (3, 0, -1)\}$.

Solución: a) sí; b) y c) no.

$\boxed{2.4}$ Estudia la dependencia o independencia lineal de los conjuntos de vectores dados.

a) En $\mathbb{R}^2$, el conjunto $\{(a, 0), (0, b)\}$ con $a \neq 0$ y $b \neq 0$.
b) En $\mathbb{R}^2$, el conjunto $\{(1, 3), (-3, 6)\}$.
c) En $\mathbb{R}^2$, el conjunto $\{(2, 0), (4, 8), (0, 3)\}$.
d) En $\mathbb{R}^3$, el conjunto $\{(1, 2, -1), (1, -3, 4)\}$.
e) En $\mathbb{R}^3$, el conjunto $\{(1, 3, 4), (0, 2, -5), (0, 0, 6)\}$.

f) En $\mathbb{R}^3$, el conjunto $\{(1,1,-1),(1,0,-2),(2,1,-3)\}$.

g) En $\mathbb{R}^4$, el conjunto $\{(1,1,1,1),(3,4,2,5)\}$.

h) En $\mathbb{R}^4$, el conjunto $\{(2,5,6,4),(0,-1,2,3),(0,0,1,6)\}$.

Solución: todos son linealmente independientes, excepto en los apartados c) y f).

$\boxed{2.5}$ ¿Para qué valores, del parámetro α, son linealmente independientes los siguientes conjuntos de vectores de $\mathbb{R}^3$?

a) $\{(1,2,3),(2,-1,4),(3,\alpha,4)\}$.

b) $\{(2,-3,1),(-4,6,-2),(\alpha,1,2)\}$.

Solución: a) para $\alpha \neq -\frac{13}{2}$; b) para ningún valor de α.

$\boxed{2.6}$ En $\mathbb{R}^3$ consideramos un conjunto de vectores linealmente independientes $\{x,y,z\}$. Estudia si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes.

a) $S_1 = \{x,y,x+y\}$.

b) $S_2 = \{x,z,x+y\}$

c) $S_3 = \{x,y,(0,0,0)\}$.

Solución: Sólo S_2 está formado por vectores linealmente independientes.

$\boxed{2.7}$ ¿Para qué valores, del parámetro λ, se verifica que $B = \{(\lambda,1,0),(1,0,\lambda),(1+\lambda,1,\lambda)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$?
Solución: para ninguno.

$\boxed{2.8}$ Supongamos que $\{x_1,x_2,x_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

a) ¿Es el conjunto de vectores $\{x_1-x_2, 2x_1-x_2, -x_1+x_2+x_3\}$ otra base de $\mathbb{R}^3$?

b) ¿Y el conjunto de vectores $\{x_1+x_2-x_3, x_1-x_2+x_3, 2x_1+3x_2-3x_3\}$?

Solución: a) sí; b) no.

$\boxed{2.9}$ Encuentra una base para cada uno de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$.

a) $Y = \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1+x_2+x_3 = 0\right\}$.
Solución (de muchas posibles): $\{(-1,0,1),(-1,1,0)\}$.

b) $Z = \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_3\right\}$.
Solución (de muchas posibles): $\{(1,0,1),(0,1,0)\}$.

c) $W = \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1-x_2-x_3 = 0\right\}$.
Solución (de muchas posibles): $\{(1,2,0),(1,0,2)\}$.

$\boxed{2.10}$ Resuelve los siguientes ejercicios.

a) Calcula las coordenadas del vector de $(4,5)$ en la base canónica B_C de $\mathbb{R}^2$ y en la base $B' = \{(2,1),(-1,1)\}$.
Solución: $(4,5)_{B_c}$, $(3,2)_{B'}$.

b) Calcula las coordenadas del vector de $(2,3,1)$ en la base canónica B_C de $\mathbb{R}^3$ y en la base $B' = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$.
Solución: $(2,3,1)_{B_c}$, $(2,1,-2)_{B'}$.

$\boxed{2.11}$ Consideremos, en $\mathbb{R}^2$, el conjunto $B = \{(1,1),(1,2)\}$.

a) Comprueba que B es base de $\mathbb{R}^2$.

b) Calcula las coordenadas respecto de B de los vectores $(1,0)$, $(0,1)$ y $(-1,1)$.
<u>*Solución*</u>: $(2,-1)_B,\ (-1,1)_B$ y $(-3,2)_B$.

c) ¿Cuáles son los vectores de $\mathbb{R}^2$ que tienen coordenadas $(1,0)$, $(0,1)$ y $(2,3)$ respecto de B?
<u>*Solución*</u>: $(1,1),\ (1,2),\ (5,8)$.

d) ¿Cuáles son las coordenadas de los vectores $(1,0)$, $(0,1)$ y $(-1,1)$ respecto de la base $B' = \{(1,2),(1,1)\}$?
<u>*Solución*</u>: $(-1,2)_{B'},\ (1,-1)_{B'}$ y $(2,-3)_{B'}$.

$\boxed{2.12}$ Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Además, consideremos los vectores $u_1 = 2e_1 + e_2 - 3e_3$, $u_2 = 3e_1 + 2e_2 - 5e_3$ y $u_3 = e_1 - e_2 + 3e_3$.

a) Comprueba que $\{u_1, u_2, u_3\}$ es otra base de $\mathbb{R}^3$.

b) Calcula las coordenadas de $e = 6e_1 + 2e_2 - 7e_3$ en la nueva base.
<u>*Solución*</u>: $\left(\frac{13}{3}, -1, \frac{1}{3}\right)$.

$\boxed{2.13}$ Sea $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Además, consideremos los vectores $u_1 = e_1 - e_2$, $u_2 = e_3 - e_1$ y $u_3 = e_3 + 2e_2$.

a) Comprueba que $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ es otra base de $\mathbb{R}^3$.

b) Encuentra las ecuaciones de cambio de base de B a B_1 y las del cambio de B_1 a B.
<u>*Solución*</u>: $x_{B_1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x_B, \quad x_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x_{B_1}$.

c) Halla las coordenadas en la base B_1 del vector con coordenadas $(1,0,2)$ en la base B.
<u>*Solución*</u>: $(2,1,1)_{B_1}$.

$\boxed{2.14}$ En $\mathbb{R}^2$ consideramos las bases $B_1 = \{(1,1),(-1,4)\}$ y $B_2 = \{(3,0),(1,7)\}$.

a) Halla la matriz de cambio de base de B_2 a B_1.
<u>*Solución*</u>: $C_{B_2B_1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 12 & 11 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$.

b) Halla la matriz de cambio de base de B_1 a B_2.
<u>*Solución*</u>: $C_{B_1B_2} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -11/3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

c) Calcula las coordenadas en B_1 del vector cuyas coordenadas en B_2 son $(2,3)$.
<u>*Solución*</u>: $\frac{1}{5}(57,12)_{B_1}$.

$\boxed{2.15}$ Sean $B_1 = \{(1,0,1),(-1,1,1),(1,-1,0)\}$ y $B_2 = \{(2,1,1),(1,1,1),(1,-1,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$.

a) Calcula la matriz de cambio de base de B_2 a B_1.
<u>*Solución*</u>: $C_{B_2B_1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Calcula las coordenadas en B_1 del vector cuyas coordenadas en B_2 son $(3,2,-2)$.
<u>*Solución*</u>: $(13,-10,-17)_{B_1}$.

2.16 En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se consideran los conjuntos $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ y $B' = \{(1/2,1/2,-1/2),(1/2,-1/2,1/2),(-1/2,1/2,1/2)\}$.

a) Comprueba que B y B' son bases de $\mathbb{R}^3$.

b) Calcula las matrices de cambio de base de B a B' y de B' a B.

c) Calcula las coordenadas del vector $v = 3(1,0,0) - 2(1,1,0)$ en la base B'.

2.17 En el espacio vectorial $\mathbb{P}_2$, formado por los polinomios de grado menor o igual que 2, se consideran los subconjuntos $B = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ y $B' = \{1, x-1/2, 1/6-x+x^2\}$.

a) Comprueba que B y B' son bases de $\mathbb{P}_2$.

b) Calcula las matrices de cambio de base de B a B' y de B' a B.

Solución: $C_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 11/6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 7/6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

c) Calcula las coordenadas del polinomio $p(x) = 3 - 2(1+x)$ en la base B'.

Solución: $(0,-2,0)_{B'}$.

2.18 En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, se consideran los subespacios vectoriales

$$W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$$

y

$$W_2 = \{(t,2t,3t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

a) Demuestra que $\mathbb{R}^3$ es la suma de ambos.

b) Calcula su intersección.

Solución: $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

2.19 En el espacio vectorial $\mathbb{R}^5$, se considera el subespacio vectorial U generado por los vectores

$$\{(1,2,-1,1,0),(1,3,0,-1,1),(0,1,1,-2,1)\}.$$

Halla un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^5$ que sea complementario de U.

Solución (de muchas posibles): el determinado por las ecuaciones $x=0$, $y=0$.

2.20 Dados $Y_1 = L(\{(1,0,1,0),(0,1,1,1)\})$ e $Y_2 = L(\{(1,0,0,1),(0,1,2,0)\})$, determina la dimensión, una base y unas ecuaciones paramétricas de cada uno de ellos.

Solución (de muchas posibles): $\dim Y_1 = \dim Y_2 = 2$; $Y_1 : \left.\begin{array}{l} x=a \\ y=b \\ z=a+b \\ w=b \end{array}\right\}, \ a,b \in \mathbb{R}$; $Y_2 : \left.\begin{array}{l} x=a \\ y=b \\ z=2b \\ w=a \end{array}\right\}, \ a,b \in \mathbb{R}$.

2.21 Consideremos los vectores de $\mathbb{R}^3$: $(4,-5,7)$, $(3,-3,4)$, $(1,1,-2)$ y $(2,-1,1)$.

a) Halla una base del subespacio vectorial $Y \subseteq \mathbb{R}^3$ que generan dichos vectores.

Solución (de muchas posibles): $\{(1,0,-1/3),(0,1,-5/3)\}$.

b) Estudia si dicho subespacio coincide con el generado por los vectores $(1,-2,3)$ y $(3,0,-1)$.

Solución: *sí*.

c) Determina unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones cartesianas de Y.

Solución (de muchas posibles): *paramétricas*: $\left.\begin{array}{l} x=a \\ y=b \\ z=-\frac{1}{3}a-\frac{5}{3}b \end{array}\right\}, \ a,b \in \mathbb{R}$;

cartesianas: $x+5y+3z=0$.

$\boxed{2.22}$ Considera el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^4$

$$S = \{(0,-2,3,1),(1,3,0,1),(1,1,3,2),(3,5,6,5),(-1,-5,3,0),(2,8,-3,1)\}.$$

a) Calcula la dimensión y obtén una base del subespacio Y generado por S.

b) Calcula una base ortonormal de Y.

c) Comprueba si el vector (3,-1,1,0) pertenece al subespacio anterior.

d) Halla unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones implícitas de Y.

$\boxed{2.23}$ Halla, en cada caso, el ángulo que forman los vectores x e y.

a) $x = (1,2),\ y = (1,4)$.
Solución: $\arccos \frac{9}{\sqrt{85}}$.

b) $x = (1,2,0),\ y = (7,3,4)$.
Solución: $\arccos \frac{13}{\sqrt{370}}$.

$\boxed{2.24}$ A partir de la base $B = \{(3,1,0,0),(1,3,1,0),(0,1,3,1),(0,0,1,3)\}$ de $\mathbb{R}^4$, y haciendo uso del proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt, obtén una base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ (con el producto escalar usual).
Solución: $\left\{(3,1,0,0), \frac{1}{5}(-4,12,5,0), \frac{1}{74}(21,-63,168,74), \frac{1}{103}(-11,33,-88,231)\right\}$.

$\boxed{2.25}$ Aplica el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt para obtener una base ortogonal del espacio de los polinomios de grado menor o igual que 2 en $[0,1]$, considerando el producto escalar usual, a partir de la base $B = \left\{x^2, x(1-x), (1-x)^2\right\}$.
Solución: $\left\{x^2, x - \frac{5}{4}x^2, 1 - 4x + \frac{10}{3}x^2\right\}$.

$\boxed{2.26}$ Sea Y el subespacio de $\mathbb{R}^4$ dado por la ecuación cartesiana $x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 = 0$. Obtén una base de Y y aplica a dicha base el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt para conseguir una base ortogonal de Y.
Solución (de muchas posibles): $\{(1,0,1,0),(1,-1,0,0),(5,0,0,1)\}$;
$\left\{(1,0,1,0), \left(\frac{1}{2},-1,\frac{-1}{2},0\right), \left(\frac{5}{3},\frac{5}{3},\frac{-5}{3},1\right)\right\}$.

$\boxed{2.27}$ En el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 ($\mathbb{P}_3$), con el producto escalar usual de las funciones de $C([0,1])$, considera el subespacio vectorial Y dado por

$$Y = \left\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{P}_3 \ \middle|\ \begin{array}{r} a_0 - 2a_1 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_3 = 0 \end{array} \right\}.$$

a) Halla una base de Y.

b) Calcula una base ortogonal de Y.

c) Calcula la proyección ortogonal del polinomio $-1 + 2x + 3x^2 + x^3$ sobre Y.

$\boxed{2.28}$ Halla el complemento ortogonal del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^5$ dado por

$$Y = L\left(\{(1,2,3,4,5),(0,2,0,1,0),(0,1,1,0,0)\}\right).$$

Solución: $Y^{\perp} = \left\{ (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 \ \middle|\ \begin{array}{r} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\}$.

$\boxed{2.29}$ En cada caso, determina la proyección ortogonal del vector $x = (1, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$ sobre los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$.

a) $Y_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\right\}.$
Solución: $(1, 2, 1)$.

b) $Y_2 = L\left(\{(1, 2, 3), (0, 2, 2)\}\right).$
Solución: $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right).$

$\boxed{2.30}$ Calcula la recta, la parábola y la cúbica (con ecuaciones $y = mx + n$, $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, e $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, respectivamente) que mejor aproximan, en el sentido de los mínimos cuadrados continuos en $[-1, 1]$, a la función

$$f(x) = |x|, \ (-1 \leq x \leq 1).$$

Solución: recta: $y = \frac{1}{2}$; *parábola:* $y = \frac{15}{16}x^2 + \frac{3}{16}$; *cúbica:* $y = \frac{15}{16}x^2 + \frac{3}{16}$.

$\boxed{2.31}$ Determina la mejor aproximación por mínimos cuadrados en $\mathbb{P}_2([0, \pi])$ de las funciones

$$f(x) = \cos x, \ 0 \leq x \leq \pi,$$

y

$$g(x) = \operatorname{sen} x, \ 0 \leq x \leq \pi.$$

Solución: $y = -\frac{24}{\pi^3}x + \frac{12}{\pi^2}$; $y \simeq -0.4177x^2 + 1.3122x - 0.0505$.

$\boxed{2.32}$ Calcula la mejor aproximación mediante mínimos cuadrados de las funciones

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

y

$$g(x) = e^x$$

en $\mathbb{P}_2([1, 2])$ y $\mathbb{P}_2([-1, 1])$, respectivamente.
Solución: $y \simeq 0.3274x^2 - 1.4589x + 2.1175$; $y \simeq 0.5367x^2 + 1.1036x + 0.9963$.

$\boxed{2.33}$ Halla la recta de ecuación $y = ax + b$ que mejor aproxima, en el sentido de los mínimos cuadrados, los datos recogidos en la siguiente tabla.

x_i	1	2	0	3
y_i	1	1	2	-2

Si los datos anteriores corresponden a las observaciones experimentales de la temperatura mínima diaria (en grados centígrados) en una ciudad a lo largo de cuatro días (0, 1, 2 y 3), usa dicha recta para estimar la temperatura mínima en el día 6.
Solución: $y = -1.2x + 2.3$; *temperatura mínima prevista para el día 6:* -4.9

$\boxed{2.34}$ Calcula la parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ que mejor aproxima, en el sentido de los mínimos cuadrados, los datos del Ejercicio 2.33.
Solución: $y = -0.5x^2 + 0.3x + 1.8$.

$\boxed{2.35}$ Determina el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que la recta que mejor aproxime, en el sentido de los mínimos cuadrados, los puntos $(1, 1)$, $(0, 1)$, $(2, 2)$, $(1, \alpha)$, sea

$$y = \frac{x}{2} + 1.$$

Solución: $\alpha = 2$.