Asignatura: MATEMÁTICA APLICADA – Curso: 2022–2023
Relación de ejercicios del Tema 1: Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

---

$\boxed{1.1}$ Justifica cuáles de las siguientes matrices son escalonadas (por filas). ¿Es alguna escalonada reducida (por filas)?

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ *Solución: escalonada, no reducida.*

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ *Solución: no escalonada.*

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ *Solución: escalonada, no reducida.*

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ *Solución: escalonada reducida.*

e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *Solución: no escalonada.*

f) $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *Solución: escalonada, no reducida.*

$\boxed{1.2}$ Calcula el rango de las siguientes matrices.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ *Solución: 4.*

b) $\begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0.5 & 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0.5 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 13 \end{pmatrix}$ *Solución: 4.*

c) $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 8 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ *Solución: 2.*

d) $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & -1 \\ 2 & 11 & 6 & 17 \\ 5 & 1 & 24 & -7 \end{pmatrix}$ *Solución: 3.*

e) $\begin{pmatrix} 3 & 9 & -\lambda \\ 7 & -2 & -4 \\ 4 & 10 & -6 \end{pmatrix}$, $(\lambda \in \mathbb{R})$ *Solución: 3, si $\lambda \neq 5$, y 2, si $\lambda = 5$.*

f) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$, $(\lambda \in \mathbb{R})$ *<u>Solución</u>: 3, si $\lambda \neq 3$, y 2, si $\lambda = 3$.*

$\boxed{1.3}$ Contesta razonadamente si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden tales que $AB = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$.

b) Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden, de forma que A es invertible y $AB = 0$, entonces $B = 0$.

c) Para cualesquiera dos matrices cuadradas del mismo orden A y B se cumple

$$(AB)^2 = A^2B^2.$$

d) La suma de dos matrices regulares vuelve a ser regular.

e) El producto de dos matrices regulares también es regular.

f) Si $A \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ y rango$(A) = 3$ entonces A es equivalente (por filas) a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

g) Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden. Entonces

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

h) Si A es una matriz cuadrada de forma que $A^2 = 0$, entonces $A = 0$.

i) Existe A es una matriz cuadrada regular de forma que $\det\left(A^2\right) = 0$.

j) Siempre es posible multiplicar una matriz por su traspuesta.

k) Con el método de Gauss se transforma un sistema de ecuaciones lineales en otro equivalente cuya matriz de coeficientes es triangular.

l) No existe una matriz que sea simétrica y antisimétrica[1].

m) Si A es una matriz cuadrada regular de orden n, entonces $A + I_n$ también es regular, ya que la identidad es una matriz regular.

n) Si A y B son matrices de igual rango y dimensión, entonces
rango$(A + B)$ =rango(A) = rango(B).

$\boxed{1.4}$ Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

comprueba que $AB = AC$. Concluye que la matriz A no es regular.

[1]Recuerda que una matriz cuadrada A es *simétrica* si $A^T = A$ y que es *antisimétrica* si $A^T = -A$.

$\boxed{1.5}$ Determina cuáles de las siguientes matrices son regulares. En caso afirmativo, halla la matriz inversa correspondiente.

a) $\begin{pmatrix} -8 & 25 & 40 \\ 2/5 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{pmatrix}$ *Solución: no regular.*

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *Solución:* $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ *Solución:* $\begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -6 & 7 \end{pmatrix}$ *Solución:* $\begin{pmatrix} \frac{263}{260} & -\frac{7}{13} & -\frac{3}{260} & -\frac{29}{260} \\ -\frac{71}{260} & \frac{1}{13} & \frac{71}{260} & -\frac{7}{260} \\ -\frac{51}{260} & \frac{2}{13} & \frac{51}{260} & -\frac{27}{260} \\ \frac{7}{260} & \frac{1}{13} & -\frac{7}{260} & \frac{19}{260} \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ *Solución:* $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$\boxed{1.6}$ Si A es una matriz cuadrada tal que $A^2 - 3A + I = 0$, demuestra que A es invertible y calcula la inversa.

$\boxed{1.7}$ Calcula el determinante de las siguientes matrices.

a) $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 7 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ *Solución:* 0.

b) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ *Solución:* -18.

c) $\begin{pmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $(a, b \in \mathbb{R})$ *Solución:* $(a-b)^3$.

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & -3 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *Solución:* 22.

e) $\begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 6 \\ 2 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & 10 & 5 & -9 \end{pmatrix}$ *Solución:* 0.

$\boxed{1.8}$ ¿Qué valor (o valores) ha de tomar μ para que se verifique

$$\det\begin{pmatrix} 2 & \mu & 0 \\ \mu & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} > 0?$$

Solución: $\mu \in (-1, 4)$.

$\boxed{1.9}$ Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

demuestra que A^3 es la matriz nula y que $A^2 + A + I_3$ es la matriz inversa de $I_3 - A$.

$\boxed{1.10}$ Discute y resuelve, en los casos que proceda, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

a) $$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right\}$$

Solución: incompatible.

b) $$\left.\begin{array}{r} 2x + y + z + w = 0 \\ -4x - 2y + z - 6w = 7 \\ 7x + 3.5y + 2z + 8w = 9 \end{array}\right\}$$

Solución: compatible indeterminado; $(-7 - 0.5\lambda, \lambda, 9, 5),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

c) $$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y + 5z - w = 49 \\ 2x - y - z + w = 2 \\ x + y - 3z - 2w = -11 \\ w = 0 \end{array}\right\}$$

Solución: compatible determinado; $(5, 2, 6, 0)$.

d) $$\left.\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 8x_2 - 7x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -3 \end{array}\right\}$$

Solución: incompatible.

e) $$\left.\begin{array}{r} -6x - 6y - 6z = -12 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ -2x + y + 2z = 2 \end{array}\right\}$$

Solución: compatible determinado; $(1, -2, 3)$

f) $$\left.\begin{array}{r} 2x + 5y = 16 \\ x + 3y - 2z = -2 \\ x + z = 4 \end{array}\right\}$$

Solución: compatible determinado; $(-2, 4, 6)$.

g) $$\left.\begin{array}{r} x - 2y = -3 \\ -2x + 3y + z = 4 \\ 2x + y - 5z = 4 \end{array}\right\}$$

Solución: compatible indeterminado; $(1 + 2\lambda, 2 + \lambda, \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

h) $\left.\begin{array}{r} -x+2y-3z=-2 \\ x-8y+2z=0 \\ x-y-z=1 \end{array}\right\}$

<u>Solución</u>: *compatible determinado;* $\left(\frac{8}{5},\frac{7}{25},\frac{8}{25}\right)$.

$\boxed{1.11}$ Estudia el carácter de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales y resuélvelos, cuando sea posible, dependiendo de los valores de los parámetros a y b.

a) $\left.\begin{array}{r} 3x+9y-az=0 \\ 7x-2y-4z=0 \\ 2x+5y-3z=0 \end{array}\right\}$

<u>Solución</u>:

- $a=5$: *compatible indeterminado;* $\left(\frac{2}{3}\lambda,\frac{\lambda}{3},\lambda\right)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.
- $a\neq 5$: *compatible determinado;* $(0,0,0)$.

b) $\left.\begin{array}{r} (1+a)x+y+z=1 \\ x+(1+a)y+z=a \\ x+y+(1+a)z=a^2 \end{array}\right\}$

<u>Solución</u>:

- $a\neq 0,-3$: *compatible determinado;* $\left(\frac{2-a^2}{a(3+a)},\frac{2a-1}{a(3+a)},\frac{a^3+2a^2-a-1}{a(3+a)}\right)$.
- $a=0,-3$: *incompatible.*

c) $\left.\begin{array}{r} ax+y+z+t=a \\ x+ay+z+t=a \\ x+y+az+t=a \\ x+y+z+at=a \end{array}\right\}$

<u>Solución</u>:

- $a\neq 1,-3$: *compatible determinado;* $\left(\frac{a}{a+3},\frac{a}{a+3},\frac{a}{a+3},\frac{a}{a+3}\right)$
- $a=1$: *compatible indeterminado;* $(1-\lambda-\mu-\nu,\lambda,\mu,\nu)$, $\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}$.
- $a=-3$: *incompatible.*

d) $\left.\begin{array}{r} x+ay=1 \\ 2x-y-z=0 \\ 4x-by-3z=-a \end{array}\right\}$

<u>Solución</u>:

- $3+2a\neq b$: *compatible determinado;* $\left(\frac{a^2-b+3}{3+2a-b},\frac{a-2}{3+2a-b},\frac{2a^2+a-2b+4}{3+2a-b}\right)$
- $3+2a=b\ \wedge\ b=7$: *compatible indeterminado;* $\left(\frac{1+2\lambda}{5},\frac{2-\lambda}{5},\lambda\right)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.
- $3+2a=b\ \wedge\ b\neq 7$: *incompatible.*

$\boxed{1.12}$ Responde razonadamente a las siguientes cuestiones.

a) ¿Puede ser incompatible un sistema de dos ecuaciones lineales y tres incógnitas? ¿Y compatible determinado?

b) ¿Existe la posibilidad de encontrar un sistema de dos ecuaciones lineales con cuatro incógnitas que sea incompatible?

c) ¿Hay algún sistema con tres ecuaciones lineales y dos incógnitas que sea compatible determinado?

d) ¿Es cierto que un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, siendo $m > n$, nunca es compatible determinado?

e) ¿Podemos encontrar un sistema de dos ecuaciones lineales y dos incógnitas que posea únicamente las soluciones $(1, 2)$ y $(8, 9)$? ¿Y las soluciones $(0, 0)$ y $(-1, 1)$?

f) Si en un sistema de ecuaciones lineales compatible determinado cambiamos los términos independientes por otros cualesquiera, el nuevo sistema vuelve a ser compatible determinado.

g) Si un sistema de ecuaciones lineales es incompatible, siempre es posible cambiar los términos independientes por otros de manera que sea compatible determinado.

$\boxed{1.13}$ Considera los sistemas de ecuaciones lineales cuya matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

y los términos independientes son

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 2.2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Resuélvelos por el método más eficiente.

<u>Solución</u>: $(15, -2, -5)$, $(-1, 0, 0.5)$, $(13.9, -1.1, -5.3)$.

$\boxed{1.14}$ Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned} -9x + y - z &= 1 \\ x + 4y + z &= 2 \\ x - y - 5z &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

¿Podemos asegurar convergencia de los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel cuando se aplican al sistema anterior? ¿Por qué? Obtén la expresión recursiva que permite resolver de forma aproximada el sistema anterior mediante el uso de dichos métodos numéricos. Calcula en cada caso las cinco primeras iteraciones, tomando como vector de partida el vector nulo.

<u>Solución</u>: *Iteración 5 de Jacobi* $(-0.0107407, 0.582469, -0.318642)$.
Iteración 5 de Gauss-Seidel $(-0.0109924, 0.582416, -0.318682)$.

$\boxed{1.15}$ Se considera el sistema de ecuaciones lineales, escrito de dos formas equivalentes,

$$i)\ \left.\begin{aligned} 5x - 2y &= 13 \\ 2x + 7y &= 13 \end{aligned}\right\} \qquad \text{y} \qquad ii)\ \left.\begin{aligned} 2x + 7y &= 13 \\ 5x - 2y &= 13 \end{aligned}\right\},$$

cuya solución exacta es $x = 3$, $y = 1$. Realiza 5 iteraciones con los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel partiendo para el caso *i*) de la aproximación inicial $x = -50, y = -40$ y para el caso *ii*) de $x = y = 1.1$.

<u>Solución</u>:
i) Jacobi: $(2.7858, 1.19778)$, *Gauss-Seidel:* $(2.9972, 1.0008)$
ii) Jacobi: $(-23.7969, -362.672)$, *Gauss-Seidel:* $(-2048.64, -5128.09)$.

$\boxed{1.16}$ Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - 6z = 5 \\ 7x + 2y - 3z = 5 \\ 2x + 6y - 3z = 5 \end{array}\right\}.$$

a) Encuentra su solución mediante el método de Gauss.

b) Realiza una iteración con Jacobi y otra con Gauss-Seidel, partiendo en ambos casos del valor inicial 1.3 para todas las componentes.

c) A raíz de los resultados obtenidos en esa iteración, ¿puedes asegurar que algunos de estos métodos es divergente? ¿Puedes garantizar la convergencia de esos métodos?

$\boxed{1.17}$ Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calcula el determinante de A aplicando el desarrollo de Laplace (esto es, el método de los adjuntos) para cada una de las cuatro filas y también a partir de cada una de las cuatro columnas (obviamente, los 8 resultados tienen que coincidir).

b) Saca el factor -2 en la tercera columna y el 3 en la última y calcula el valor del determinante de la matriz que ha quedado para comprobar que al multiplicarlo por -6 se obtiene el determinante de A.

c) Halla el determinante de A^T.

d) Determina la única matriz escalonada reducida por filas equivalente por filas a la matriz A.

$\boxed{1.18}$ Sea A la matriz cuadrada definida por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Discute y, en su caso, resuelve el sistema de ecuaciones

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Aplica el método de Gauss-Seidel con 8 iteraciones e iteración inicial $x_0 = (2, 2, 2)$. Interpreta los resultados.