Asignatura: MATEMÁTICA APLICADA – Curso: 2022–2023

Ejercicios desarrollados - Tema 4(1)

El objetivo principal de este documento es comprender que la resolución de un ejercicio no consiste en una simple sucesión de cálculos. Al contrario, un ejercicio debe contener explicaciones sobre **qué se va a hacer, cómo se va a hacer y, quizás lo más importante, por qué se va a hacer lo que se hace**.

Ejercicio 4.1

Enunciado

Determina $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$, sabiendo que $(1,1,1)$, $(1,0,-1)$ y $(1,-1,0)$ son vectores propios de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}.$$

Resolución

Como, según el enunciado, $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,0,-1)$ y $v_3 = (1,-1,0)$ son vectores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix},$$

entonces deben existir $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que $Av_i = \lambda_i v_i$, para $i = 1,2,3$. Por tanto,

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ a_1 + a_2 + a_3 \\ b_1 + b_2 + b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{c} 3 = \lambda_1 \\ a_1 + a_2 + a_3 = \lambda_1 \\ b_1 + b_2 + b_3 = \lambda_1 \end{array} \right\}.$$

$$Av_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 - a_3 \\ b_1 - b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{c} 0 = \lambda_2 \\ a_1 - a_3 = \lambda_2 \\ b_1 - b_3 = \lambda_2 \end{array} \right\}.$$

$$Av_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 - a_2 \\ b_1 - b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{c} 0 = \lambda_3 \\ a_1 - a_2 = \lambda_3 \\ b_1 - b_2 = \lambda_3 \end{array} \right\}.$$

A partir de los tres sistemas obtenidos, los valores propios de A son $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = 0$. Por otra parte,

$$\left. \begin{array}{c} a_1 + a_2 + a_3 = 3 \\ b_1 + b_2 + b_3 = 3 \\ a_1 - a_3 = 0 \\ b_1 - b_3 = 0 \\ a_1 - a_2 = 0 \\ b_1 - b_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{c} a_1 + a_2 + a_3 = 3 \\ a_1 - a_3 = 0 \\ a_1 - a_2 = 0 \\ b_1 + b_2 + b_3 = 3 \\ b_1 - b_3 = 0 \\ b_1 - b_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{c} a_1 + a_2 + a_3 = 3 \\ a_1 = a_3 \\ a_1 = a_2 \\ b_1 + b_2 + b_3 = 3 \\ b_1 = b_3 \\ b_1 = b_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{c} a_1 = a_2 = a_3 = 1 \\ b_1 = b_2 = b_3 = 1 \end{array} \right\}.$$

Ejercicio 4.2.iii

Enunciado

Sea la matriz

$$A_3 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \ (0 < \theta < \pi).$$

Diagonalízala si ello es posible.

Resolución

Para ver si A_3 es diagonalizable, primero hallamos su polinomio característico.

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \cos\theta - \lambda & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta - \lambda \end{pmatrix} = (\cos\theta - \lambda)^2 + \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta - 2\lambda\cos\theta + \lambda^2 + \operatorname{sen}^2\theta = 1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta.$$

A continuación resolvemos la ecuación característica asociada a A_3.

$$p(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2(\cos\theta)\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2(\cos\theta) \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2} = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1}.$$

Pero, por el enunciado tenemos que $0 < \theta < \pi$, de donde $-1 < \cos\theta < 1$ y, por tanto, $0 < \cos^2\theta < 1$. Así podemos concluir que $\cos^2\theta - 1$ es siempre negativo, por lo que la raíz cuadrada no es real y, en consecuencia, A_3 no es diagonalizable (en $\mathbb{R}$).

Ejercicio 4.2.iv

Enunciado

Sea la matriz

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diagonalízala si ello es posible.

Resolución

Para ver si A_4 es diagonalizable, primero hallamos su polinomio característico.

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 6 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda).$$

A continuación resolvemos la ecuación característica asociada a A_4.

$$p(\lambda) = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \text{ doble y } \lambda_2 = 2 \text{ simple.}$$

Por último, calculemos los subespacios propios asociados a $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$. Empezamos con $\lambda_1 = 1$, tomando $v_1 = (x, y, z)$ y la matriz identidad de orden tres I_3.

$$A_4 v_1 = \lambda_1 v_1 \Rightarrow (A_4 - \lambda_1 I_3)v_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 6 & 2-1 & 0 \\ 2 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 0 = 0 \\ 6x + y = 0 \\ 2x = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0, \\ z = \alpha, \end{matrix}\right. \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, el subespacio propio asociado a $\lambda_1 = 1$ es $V_1 = \{(0, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = L(\{(0, 0, 1)\})$, que es de dimensión 1. Pero $\lambda_1 = 1$ es doble, por lo que, para que A_4 sea diagonalizable, necesitamos dos vectores linealmente independientes que sean vectores propios de A_4 asociados a λ_1. Como esto no es posible, concluimos que A_4 no es diagonalizable.

Ejercicio 4.2.viii

Enunciado

Sea la matriz

$$A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diagonalízala si ello es posible.

Resolución

Para ver si A_8 es diagonalizable, primero hallamos su polinomio característico.

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3 - (1-\lambda) = (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 1\right) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda).$$

A continuación resolvemos la ecuación característica asociada a A_8.

$$p(\lambda) = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = 0 \Rightarrow (1-\lambda)\lambda(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1 \text{ y } \lambda_3 = 2.$$

Por último, calculemos los subespacios propios asociados a $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 2$. Empezamos con $\lambda_1 = 1$, tomando $v_1 = (x, y, z)$ y la matriz identidad de orden tres I_3.

$$A_8 v_1 = \lambda_1 v_1 \Rightarrow (A_8 - \lambda_1 I_3)v_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-0 & 1 & -1 \\ -1 & 1-0 & 1 \\ -1 & 1 & 1-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x + y - z = 0 \\ 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \alpha, \\ y = 0, \\ z = \alpha, \end{array}\right. \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, el subespacio propio asociado a $\lambda_1 = 0$ es $V_1 = \{(\alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = L(\{(1, 0, 1)\})$.

Análogamente calculamos los subespacios propios asociados a $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 2$. Veámoslo.

$$A_8 v_2 = \lambda_2 v_2 \Rightarrow (A_8 - \lambda_2 I_3)v_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-1 & 1 & -1 \\ -1 & 1-1 & 1 \\ -1 & 1 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y - z = 0 \\ -x + z = 0 \\ -x + y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \alpha, \\ y = \alpha, \\ z = \alpha, \end{array}\right. \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, el subespacio propio asociado a $\lambda_2 = 1$ es $V_2 = \{(\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = L(\{(1, 1, 1)\})$.

$$A_8 v_3 = \lambda_3 v_3 \Rightarrow (A_8 - \lambda_1 I_3)v_3 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-2 & 1 & -1 \\ -1 & 1-2 & 1 \\ -1 & 1 & 1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -x + y - z = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x + y - z = 0 \\ -2x = 0 \\ 0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0, \\ y = \alpha, \\ z = \alpha, \end{array}\right. \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, el subespacio propio asociado a $\lambda_3 = 2$ es $V_3 = \{(0, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = L(\{(0, 1, 1)\})$.

Como tenemos tres valores propios reales simples, entonces podemos asociarle a cada uno de ellos un vector propio, de forma que los tres vectores así obtenidos son linealmente independientes (¡compruébese que en efecto son linealmente independientes!).

$$v_1 = (1, 0, 1), \quad v_2 = (1, 1, 1), \quad v_3 = (0, 1, 1).$$

Por tanto, A_8 es diagonalizable y la expresión asociada es $A_8 = P \cdot D \cdot P^{-1}$ con

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4.3

Enunciado

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/3 \\ -2/5 & 1/10 & 1/5 \\ 2/5 & 2/5 & 2/15 \end{pmatrix}$ y los vectores $(1,-1,0)$, $(1,0,2)$, $(0,-2,-3)$.

a) Comprueba que dichos vectores son vectores propios de A.

b) A partir de *a*), halla los valores propios de A.

c) ¿Es A diagonalizable? ¿Por qué? En caso afirmativo, diagonaliza A.

Resolución

a) Recordemos que un vector v es vector propio de una matriz A si existe un número real λ tal que $Av = \lambda v$. Veamos que esto se verifica para los tres vectores dados.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/3 \\ -2/5 & 1/10 & 1/5 \\ 2/5 & 2/5 & 2/15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/3 \\ -2/5 & 1/10 & 1/5 \\ 2/5 & 2/5 & 2/15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/3 \\ -2/5 & 1/10 & 1/5 \\ 2/5 & 2/5 & 2/15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -4/5 \\ -6/5 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{5}.$$

Por tanto, los tres vectores dados son vectores propios de A.

b) Al ser A una matriz cuadrada de orden tres, entonces puede tener, a lo sumo, tres valores propios distintos. Por lo hecho en el apartado *a*), podemos asegurar que los valores propios de A son $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{3}$ y $\lambda_3 = \frac{2}{5}$.

c) Como A es una matriz cuadrada de orden tres con tres valores propios distintos, podemos asegurar que es diagonalizable pues podemos encontrar tres vectores propios (uno por cada valor propio) que serán linealmente independientes.

Además, por lo hecho en los apartados *a*) y *b*), tenemos que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ con

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4.4

Enunciado

En función de los valores de los parámetros reales α y β, determina cuándo es diagonalizable la siguiente matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3.7 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Resolución

Para comprobar si la matriz dada es diagonalizable, comenzamos estudiando su polinomio característico.

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 & 3.7 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & \alpha & \beta-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)(-1-\lambda)(\beta-\lambda).$$

Es claro que los ceros de $p(\lambda)$ son $\lambda = 5$, $\lambda = -1$ y $\lambda = \beta$. Por tanto, si $\beta \neq -1$ y $\beta \neq 5$, entonces A sería una matriz cuadrada de orden tres que tiene tres valores propios distintos y, en consecuencia, podemos encontrar un conjunto de tres vectores (uno por cada valor) que serán linealmente independientes. Así podemos concluir que A será diagonalizable si $\beta \neq -1$ y $\beta \neq 5$ (para cualquier valor de α).

Veamos ahora qué ocurre cuando $\beta = 5$. En tal caso los valores propios de A serían $\lambda = 5$ doble y $\lambda = -1$ simple. Es claro que $\lambda = -1$ no es un problema, para que A sea diagonalizable, por ser un valor propio simple. Estudiamos, pues, el subespacio propio asociado a $\lambda = 5$. Tomando $v = (x, y, z)$ y la matriz identidad de orden tres I_3 (y teniendo en cuenta que $\beta = 5$),

$$Av = 5v \Rightarrow (A - 5I_3)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 5-5 & 2 & 3.7 \\ 0 & -1-5 & 0 \\ 0 & \alpha & 5-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3.7 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2y + 3.7z = 0 \\ -6y = 0 \\ \alpha y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2y + 3.7z = 0 \\ y = 0 \\ 0 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x = \alpha \\ y = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \\ z = 0, \end{matrix}\right.$$

Por tanto, el subespacio propio asociado a $\lambda = 5$ es $V = \{(\alpha, 0, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = L(\{(1, 0, 0)\})$, que es de dimensión 1. Pero $\lambda = 5$ es doble, por lo que, para que A fuese diagonalizable, necesitaríamos dos vectores linealmente independientes que fueran vectores propios de A asociados a $\lambda = 5$. Como esto no es posible, concluimos que A no es diagonalizable si $\beta = 5$ (para cualquier valor de α).

Acabamos viendo qué sucede cuando $\beta = -1$. En este caso los valores propios de A serían $\lambda = 5$ simple y $\lambda = -1$ doble. Es claro que $\lambda = 5$ no es un problema, para que A sea diagonalizable, por ser un valor propio simple. Por tanto, hallamos el subespacio propio asociado a $\lambda = -1$. Tomando $v = (x, y, z)$ y la matriz identidad de orden tres I_3 (y teniendo en cuenta que $\beta = -1$),

$$Av = (-1)v \Rightarrow (A - (-1)I_3)v = 0 \Rightarrow (A + I_3)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 5+1 & 2 & 3.7 \\ 0 & -1+1 & 0 \\ 0 & \alpha & -1+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3.7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 6x + 2y + 3.7z = 0 \\ 0 = 0 \\ \alpha y = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Para estudiar el sistema resultante, tenemos que distinguir dos casos: $\alpha = 0$ y $\alpha \neq 0$.

Si $\alpha = 0$ (y $\beta = -1$) entonces

$$\left.\begin{matrix} 6x + 2y + 3.7z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 6x + 2y + 3.7z = 0.$$

Por tanto, el subespacio propio asociado a $\lambda = -1$ es

$$V = \left\{ \left(-\frac{2a + 3.7b}{6}, a, b \right) \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\} = L(\{(-2, 6, 0), (-3.7, 0, 6)\}),$$

que es un subespacio vectorial de dimensión 2. De esta forma, podemos tomar dos vectores v_1, v_2 linealmente independientes que serán vectores propios de A asociados al valor propio $\lambda = -1$. Puesto que teníamos un tercer vector propio v_3 de A correspondiente a $\lambda = 5$ (y que, por tanto, junto a v_1 y v_2 formarán un sistema de tres vectores linealmente independientes), concluimos que A es diagonalizable si $\beta = -1$ y $\alpha = 0$.

Si $\alpha \neq 0$ (y $\beta = -1$) entonces

$$\left.\begin{array}{c} 6x + 2y + 3.7z = 0 \\ 0 = 0 \\ \alpha y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 6x + 2y + 3.7z = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\}$$

Por tanto, el subespacio propio asociado a $\lambda = -1$ es

$$V = \left\{ \left(\frac{-3.7}{6} a, 0, a, \right) \Big| \, a \in \mathbb{R} \right\} = L(\{(-3.7, 0, 6)\}),$$

Pero $\lambda = -1$ es doble, por lo que, para que A fuese diagonalizable, necesitaríamos dos vectores linealmente independientes que fueran vectores propios de A asociados a $\lambda = -1$. Como esto no es posible, concluimos que A no es diagonalizable si $\beta = -1$ y $\alpha \neq 0$.

Resumiendo, tenemos que

- si $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 5\}$ entonces A es diagonalizable (para cualquier valor de α);
- si $\beta = 5$ entonces A no es diagonalizable (para cualquier valor de α);
- si $\beta = -1$ y $\alpha = 0$ entonces A es diagonalizable;
- si $\beta = -1$ y $\alpha \neq 0$ entonces A no es diagonalizable.

Ejercicio 4.5

Enunciado

Decide, de forma razonada, cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas.

i) Cualquier matriz diagonal es diagonalizable.

ii) Sea A una matriz cuadrada de orden n de modo que $A^2 = -I_n$. Entonces A no posee valores propios.

iv) Una matriz cuadrada es regular si, y sólo si, no admite a 0 como valor propio.

vi) Supongamos que una matriz cuadrada A posee un valor propio λ. Entonces, para todo $k \in \mathbb{N}$, la matriz A^k admite a λ^k como valor propio.

vii) Sea A una matriz regular y sea λ un valor propio suyo. Entonces el número $\frac{1}{\lambda}$ es un valor propio de la matriz A^{-1}.

viii) Si A es una matriz cuadrada y $\lambda \geq 0$ es un valor propio de A^2, entonces, o bien $\sqrt{\lambda}$, o bien $-\sqrt{\lambda}$, son valores propios de A. (Indicación: $A^2 - \lambda I = (A + \sqrt{\lambda} I)(A - \sqrt{\lambda} I)$).

Resolución

i) Si A es diagonal entonces es claro que $A = I_n \cdot A \cdot I_n = I_n \cdot A \cdot (I_n)^{-1} = P \cdot D \cdot P^{-1}$ con $P = I_n$ (siendo I_n la matriz identidad de orden n) y $D = A$. Por tanto, es cierto que toda matriz diagonal es diagonalizable.

ii) Supongamos que A es una matriz cuadrada de orden n que tiene valores propios y tal que $A^2 = -I_n$.

Si λ es un valor propio de A entonces existirá un vector no nulo $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $Av = \lambda v$. Y, a partir de aquí,

$$Av = \lambda v \Rightarrow A(Av) = A(\lambda v) \Rightarrow A^2 v = \lambda(Av) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v \Rightarrow$$

$$(-I_n)v = \lambda^2 v \Rightarrow -v = \lambda^2 v \Rightarrow \lambda^2 v + v = 0 \Rightarrow (\lambda^2 + 1)v = 0.$$

Ahora bien, como v es no nulo, entonces $\lambda^2 + 1 = 0$, es decir, $\lambda^2 = -1$, lo cual no es posible pues el cuadrado de cualquier número real es no negativo.

Así pues, en las condiciones del enunciado, es cierto que A no tiene valores propios (reales).

iv) En este caso nos piden comprobar si es cierta la doble implicación

$$A \text{ es regular} \Leftrightarrow A \text{ no admite a } 0 \text{ como valor propio}$$

siendo A una matriz cuadrada.

$\Rightarrow$) Supongamos que A es una matriz cuadrada de orden n y regular, es decir, A es cuadrada e invertible. Por otra parte, supongamos que $\lambda = 0$ es un valor propio. Entonces existirá un vector no nulo $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $Av = 0v = 0$. Pero, por ser A invertible, tenemos que $v = A^{-1}0 = 0$, lo que contradice que v sea no nulo. Por tanto, A no puede admitir a 0 como valor propio.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que A es una matriz cuadrada (de orden n) que no admite a $\lambda = 0$ como valor propio. Entonces no pueden existir vectores no nulos $v \in \mathbb{R}^n$ tales que $Av = 0v = 0$. Esto significa que el sistema $AX = 0$ ha de ser compatible determinado y, por tanto, A ha de tener rango máximo. En particular, por ser A cuadrada, A será invertible.

vi) Supongamos que A es una matriz cuadrada con un valor propio λ. Entonces existirá un vector no nulo v tal que $Av = \lambda v$. A partir de aquí, es claro que

$$A^2v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v \Rightarrow A^2 v = \lambda^2 v,$$

es decir, λ^2 será un valor propio de A^2.

Por hipótesis de inducción, supongamos que λ^n es un valor propio de A^n. Entonces,

$$A^{n+1}v = A(A^n v) = A(\lambda^n v) = \lambda^n(Av) = \lambda^n(\lambda v) = \lambda^{n+1}v \Rightarrow A^{n+1}v = \lambda^{n+1}v,$$

es decir, λ^{n+1} será un valor propio de A^{n+1}.

Así hemos probado, por medio del método de inducción, que la afirmación hecha es cierta.

vii) Supongamos que A una matriz regular (esto es, invertible) y que λ es un valor propio suyo. Entonces, por el apartado *iv*), sabemos que $\lambda \neq 0$. Además, existirá un vector no nulo v tal que $Av = \lambda v$. Puesto que A es invertible y $\lambda \neq 0$, tenemos que

$$Av = \lambda v \Rightarrow v = A^{-1}(\lambda v) = \lambda A^{-1}v \Rightarrow \frac{1}{\lambda}v = A^{-1}v \Rightarrow A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v.$$

O sea, ya que v es un vector no nulo, es cierto que el número $\frac{1}{\lambda}$ es un valor propio de la matriz A^{-1}.

viii) Supongamos que A es una matriz cuadrada y que $\lambda \geq 0$ es un valor propio de A^2. Entonces existirá un vector no nulo v tal que $A^2v = \lambda v$. A partir de aquí, siendo I la matriz identidad del mismo orden que A,

$$A^2v = \lambda v \Rightarrow (A^2 - \lambda I)v = 0 \Rightarrow (A + \sqrt{\lambda}I)(A - \sqrt{\lambda}I)v = 0.$$

Ahora bien, podría ser que $(A - \sqrt{\lambda}I)v = 0$ y, en tal caso,

$$(A - \sqrt{\lambda}I)v = 0 \Rightarrow Av = \sqrt{\lambda}v,$$

por lo que, por ser v un vector no nulo, podemos concluir que $\sqrt{\lambda}$ es un valor propio de A.

También podría ocurrir que $w = (A - \sqrt{\lambda}I)v$ fuera un vector no nulo. Pero, en tal caso,

$$(A + \sqrt{\lambda}I)(A - \sqrt{\lambda}I)v = 0 \Rightarrow (A + \sqrt{\lambda}I)w = 0 \Rightarrow Aw = -\sqrt{\lambda}w,$$

por lo que, al ser w un vector no nulo, podemos concluir que $-\sqrt{\lambda}$ es un valor propio de A.

Al no haber más casos posibles, queda probado que la afirmación hecha es cierta.

Ejercicio 4.6.iii

Enunciado

Diagonaliza, mediante semejanza ortogonal, la matriz simétrica

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resolución

Sabemos que las matrices simétricas son siempre diagonalizables. Además, siempre se puede conseguir una diagonalización por semejanza ortogonal, es decir, $C = P \cdot D \cdot P^{-1}$ de forma que $P^{-1} = P^T$. Para ello, los vectores propios que formen la matriz P deberán ser ortonormales.

Empezamos hallando el polinomio característico de C.

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4).$$

A continuación resolvemos la ecuación característica asociada a C.

$$p(\lambda) = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 4 \text{ y } \lambda_3 = -1.$$

Ahora calculemos los subespacios propios asociados a $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$ y $\lambda_3 = -1$. Para $\lambda_1 = 2$, tomando $v_1 = (x, y, z)$ y la matriz identidad de orden tres I_3.

$$Cv_1 = \lambda_1 v_1 \Rightarrow (C - \lambda_1 I_3)v_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3-2 & 0 & 2 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 2 & 0 & 0-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x + 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ 2x - 2z = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x + 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ 3x = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = \alpha, & \alpha \in \mathbb{R}. \\ z = 0, \end{cases}$$

Por tanto, el subespacio propio asociado a $\lambda_1 = 2$ es $V_1 = \{(0, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = L(\{(0, 1, 0)\})$.

Análogamente calculamos los subespacios propios asociados a $\lambda_2 = 4$ y $\lambda_3 = -1$. Veámoslo.

$$Cv_2 = \lambda_2 v_2 \Rightarrow (C - \lambda_2 I_3)v_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3-4 & 0 & 2 \\ 0 & 2-4 & 0 \\ 2 & 0 & 0-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -x + 2z = 0 \\ -2y = 0 \\ 2x - 4z = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -x + 2z = 0 \\ y = 0 \\ 0 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\alpha, \\ y = 0, & \alpha \in \mathbb{R}. \\ z = \alpha, \end{cases}$$

Por tanto, el subespacio propio asociado a $\lambda_2 = 4$ es $V_2 = \{(2\alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = L(\{(2, 0, 1)\})$.

$$Cv_3 = \lambda_2 v_3 \Rightarrow (C - \lambda_3 I_3)v_3 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3-(-1) & 0 & 2 \\ 0 & 2-(-1) & 0 \\ 2 & 0 & 0-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 4x + 2z = 0 \\ 3y = 0 \\ 2x + z = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x + z = 0 \\ y = 0 \\ 0 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha, \\ y = 0, & \alpha \in \mathbb{R}. \\ z = -2\alpha, \end{cases}$$

Por tanto, el subespacio propio asociado a $\lambda_3 = -1$ es $V_3 = \{(\alpha, 0, -2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = L(\{(1, 0, -2)\})$.

Como tenemos tres valores propios reales simples, entonces podemos asociarle a cada uno de ellos un vector propio, de forma que los tres vectores así obtenidos son linealmente independientes (¡compruébese que en efecto son linealmente independientes!).

$$v_1 = (0, 1, 0), \quad v_2 = (2, 0, 1), \quad v_3 = (1, 0, -2).$$

Es inmediato que v_1, v_2, v_3 son tres vectores ortogonales entre sí. Como necesitamos que formen un sistema ortonormal, solo falta normalizarlos.

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(0,1,0)}{\|(0,1,0)\|} = \frac{(0,1,0)}{1} = (0,1,0);$$

$$w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{(2,0,1)}{\|(2,0,1)\|} = \frac{(2,0,1)}{\sqrt{5}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right);$$

$$w_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{(1,0,-2)}{\|(1,0,-2)\|} = \frac{(1,0,-2)}{\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right).$$

Por tanto, C es diagonalizable y la expresión asociada es $C = P \cdot D \cdot P^{-1}$ con

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, como $P^{-1} = P^T$ (¡compruébese!), tenemos que $C = P \cdot D \cdot P^T$, esto es, C es diagonalizable por semejanza ortogonal.

Ejercicio 4.8

Enunciado

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, calcula A^{10}.

Resolución

Haciendo los oportunos cálculos (¡háganse!) tenemos que A admite como valores propios $\lambda_1 = 1$ doble y $\lambda_2 = 2$ simple. Además, los subespacios propios respectivos son

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\} = \{(\alpha+\beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,1,0),(1,0,1)\});$$

$$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -y - z = 0,\ -x + y = 0\} = \{(\alpha, \alpha, -\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,1,-1)\}).$$

Por tanto,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, como $A^{10} = P \cdot D^{10} \cdot P^{-1}$,

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{10} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1024 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1024 & -1023 & -1023 \\ 1023 & -1022 & -1023 \\ -1023 & 1023 & 1024 \end{pmatrix}.$$