Asignatura: MATEMÁTICA APLICADA – **Curso: 2022–2023**

Ejercicios desarrollados - Tema 1

El objetivo principal de este documento es comprender que la resolución de un ejercicio no consiste en una simple sucesión de cálculos. Al contrario, un ejercicio debe contener explicaciones sobre **qué se va a hacer, cómo se va a hacer y, quizás lo más importante, por qué se va a hacer lo que se hace**.

Ejercicio 1.3

Enunciado

Contesta razonadamente si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden tales que $AB = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$.

b) Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden, de forma que A es invertible y $AB = 0$, entonces $B = 0$.

c) Para cualesquiera dos matrices cuadradas del mismo orden A y B se cumple

$$(AB)^2 = A^2B^2.$$

d) La suma de dos matrices regulares vuelve a ser regular.

e) El producto de dos matrices regulares también es regular.

f) Si $A \in \mathcal{M}_{3\times4}(\mathbb{R})$ y $\text{rango}(A) = 3$, entonces A es equivalente (por filas) a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

g) Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden. Entonces

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

h) Si A es una matriz cuadrada de forma que $A^2 = 0$, entonces $A = 0$.

i) Existe A es una matriz cuadrada regular de forma que $\det\left(A^2\right) = 0$.

j) Siempre es posible multiplicar una matriz por su traspuesta.

k) Con el método de Gauss se transforma un sistema de ecuaciones lineales en otro equivalente cuya matriz de coeficientes es triangular.

l) No existe una matriz que sea simétrica y antisimétrica[1].

m) Si A es una matriz cuadrada regular de orden n, entonces $A + I_n$ también es regular, ya que la identidad es una matriz regular.

n) Si A y B son matrices de igual rango y dimensión, entonces

$$\text{rango}(A + B) = \text{rango}(A) = \text{rango}(B).$$

Resolución

[1] Recuerda que una matriz cuadrada A es *simétrica* si $A^T = A$ y que es *antisimétrica* si $A^T = -A$.

a) FALSO: veamos dos ejemplos en los que ni A ni B son la matriz nula y, sin embargo, $AB = 0$.

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) VERDADERO: por el enunciado existe A^{-1}, de donde

$$AB = 0 \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}0 \Rightarrow (A^{-1}A)B = 0 \Rightarrow IB = 0 \Rightarrow B = 0.$$

c) FALSO: aunque hay casos en los que se da la igualdad propuesta[2], en general no es cierta, como se puede ver en el siguiente ejemplo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Rightarrow$$

$$(AB)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; A^2B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

d) FALSO: si sumamos una matriz regular con su opuesta, entonces obtenemos la matriz nula que, claramente, no es regular.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ son regulares. Pero } A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ no es regular.}$$

e) VERDADERO: Este es el Resultado 2.7 del Tema 1 (transparencia 16/94).

f) FALSO: si $A \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ y rango$(A) = 3$, entonces A puede ser equivalente (por filas) a una de las cuatro siguientes matrices.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

g) FALSO: en general la igualdad propuesta no es cierta, como se puede comprobar tomando las matrices del apartado *c)* (¡compruébese!).

h) FALSO: como se puede comprobar con el siguiente ejemplo.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

i) FALSO: si una matriz es regular, entonces $\det(A) \neq 0$.

En efecto, si A es regular entonces tiene inversa, de donde

$$AA^{-1} = I \;\Rightarrow\; \det\left(AA^{-1}\right) = \det(I) \;\Rightarrow\; \det(A)\det\left(A^{-1}\right) = \det(I) = 1.$$

Por tanto, se deduce que el determinante de A y el de su inversa son no nulos (además, son inversos el uno del otro). Finalmente, como $\det\left(A^2\right) = (\det(A))^2$, podemos concluir que $\det(A) \neq 0$.

j) VERDADERO: si $A \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})$, entonces es claro que $A^T \in \mathcal{M}_{q\times p}(\mathbb{R})$. Así, $AA^T \in \mathcal{M}_{p\times p}(\mathbb{R})$ y $A^TA \in \mathcal{M}_{q\times q}(\mathbb{R})$.

[2]Por ejemplo, si tomamos A y B matrices diagonales, entonces sí se verifica que $(AB)^2 = A^2B^2$.

k) VERDADERO: asumiendo que el sistema tiene el mismo número de ecuaciones e incógnitas (para que la matriz de coeficientes asociada sea cuadrada), los pivotes han de estar en la diagonal o “hacia la derecha” de esta, lo que implica que tenemos una matriz triangular (superior).

Para sistemas con distinto número de ecuaciones e incógnitas, el resultado se puede considerar también verdadero suponiendo que la diagonal (principal) de la matriz es la determinada por los elementos de la forma a_{ii}.

l) VERDADERO: las matrices (cuadradas) nulas son simétricas y antisimétricas. De hecho, las matrices nulas son las únicas simétricas y antisimétricas simultáneamente .

m) FALSO: por ejemplo, si tomamos $A = -I_n$, entonces $A + I_n = 0$ que, claramente, no es regular.

n) FALSO: si tomamos $A = I_n$ y $B = -I_n$, entonces rango(A) = rango$(B) = 2$. Sin embargo $A+B = 0$ y rango$(A + B)$ = rango$(0) = 0$.

Ejercicio 1.6

Enunciado

Si A es una matriz cuadrada tal que $A^2 - 3A + I = 0$, demuestra que A es invertible y calcula la inversa.

Resolución

A partir del enunciado,

$$A^2 - 3A + I = 0 \;\Rightarrow\; -A^2 + 3A = I \;\Rightarrow\; -A^2 + 3AI = I \;\Rightarrow\; A\,(-A + 3I) = I.$$

$$A^2 - 3A + I = 0 \;\Rightarrow\; -A^2 + 3A = I \;\Rightarrow\; -A^2 + 3IA = I \;\Rightarrow\; (-A + 3I)\,A = I.$$

Por tanto, A es invertible con inversa $A^{-1} = -A + 3I$.

Ejercicio 1.9

Enunciado

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

demuestra que A^3 es la matriz nula y que $A^2 + A + I_3$ es la matriz inversa de $I_3 - A$.

Resolución

Que $A^3 = 0$ es un simple cálculo, por lo que se deja para el lector.

Para comprobar que $A^2 + A + I_3$ es la matriz inversa de $I_3 - A$ se puede hacer directamente, esto es, calculando ambas expresiones y viendo que $(A^2 + A + I_3)(I_3 - A) = (I_3 - A)(A^2 + A + I_3) = I_3$. Esto también se deja para el lector.

Veamos como justificar que $A^2 + A + I_3$ es la matriz inversa de $I_3 - A$ sin calcular estas dos matrices. Teniendo en cuenta que $A^3 = 0$:

$$(A^2+A+I_3)(I_3-A) = A^2I_3 - A^2A + AI_3 - AA + I_3I_3 - I_3A = A^2 - A^3 + A - A^2 + I_3 - A = -A^3 + I_3 = I_3.$$

$$(I_3-A)(A^2+A+I_3) = I_3A^2 + I_3A + I_3I_3 - AA^2 - AA - AI_3 = A^2 + A + I_3 - A^3 - A^2 - A = I_3 - A^3 = I_3.$$

Queda así probado que A^2+A+I_3 es la inversa de I_3-A (y viceversa, I_3-A es la inversa de A^2+A+I_3).

Ejercicio 1.12

Enunciado

a) ¿Puede ser incompatible un sistema de dos ecuaciones lineales y tres incógnitas? ¿Y compatible determinado?

b) ¿Existe la posibilidad de encontrar un sistema de dos ecuaciones lineales con cuatro incógnitas que sea incompatible?

c) ¿Hay algún sistema con tres ecuaciones lineales y dos incógnitas que sea compatible determinado?

d) ¿Es cierto que un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, siendo $m > n$, nunca es compatible determinado?

e) ¿Podemos encontrar un sistema de dos ecuaciones lineales y dos incógnitas que posea únicamente las soluciones $(1, 2)$ y $(8, 9)$? ¿Y las soluciones $(0, 0)$ y $(-1, 1)$?

f) Si en un sistema de ecuaciones lineales compatible determinado cambiamos los términos independientes por otros cualesquiera, el nuevo sistema vuelve a ser compatible determinado.

g) Si un sistema de ecuaciones lineales es incompatible, siempre es posible cambiar los términos independientes por otros de manera que sea compatible determinado.

Resolución

a) Un sistema de dos ecuaciones lineales y tres incógnitas puede ser incompatible, como el del siguiente ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}.$$

Por otro lado, un sistema de dos ecuaciones lineales y tres incógnitas nunca puede ser compatible determinado. Esto es así pues, al tener solo dos ecuaciones, la matriz de coeficientes asociada puede tener un rango máximo igual a dos y, como el número de incógnitas es tres, una de ellas no tendrá un pivote en su columna. En conclusión, si el sistema es compatible, deberá ser indeterminado (pues la incógnita sin pivote en su columna podrá tomar cualquier valor).

b) Sí, podemos tomar dos ecuaciones que tengan los mismos coeficientes pero distintos términos independientes. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=1 \end{array}\right\}.$$

c) Si, basta con considerar un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas que sea compatible determinado y añadirle, por ejemplo, la ecuación obtenida como suma de las dos anteriores. El sistema resultante seguirá siendo compatible determinado.

Veamos un ejemplo concreto.

$$\left.\begin{array}{r} x+y=2 \\ y=1 \\ x+2y=3 \end{array}\right\}.$$

d) En el apartado anterior hemos visto que existen sistemas compatibles determinados con $m = 3$ y $n = 2$. Por tanto, si es posible que, siendo $m > n$, haya sistemas compatibles determinados con m ecuaciones lineales y n incógnitas.

e) Es imposible encontrar sistemas de dos ecuaciones lineales y dos incógnitas que posean únicamente dos soluciones.

De hecho, si un sistema lineal de dos ecuaciones lineales y dos incógnitas admite dos soluciones (x_1, x_2) e (y_1, y_2), entonces también serán solución de dicho sistema todos los puntos que pertenezcan a la recta dada por (x_1, x_2) e (y_1, y_2).

f) Si el sistema compatible determinado original tiene el mismo número de ecuaciones e incógnitas, entonces siempre se obtendrá otro sistema compatible determinado al cambiar los términos independientes. Esto es así, pues en ambos sistemas la matriz de coeficientes será la misma y con rango igual al número de incógnitas.

Sin embargo, si el número de ecuaciones es mayor que el de incógnitas, entonces se puede conseguir un sistema incompatible. En el siguiente ejemplo el primer sistema es compatible determinado y el segundo es incompatible.

$$\left.\begin{array}{c} x+y=2 \\ y=1 \\ x+2y=3 \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{c} x+y=2 \\ y=1 \\ x+2y=4 \end{array}\right\}.$$

Eso sí, si el número de ecuaciones es mayor que el de incógnitas, entonces nunca puede conseguirse uno que sea compatible indeterminado. El motivo es que la matriz de coeficientes será siempre la misma y con rango igual al número de incógnitas.

g) Para que un sistema de ecuaciones lineales incompatible pueda transformarse en un sistema compatible determinado (cambiando los términos independientes) es necesario que el número de ecuaciones sea mayor que el número de incógnitas.

Si un sistema de ecuaciones lineales incompatible tiene un número de ecuaciones menor o igual que el número de incógnitas, entonces (cambiando los términos independientes) solo podremos conseguir un sistema compatible indeterminado.

La razón em ambos casos es que, en un sistema compatible determinado, la matriz de coeficientes asociada ha de tener rango igual al número de incógnitas, lo cual es posible solo si dicha matriz tiene un número de filas igual o mayor que el número de incógnitas.