Asignatura: MATEMÁTICA APLICADA – Curso: 2022–2023

Ejercicios desarrollados - Tema 1 (T2)

El objetivo principal de estas notas es comprender que la resolución de un ejercicio no consiste en una simple sucesión de cálculos. Al contrario, un ejercicio debe contener explicaciones sobre **qué se va a hacer, cómo se va a hacer y, quizás lo más importante, por qué se va a hacer lo que se hace**.

Resolución de sistemas (Ejercicio 1.10)

Enunciado

Discute y resuelve, en los casos que proceda, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

a) $$\left.\begin{aligned} 3x+2y+z&=1\\ 5x+3y+3z&=2\\ x+y-z&=1 \end{aligned}\right\}$$

b) $$\left.\begin{aligned} 2x+y+z+w&=0\\ -4x-2y+z-6w&=7\\ 7x+3.5y+2z+8w&=9 \end{aligned}\right\}$$

c) $$\left.\begin{aligned} 3x+2y+5z-w&=49\\ 2x-y-z+w&=2\\ x+y-3z-2w&=-11\\ w&=0 \end{aligned}\right\}$$

Resolución

Para discutir y resolver los tres sistemas propuestos, usaremos notación matricial y aplicaremos eliminación gaussiana.

a) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned} 3x+2y+z&=1\\ 5x+3y+3z&=2\\ x+y-z&=1 \end{aligned}\right\}, \tag{1.1}$$

la matriz ampliada asociada es

$$(A\,|\,b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 3&2&1&1\\ 5&3&3&2\\ 1&1&-1&1 \end{array}\right).$$

Apliquemos eliminación gaussiana para obtener una matriz escalonada $(A'\,|\,b')$ equivalente.[1]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3&2&1&1\\ 5&3&3&2\\ 1&1&-1&1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&-1&1\\ 5&3&3&2\\ 3&2&1&1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-3F_1\to F_3]{F_2-5F_1\to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&-1&1\\ 0&-2&8&-3\\ 0&-1&4&-2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&-1&1\\ 0&-1&4&-2\\ 0&-2&8&-3 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2\to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&-1&1\\ 0&1&-4&2\\ 0&-2&8&-3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+2F_2\to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&-1&1\\ 0&1&-4&2\\ 0&0&0&1 \end{array}\right).$$

[1] La notación que usaremos es la siguiente:

- $F_i \leftrightarrow F_j$ significa que intercambiamos las filas F_i y F_j.
- $F_i+\alpha F_j \to F_i$ significa que sumamos α veces la fila F_j a la fila F_i para obtener la nueva fila F_i. Análogamente, $F_i-\alpha F_j \to F_i$ significa que restamos α veces la fila F_j a la fila F_i para obtener la nueva fila F_i.
- $\alpha F_i \to F_i$ significa que multiplicamos por α la fila F_i para obtener la nueva fila F_i.

Por tanto, hemos llegado a la matriz escalonada

$$(A' \mid b') = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

que es equivalente a la matriz $(A \mid b)$. Ahora bien, $(A' \mid b')$ tiene tres filas no nulas (o, lo que es lo mismo, tiene tres pivotes), por lo que su rango es igual a tres. Además, al estar el último pivote en la columna de los términos independientes, se verifica que

- la matriz de coeficientes del sistema (1.1) tiene rango igual a dos ($\mathrm{rg}(A) = 2$);
- la matriz ampliada asociada al sistema (1.1) tiene rango igual a tres ($\mathrm{rg}(A \mid b) = 3$).

Así, en virtud del Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema (1.1) es incompatible.

A la misma conclusión podíamos haber llegado teniendo en cuenta que $(A' \mid b')$ representa a un sistema de ecuaciones lineales equivalente a (1.1). Concretamente, el sistema de ecuaciones asociado a $(A' \mid b')$ es

$$\left.\begin{array}{r} x + y - z = 1 \\ y - 4z = 2 \\ 0x + 0y + 0z = 1 \end{array}\right\},$$

que claramente es incompatible ya que la última ecuación no tiene sentido (pues 0 y 1 son distintos).

b) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y + z + w = 0 \\ -4x - 2y + z - 6w = 7 \\ 7x + 3.5y + 2z + 8w = 9 \end{array}\right\}, \tag{1.2}$$

la matriz ampliada asociada es

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 & -6 & 7 \\ 7 & \frac{7}{2} & 2 & 8 & 9 \end{array}\right).$$

Apliquemos eliminación gaussiana para obtener una matriz escalonada $(A' \mid b')$ equivalente.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 & -6 & 7 \\ 7 & \frac{7}{2} & 2 & 8 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}F_1 \to F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -4 & -2 & 1 & -6 & 7 \\ 7 & \frac{7}{2} & 2 & 8 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - 7F_1 \to F_3]{F_2 + 4F_1 \to F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{9}{2} & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{2}{3}F_3 \to F_3]{\frac{1}{3}F_2 \to F_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{F3 + F_2 \to F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{25}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{3}{5}F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Por tanto, hemos llegado a la matriz escalonada

$$(A' \mid b') = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right),$$

que es equivalente a la matriz $(A \mid b)$. Ahora bien, $(A' \mid b')$ tiene tres filas no nulas (esto es, tiene tres pivotes), por lo que su rango es igual a tres. Además, ya que ninguno de los pivotes está en la columna de los términos independientes, se verifica que tanto la matriz de coeficientes como la matriz ampliada del sistema (1.2) tienen rango igual a tres ($\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid b) = 3$). Por consiguiente, aplicando el Teorema de Rouché-Frobenius, concluimos que el sistema (1.2) es compatible. Además, como dicho sistema tiene cuatro incógnitas, podemos asegurar que (1.2) tiene infinitas soluciones, o sea, que (1.2) es compatible indeterminado.

Para calcular el conjunto de soluciones de (1.2), y una vez hayamos determinado la incógnita libre, aplicaremos sustitución regresiva en el sistema asociado a la matriz $(A' \mid b')$.

Es claro que el sistema de ecuaciones asociado a la matriz $(A' \mid b')$ es

$$\left.\begin{aligned} 1x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2}w &= 0 \\ 1z - \tfrac{4}{3}w &= \tfrac{7}{3} \\ 1w &= 5 \end{aligned}\right\}.$$

Puesto que las incógnitas correspondientes a los pivotes son x, z, w, lo "más cómodo" será considerar a y como incógnita libre. De este modo, nos queda el sistema

$$\left.\begin{aligned} 1x + \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2}w &= -\tfrac{1}{2}y \\ 1z - \tfrac{4}{3}w &= \tfrac{7}{3} \\ 1w &= 5 \end{aligned}\right\}.$$

Ahora, tomando $y = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, y resolviendo de abajo arriba (esto es, en modo regresivo),

- $w = 5$.
- $z - \frac{4}{3}w = \frac{7}{3} \Rightarrow z = \frac{7}{3} + \frac{4}{3}w \Rightarrow z = \frac{7}{3} + \frac{4}{3} \cdot 5 \Rightarrow z = \frac{7}{3} + \frac{20}{3} = \frac{27}{3} \Rightarrow z = 9$.
- $x + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}w = -\frac{1}{2}y \Rightarrow x = -\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}w \Rightarrow x = -\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 5 \Rightarrow x = -\frac{\lambda}{2} - 7$.

Así pues, el conjunto de soluciones de (1.2) viene dado por

$$(x, y, z, w) = \left(-7 - \tfrac{\lambda}{2}, \lambda, 9, 5\right), \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Por cierto, se dice que este conjunto de soluciones es *uniparamétrico*, pues tenemos una solución para cada valor real del parámetro λ.

c) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y + 5z - w &= 49 \\ 2x - y - z + w &= 2 \\ x + y - 3z - 2w &= -11 \\ w &= 0 \end{aligned}\right\}, \tag{1.3}$$

la matriz ampliada asociada es

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 5 & -1 & 49 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Como en los apartados anteriores, aplicaremos eliminación gaussiana pero, en este caso, para obtener una matriz escalonada reducida $(A' \mid b')$ equivalente.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 5 & -1 & 49 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & -2 & -11 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & -1 & 49 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - 3F_1 \to F_3]{F_2 - 2F_1 \to F_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & -2 & -11 \\ 0 & -3 & 5 & 5 & 24 \\ 0 & -1 & 14 & 5 & 82 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & -2 & -11 \\ 0 & -1 & 14 & 5 & 82 \\ 0 & -3 & 5 & 5 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2 \to F_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & -2 & -11 \\ 0 & 1 & -14 & -5 & -82 \\ 0 & -3 & 5 & 5 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F3 + 3F_2 \to F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & -2 & -11 \\ 0 & 1 & -14 & -5 & -82 \\ 0 & 0 & -37 & -10 & -222 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{37}F_3 \to F_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & -2 & -11 \\ 0 & 1 & -14 & -5 & -82 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{37} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-\frac{10}{37}F_4\to F_3]{\substack{F_1+2F_4\to F_1\\ F_2+5F_4\to F_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -14 & 0 & -82 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2+14F_3\to F_2]{F_1+3F_3\to F_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-F_2\to F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Por tanto, hemos llegado a la matriz escalonada reducida

$$(A' \,|\, b') = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

que es equivalente a la matriz $(A\,|\,b)$. Puesto que $(A'\,|\,b')$ tiene cuatro filas no nulas (esto es, tiene cuatro pivotes), entonces su rango es igual a cuatro. Por otra parte, al no estar ninguno de los pivotes en la columna de los términos independientes, tenemos que la matriz de coeficientes y la matriz ampliada del sistema (1.3) tienen rango igual a cuatro ($\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A\,|\,b) = 4$). Así, por el Teorema de Rouché-Frobenius, deducimos que el sistema (1.3) es compatible. Además, como dicho sistema tiene cuatro incógnitas, podemos asegurar que (1.3) tiene una única solución, es decir, (1.3) es compatible determinado.

Finalmente, como $(A'\,|\,b')$ representa al sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{r} 1x = 5 \\ 1y = 2 \\ 1z = 6 \\ 1w = 0 \end{array}\right\},$$

y este es equivalente a (1.3), concluimos que la única solución de (1.3) es

$$(x, y, z, w) = (5, 2, 6, 0).$$