LA FACTORIZACIÓN LU Y LA MATRIZ INVERSA

MATEMÁTICAS II – GRADO EN INGENIERÍA DE QUÍMICA

(16 de marzo de 2012)

La intención de este complemento (a los apuntes del curso) es comprender por qué el método de eliminación gaussiana permite realizar factorizaciones LU. De paso se justifica un método (quizás conocido) para el cálculo de la inversa de una matriz dada.

En todo lo que sigue se entiende que

- las matrices son del orden adecuado para que los productos tengan sentido;
- si hablamos de la inversa de una matriz es porque sabemos que la inversa existe;
- I es la matriz identidad y será siempre del orden adecuado para que las operaciones tengan sentido.

1. Expresión matricial de la eliminación gaussiana y de la factorización LU

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para hacer ceros por debajo de la diagonal aplicamos el método de eliminación gaussiana (en lo que sigue F_i indicará la fila i-ésima):

1. Restando (en A) $\frac{-1}{2}F_1$ a F_2 y $\frac{3}{2}F_1$ a F_3, obtenemos la matriz

$$U_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{-3}{2} & -2 \\ 0 & \frac{-11}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Restando (en U_1) $\frac{\frac{-11}{2}}{\frac{-3}{2}}F_2$ (es decir, $\frac{11}{3}F_2$) a F_3, obtenemos la matriz

$$U_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{-3}{2} & -2 \\ 0 & 0 & \frac{16}{3} \end{pmatrix},$$

que ya es triangular superior.

En este ejemplo hemos dado dos pasos que pueden ser expresados mediante el producto de matrices.

1. Restar $\frac{-1}{2}F_1$ a F_2 y $\frac{3}{2}F_1$ a F_3 equivale a multiplicar (por la izquierda) por la matriz

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 1: Comprueba que $L_1 \cdot A = U_1$.

2. Restar $\frac{11}{3}F_2$ a F_3 equivale a multiplicar (por la izquierda) por la matriz

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{11}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2: Comprueba que $L_2 \cdot U_1 = U_2$.

Es interesante observar que las matrices L_1 y L_2 se obtienen aplicando, a la matriz identidad, las operaciones por filas indicadas en cada caso.

De las igualdades $L_1 \cdot A = U_1$ y $L_2 \cdot U_1 = U_2$, deducimos que

$$L_2 \cdot U_1 = L_2 \cdot (L_1 \cdot A) = (L_2 \cdot L_1) \cdot A = U_2.$$

Pero, teniendo en cuenta que el producto de matrices triangulares inferiores da lugar a otra matriz triangular inferior, lo que hemos conseguido es la expresión

$$L^* \cdot A = U,$$

donde $L^* = L_2 \cdot L_1$ es triangular inferior y $U = U_2$ es triangular superior. Finalmente, puesto que la inversa de una matriz triangular inferior es otra matriz triangular inferior,

$$A = (L^*)^{-1} \cdot U.$$

Por tanto, si consideramos $L = (L^*)^{-1}$, tenemos una descomposición LU para A. Además, si revisamos los cálculos, vemos que U es fácil de obtener, pero ¿qué ocurre con L? Veamos que tampoco es muy difícil de calcular.

Si recordamos que la inversa del producto de dos matrices es el producto de las inversas "cambiadas de orden", tenemos que

$$L = (L^*)^{-1} = (L_2 \cdot L_1)^{-1} = (L_1)^{-1} \cdot (L_2)^{-1}.$$

Para justificar las expresiones de $(L_1)^{-1}$ y $(L_2)^{-1}$ debemos tener en cuenta qué significa que una matriz sea la inversa de otra. Veamos, si M y N son matrices inversas una de la otra, entonces

$$(M \cdot N) \cdot B = M \cdot (N \cdot B) = B$$

para cualquier matriz B. Es decir, tras multiplicar sucesivamente B por N y M tenemos de nuevo B, o sea, se puede decir que no hemos "hecho" nada.

Con tal interpretación de las matrices inversas, parece claro que la inversa de L_1 ha de ser una matriz que haga lo contrario que ella misma, esto es, una matriz que nos permita pasar de U_1 a A: hacemos desaparecer los ceros de la primera columna de U_1 para recuperar la primera columna de A. Para ello, necesitamos sumar $\frac{-1}{2}F_1$ a F_2 y $\frac{3}{2}F_1$ a F_3, lo cual equivale a multiplicar (por la izquierda) por la matriz

$$(L_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3: Comprueba que $(L_1)^{-1} \cdot L_1 = L_1 \cdot (L_1)^{-1} = I$ y que $(L_1)^{-1} \cdot U_1 = A$.

Razonando de la misma forma, para la inversa de L_2 necesitamos sumar $\frac{11}{3}F_2$ a F_3, lo que equivale a multiplicar (por la izquierda) por la matriz

$$(L_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{11}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4: Comprueba que $(L_2)^{-1} \cdot L_2 = L_2 \cdot (L_2)^{-1} = I$ y que $(L_2)^{-1} \cdot U_2 = U_1$.

Ahora veamos cuál es el resultado de multiplicar las inversas de L_1 y L_2 (quizás la cuenta más sorprendente de este desarrollo):

$$(L_1)^{-1} \cdot (L_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{11}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{11}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Parece que basta con agrupar en una matriz la primera columna de $(L_1)^{-1}$ y la segunda columna de $(L_2)^{-1}$ (y añadir la última columna de cualquiera de ellas por ser la misma). En realidad, el producto anterior no tiene nada de sorprendente si se piensa que, al estar $(L_1)^{-1}$ a la izquierda de $(L_2)^{-1}$, lo que estamos haciendo es llevar a cabo en $(L_2)^{-1}$ las operaciones por filas indicadas por $(L_1)^{-1}$ (que, recordemos, son sumar $\frac{-1}{2}F_1$ a F_2 y sumar $\frac{3}{2}F_1$ a F_3).

Tenemos, pues, una manera bastante fácil de construir la factorización LU de Doolittle de una matriz dada. En el caso de la matriz A considerada,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} = (L^*)^{-1} \cdot U = (L_1)^{-1} \cdot (L_2)^{-1} \cdot U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{11}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{-3}{2} & -2 \\ 0 & 0 & \frac{16}{3} \end{pmatrix}.$$

Conviene señalar que el número de cuentas para realizar la factorización de Doolittle de esta manera es el mismo que el número de cuentas que son necesarias cuando se aplica el algoritmo visto para implementar en un ordenador. Sin embargo, esta forma de proceder es más inestable que la del algoritmo cuando se usan cálculos aproximados, esto es, es más susceptible a los errores de redondeo.

Para acabar esta sección, realicemos un ejemplo con matrices de orden 4×4. Sea la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Hacemos ceros en la primera columna de B restando $\frac{1}{2}F_1$ a F_2, $\frac{0}{2}F_1$ a F_3 y $\frac{2}{2}F_1$ a F_4, quedando la matriz $U_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

   Observemos que $L_1 \cdot B = U_1$ si tomamos $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Hacemos ceros en la segunda columna de U_1 restando $\frac{-1}{-\frac{3}{2}}F_2 \left(= \frac{2}{3}F_2\right)$ a F_3 y $\frac{2}{-\frac{3}{2}}F_2 \left(= -\frac{4}{3}F_2\right)$ a F_4, quedando la matriz $U_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 2 \end{pmatrix}$.

   Observemos que $L_2 \cdot U_1 = U_2$ si tomamos $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Por último, hacemos ceros en la tercera columna de U_2 restando $\frac{-\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}F_3\,(=-2F_3)$ a F_4, quedando la matriz $U_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, que ya es triangular superior.

   Observemos que $L_3 \cdot U_2 = U_3$ si tomamos $L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Concluimos que la factorización LU de Doolittle para la matriz B es la siguiente,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{4}{3} & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observemos que, para construir L, hemos tomado las tres entradas de la primera columna de L_1 que están debajo de la diagonal principal, las dos entradas de la segunda columna L_2 que también están debajo de la diagonal principal y la única entrada de la tercera columna de L_3 que está, de nuevo, debajo de la diagonal principal pero, y esto es muy importante, con signo cambiado.

2. Cómo obtener otras factorizaciones

Supongamos que deseamos obtener la factorización LU de Crout. ¿Podemos aprovechar el trabajo realizado en la sección anterior? La respuesta es sí, como veremos a continuación.

Recordemos que, en la factorización de Crout, es la matriz triangular superior la que tiene unos en la diagonal principal. Por tanto, si volvemos al caso de la matriz A vista anteriormente, necesitaríamos pasar de la matriz

$$U_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{-3}{2} & -2 \\ 0 & 0 & \frac{16}{3} \end{pmatrix}$$

a otra matriz con unos en la diagonal. Para ello, bastará con multiplicar F_1 por $\frac{1}{2}$, F_2 por -$\frac{2}{3}$ y F_3 por $\frac{3}{16}$, quedando la matriz

$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5: Comprueba que $U_3 = D \cdot U_2$, siendo $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{16} \end{pmatrix}$.

Ejercicio 6: Sea D la matriz del ejercicio 5. Comprueba que $D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{3} \end{pmatrix}$.

Teniendo en cuenta que $D \cdot D^{-1} = D^{-1} \cdot D = I$ (y que la matriz identidad I actúa en el producto de matrices como el 1 en el producto de números),

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} = L \cdot U = L \cdot I \cdot U = L \cdot D^{-1} \cdot D \cdot U = L_C \cdot U_C$$

y, así, $L_C \cdot U_C$ es la factorización de Crout al tomar $L_C = L \cdot D^{-1}$ y $U_C = D \cdot U$. Por tanto,

$$L_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{11}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 3 & -\frac{11}{2} & \frac{16}{3} \end{pmatrix},$$

$$U_C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{16} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{-3}{2} & -2 \\ 0 & 0 & \frac{16}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 7: Comprueba que $A = L_C \cdot U_C$.

Para la matriz B de orden 4×4 que consideramos en la sección anterior, puesto que la factorización de Doolittle es

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{4}{3} & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

tomando la matriz $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, la descomposición de Crout será $B = L_C \cdot U_C$ con

$$L_C = L \cdot D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{4}{3} & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 2 & 2 & -\frac{4}{3} & 2 \end{pmatrix},$$

$$U_C = D \cdot U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 8: Comprueba que $B = L_C \cdot U_C$.

A la vista de lo realizado con las matrices A y B para obtener la factorización de Crout, es claro que podríamos haber escogido otras matrices diagonales y, de esta manera, obtendríamos diferentes factorizaciones. Por ejemplo, con $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, a partir de la factorización de Doolittle de A,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{11}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{-3}{2} & -2 \\ 0 & 0 & \frac{16}{3} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{11}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{-3}{2} & -2 \\ 0 & 0 & \frac{16}{3} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{11}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

y conseguimos una factorización en la que la matriz triangular superior no contiene fracciones.

3. Un método para calcular la inversa de una matriz

En esta sección vamos a justificar el funcionamiento de un método (quizás conocido) que está basado en la eliminación gaussiana y que permite calcular matrices inversas. La idea de este método es aplicar eliminación gaussiana para hacer ceros tanto por debajo como por encima de la diagonal y, además, conseguir que todos los elementos de la diagonal sean igual a uno.

Consideremos la matriz A vista en las secciones anteriores para describir dicho método. Además, para ser más prácticos, las operaciones que se vayan realizando sobre A también se aplican a la matriz identidad I. Para simplificar el proceso, se yuxtaponen la matriz A y la matriz identidad de la siguiente forma,

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Empezamos haciendo ceros en A por debajo de la diagonal. Para ello, primero restamos $\frac{-1}{2}F_1$ a F_2 y $\frac{3}{2}F_1$ a F_3, operando sobre las filas de A e I conjuntamente, y tenemos

$$(M_1 \mid N_1) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2} & -2 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-11}{2} & -2 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right).$$

A continuación, restamos $\frac{11}{3}F_2$ a F_3 para obtener la matriz

$$(M_2 \mid N_2) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2} & -2 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{3} & -\frac{10}{3} & -\frac{11}{3} & 1 \end{array}\right).$$

Ejercicio 9: Comprueba que estas mismas operaciones ya las hicimos antes (aunque sólo sobre A y con los nombres de las matrices cambiados).

Ejercicio 10: Tomando $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{11}{3} & 1 \end{pmatrix}$, comprueba que $M_1 = L_1 \cdot A$, $V_1 = L_1 \cdot I$, $M_2 = L_2 \cdot M_1$ y $N_2 = L_2 \cdot N_1$.

Ahora vamos a hacer ceros en M_2 por encima de la diagonal. Primero en la tercera columna y después en la segunda. Por tanto, empezamos restando $\frac{3}{8}F_3$ a F_1 y $-\frac{3}{8}F_3$ a F_2 y obtenemos

$$(M_3 \mid N_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & \frac{9}{4} & \frac{11}{8} & -\frac{3}{8} \\ 0 & \frac{-3}{2} & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & \frac{16}{3} & -\frac{10}{3} & -\frac{11}{3} & 1 \end{array}\right).$$

Y restando $-\frac{2}{3}F_2$ a F_1 queda

$$(M_4 \mid N_4) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & \frac{-3}{2} & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & \frac{16}{3} & -\frac{10}{3} & -\frac{11}{3} & 1 \end{array}\right).$$

Ejercicio 11: Tomando $U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{8} \\ 0 & 1 & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $U_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, comprueba que $M_3 = U_1 \cdot M_2$, $N_3 = U_1 \cdot N_2$, $M_4 = U_2 \cdot M_3$ y $N_4 = U_2 \cdot N_3$.

Para acabar tenemos que hacer unos en la diagonal de M_4. Para ello, hacemos $\frac{1}{2}F_1$, $-\frac{2}{3}F_2$ y $\frac{3}{16}F_3$,

$$(M_5 \mid N_5) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{8} & \frac{9}{16} & -\frac{1}{16} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{8} & -\frac{11}{16} & \frac{3}{16} \end{array}\right).$$

Hemos alcanzado nuestro objetivo pues M_5 es la matriz identidad.

Ejercicio 12: Tomando $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{16} \end{pmatrix}$, comprueba que $M_5 = I = D \cdot M_4$, $N_5 = D \cdot N_4$.

Ejercicio 13: Comprueba que $A \cdot N_5 = N_5 \cdot A = I$.

Vamos a justificar por qué este método nos proporciona la matriz inversa de A. Por una lado,

$$I = M_5 = D \cdot M_4 = D \cdot U_2 \cdot M_3 = D \cdot U_2 \cdot U_1 \cdot M_2 = D \cdot U_2 \cdot U_1 \cdot L_2 \cdot M_1 = D \cdot U_2 \cdot U_1 \cdot L_2 \cdot L_1 \cdot A.$$

Por tanto, $D \cdot U_2 \cdot U_1 \cdot L_2 \cdot L_1$ es la inversa de A. Pero, por otro lado,

$$N_5 = D \cdot N_4 = D \cdot U_2 \cdot N_3 = D \cdot U_2 \cdot U_1 \cdot N_2 = D \cdot U_2 \cdot U_1 \cdot L_2 \cdot N_1 = D \cdot U_2 \cdot U_1 \cdot L_2 \cdot L_1 \cdot I,$$

es decir, $N_5 = D \cdot U_2 \cdot U_1 \cdot L_2 \cdot L_1$ es la inversa de A.

Nota 3.1. Con respecto a lo hecho para la matriz A, debemos tener en cuenta una serie de consideraciones

1. En algunos textos, antes de hacer los ceros por encima de la diagonal principal, se convierten los elementos de la diagonal principal en unos. Como se puede ver en el Ejemplo 3.2, el resultado final es el mismo y la justificación de la validez del proceso es análoga a la realizada en el párrafo precedente.
2. En algunas matrices hay que realizar cambios de filas para poder conseguir elementos distintos de cero en la diagonal principal. El método de obtención de la inversa sigue siendo válido y en la justificación del proceso se emplean las llamadas “matrices de transposición”. Se verá esta situación en el Ejemplo 3.3.

Ejemplo 3.2. Recordemos los dos primeros pasos dados en el cálculo de la inversa de A,

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Primero restamos $\frac{-1}{2}F_1$ a F_2 y $\frac{3}{2}F_1$ a F_3,

$$(M_1 \mid N_1) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2} & -2 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-11}{2} & -2 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right).$$

A continuación, restamos $\frac{11}{3}F_2$ a F_3,

$$(M_2 \mid N_2) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2} & -2 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{3} & -\frac{10}{3} & -\frac{11}{3} & 1 \end{array}\right).$$

Ahora, en lugar de hacer ceros por encima de la diagonal principal (de M_2), vamos a hacer unos en esta diagonal. Para ello, consideramos $\frac{1}{2}F_1$, $-\frac{2}{3}F_2$ y $\frac{3}{16}F_3$,

$$\left(M_3' \mid N_3'\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{8} & -\frac{11}{16} & \frac{3}{16} \end{array}\right).$$

Hacemos ceros en la tercera columna tomando $F_1 - F_3$ y $F_2 - \frac{4}{3}F_3$,

$$\left(M_4' \mid N_4'\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{9}{8} & \frac{11}{16} & -\frac{3}{16} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{8} & -\frac{11}{16} & \frac{3}{16} \end{array}\right).$$

Acabamos haciendo ceros en la segunda columna mediante la operación $F_1 - \frac{1}{2}F_2$,

$$\left(M_5' \mid N_5'\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{8} & \frac{9}{16} & -\frac{1}{16} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{8} & -\frac{11}{16} & \frac{3}{16} \end{array}\right).$$

Por consiguiente, la inversa de A es la matriz N_5' que, como no puede ser de otra manera, coincide con la obtenida anteriormente.

Ejemplo 3.3. Veamos un ejemplo en el que, para calcular la inversa, es necesario realizar un cambio de filas. Para ello, consideramos la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Para empezar escribimos

$$(C \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Hacemos ceros en la primera columna con $F_2 - F_1$ y $F_3 - \frac{1}{2}F_1$,

$$(M_1 \mid N_1) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right).$$

En este momento necesitamos hacer un cambio de filas para poder seguir operando. Concretamente tenemos que intercambiar la segunda y tercera filas, lo que expresaremos de la forma $F_2 \leftrightarrow F_3$.

$$(M_2 \mid N_2) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Hacemos ceros en la tercera columna con $F_1 + \frac{2}{5}F_3$ y $F_2 + \frac{2}{5}F_3$,

$$(M_3 \mid N_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{9}{10} & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Hacemos ceros en la segunda columna con $F_1 - 6F_2$,

$$(M_4 \mid N_4) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 6 & -2 & -6 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{9}{10} & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Finalmente, hacemos unos en la diagonal con $\frac{1}{2}F_1$, $2F_2$ y $-\frac{1}{5}F_3$,

$$(M_5 \mid N_5) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{9}{5} & \frac{4}{5} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \end{array}\right).$$

Concluimos que $N_5 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -\frac{9}{5} & \frac{4}{5} & 2 \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$ es la inversa de C.

Ejercicio 14: Comprueba que $C \cdot N_5 = N_5 \cdot C = I$.

Ejercicio 15: Comprueba la operación $F_2 \leftrightarrow F_3$ se puede expresar mediante la matriz (de transposición)

$$T_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comprueba que $M_2 = T_{23} \cdot M_1$ y $N_2 = T_{23} \cdot N_1$.

Ejercicio 16: Describe, por medio de matrices, todos los pasos dados para calcular la inversa de C.

Ejercicio 17: Repite el cálculo de la inversa de C pero haciendo unos en la diagonal principal antes de hacer ceros por encima de dicha diagonal.

(Observa que tienes que hacer los cálculos de nuevo a partir de $(M_2 \mid N_2)$).

Ejemplo 3.4. Para acabar, calculemos la inversa de la matriz B de orden 4×4 ya utilizada en las secciones anteriores. Partimos de la expresión

$$(B \mid I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Hacemos ceros (por debajo) en la primera columna restando $\frac{1}{2}F_1$ a F_2 y F_1 a F_4,

$$(M_1 \mid N_1) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Hacemos ceros (por debajo) en la segunda columna restando $\frac{2}{3}F_2$ a F_3 y $-\frac{4}{3}F_2$ a F_4,

$$(M_2 \mid N_2) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 2 & -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Hacemos ceros (por debajo) en la tercera columna restando $-2F_3$ a F_4,

$$(M_3 \mid N_3) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Hacemos ceros (por encima) en la cuarta columna restando $-\frac{1}{2}F_4$ a F_1 y $-\frac{3}{4}F_4$ a F_2,

$$(M_4 \mid N_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{4} & 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Hacemos ceros (por encima) en la tercera columna restando $\frac{3}{2}F_3$ a F_1 y $\frac{3}{4}F_3$ a F_2,

$$(M_5 \mid N_5) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Hacemos ceros (por encima) de la segunda columna restando $\frac{2}{3}F_2$ a F_1,

$$(M_6 \mid N_6) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Finalmente, hacemos unos en la diagonal principal tomando $\frac{1}{2}F_1$, $-\frac{2}{3}F_2$, $\frac{3}{2}F_3$ y $\frac{1}{2}F_4$,

$$(M_7 \mid N_7) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Por tanto, N_7 es la inversa de B.

Ejercicio 18: Comprueba que $B \cdot N_7 = N_7 \cdot B = I$.

Ejercicio 19: Describe, por medio de matrices, todos los pasos dados para calcular la inversa de B.

Ejercicio 20: Calcula, usando el método expuesto en esta sección, la inversa de la matriz

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$