Publicaciones del Dpto. de
Análisis Matemático
Sección 1; Núm. 51, 61–75

Actas del Colloquium 2003/2004

Avances recientes sobre la Propiedad de Dunford-Pettis Alternativa para C*-algebras y JB*-triples

Antonio M. Peralta

Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Ciencias
Universidad de Granada 18071 Granada
Spain.
aperalta@goliat.ugr.es

ABSTRACT

En la presente nota presentamos una serie de avances recientes en el estudio de la propiedad de Dunford-Pettis alternativa en el caso de C*-álgebras y JB*-triples. Un espacio de Banach X tiene la propiedad de Dunford-Pettis alternativa si y solo si para cualquier par de sucesiones débil convergentes $x_n \to x$ en X y $(\rho_n) \to 0$ en X^* con $\|x_n\| = \|x\| = 1$ se verifica que $\rho_n(x_n) \to 0$. En esta nota describimos totalmente las C*-álgebras y los JBW*-triples que verifican la propiedad de Dunford-Pettis alternativa.

Key words: Propiedad de Dunford-Pettis, Propiedad de Dunford-Pettis alternativa, C*-álgebra, JB*-triples.

2000 Mathematics Subject Classification: Primary 46B04, 46B20, 46L05, 46L10.

1. Introducción

En 1940 Dunford y Pettis [13] probaron que que cualquier operador débilmente compacto de $L^1(\mu)$ en cualquier otro espacio de Banach X aplica sucesiones débilmente de Cauchy en sucesiones convergentes en norma, esto es, todo operador débilmente compacto $T : L^1(\mu) \to X$ es completamente continuo. Posteriormente Grothendieck demostró que la misma conclusión sigue siendo cierta para operadores

Investigación parcialmente subvencionada por la D.G.I. proyecto no. BFM2002-01529, y el grupo de investigación FQM 0199 de la Junta de Andalucía

débilmente compactos de $C(\Omega)$ en cualquier espacio de Banach X (véase [15]). Se dice que un espacio de Banach X tiene la *propiedad de Dunford-Pettis* (en lo que sigue notada por DPP) si todo operador débilmente compacto de X en cualquier espacio de Banach es completamente continuo.

Gracias al Teorema de Gelfand-Naimark conmutativo sabemos que toda C*-álgebra conmutativa con unidad es de la forma $C(\Omega)$, para cierto espacio compacto Hausdorff Ω. El problema de ver si toda C*-álgebra satisface la propiedad DPP estuvo abierto durante mucho tiempo. En [8], Chu e Iochum obtuvieron una caracterización de la propiedad DPP en términos del producto de una C*-álgebra. Otro de los principales resultados obtenidos por Chu e Iochum fue la descripción de las álgebras de von Neumann (C*-álgebras que son además espacios de Banach duales) que satisfacen la propiedad DPP. Concretamente, Chu e Iochum probaron que un álgebra de von Neumann A satisface la propiedad DPP si, y solo si, A es una ℓ_∞-suma finita de álgebras de von Neumann de tipo I_n, es decir, álgebras de la forma $C(\Omega)\otimes M_n(\mathbb{C})$, donde Ω es una espacio hiperstoneano y $M_n(\mathbb{C})$ denota el espacio de las matrices de orden n por n con entradas en $\mathbb{C}$ ($n \in \mathbb{N}$). Las álgebras de von Neumann cuyo predual satisface la propiedad DPP fueron descritas por L. Bunce (ver [4]), mostrando que el predual de un álgebra de von Neumann A satisface la propiedad DPP si, y solo si, A es un álgebra de von Neumann de tipo I finita, es decir, A es una ℓ_∞-suma de álgebras de la forma $C(\Omega) \otimes M_n(\mathbb{C})$, donde Ω es una espacio hiperstoneano y $M_n(\mathbb{C})$ denota el espacio de las matrices de orden n por n con entradas en $\mathbb{C}$ ($n \in \mathbb{N}$).

En el caso de C*-algebras, los resultados obtenidos respectivamente por Chu e Iochum [9] y Hamana [17] permitieron concluir a Chu, Iochum y Watanabe en [9] que una C*-álgebra A satisface la propiedad DPP si, y solo si, A no admite representaciones irreducibles de dimensión infinita lo que también equivale a que el dual de A, A^*, satisface la propiedad DPP.

La siguiente caracterización de la propiedad DPP es también debida a Grothendieck. Un espacio de Banach X tiene la propiedad DPP si y solo si para cualquier par de sucesiones débil-nulas (x_n) en X y (ρ_n) en X^*, tenemos que $\rho_n(x_n) \to 0$. La demostración de esta caracterización se puede encontrar en el trabajo [12], el cual es un excelente survey sobre la propiedad DPP.

En 1997, W. Freedman (ver [14]) introdujo una versión más débil de la propiedad DPP, la propiedad de *Dunford-Pettis alternativa* (propiedad DP1 en lo sucesivo). Concretamente, un espacio de Banach X satisface la propiedad DP1 si y solo si para cualquier par de sucesiones débil convergentes $x_n \to x$ en X y $(\rho_n) \to 0$ en X^* con $\|x_n\| = \|x\| = 1$ se verifica que $\rho_n(x_n) \to 0$.

Al restringir las condiciones de la propiedad DPP a la esfera unidad de X, la propiedad DP1 permite una mayor libertad sobre el espacio X. En [14, Theorem 1.4], Freedman proporciona diversas caracterizaciones de la propiedad DP1 análogas a las dadas para la propiedad DPP en [12, páginas 17-18]. Claramente la propiedad DPP implica la DP1 y ambas propiedades son heredadas por subespacios complementados. No obstante, las diferencias entre las mencionadas propiedades comienzan a hacerse patentes en los siguientes casos. Por ejemplo, es conocido que un espacio de Banach X tiene la propiedad DPP siempre que X^* tiene dicha propiedad. Sin embargo, este hecho no es verdad para la propiedad DP1, más concretamente, el espacio $L^1(H) = K(H)^*$ de los operadores clases-traza sobre un espacio de Hilbert infinito dimensional H satisface la propiedad DP1 mientras que $K(H)$, el espacio de los operadores compactos en H no tiene dicha propiedad (ver [14, Remarks 1.2]). Otra importante diferencia es que, a diferencia de la propiedad DPP, la propiedad DP1 no se preserva mediante isomorfismos de espacios de Banach (ver [14, Example 1.6]). La propiedad DP1 es heredada por cualquier subtriple de un JB*-triple y por cualquier subalgebra de una C*-álgebra (ver [1, Corollary 1] y [14, Corollary 3.2], respectivamente).

El principal resultado obtenido por Freedman muestra que las propiedades DPP y DP1 son equivalentes en algebras de von Neumann [14, Theorem 3.5]. En este mismo trabajo Freedman conjeturó que las propiedades DP1 y DPP también coincidían en C*-álgebras y que el predual de toda álgebra de von Neumann podría satisfacer la propiedad DP1. Estas dos conjeturas han sido contestadas recientemente en [5] y [1, 6] en en el caso de C*-álgebras y JBW*-triples, respectivamente. Concretamente, en el ambiente de las C*-álgebras, se ha obtenido que las propiedades DPP y DP1 son equivalentes. Más aún, las álgebras de von Neumann cuyo predual satisface la propiedad DP1 están descritas por ser álgebras de von Neumann de tipo I [5, Theorems 2 y 6]. En el caso de un JBW*-triple la propiedad DP1 da un poco más de libertad que la propiedad DPP. Concretamente, un JBW*-triple W satisface la propiedad DP1 si, y solo si, o bien es isomorfo a un espacio de Hilbert complejo o bien satisface la propiedad DPP [1, Theorem 2]. Esta nota está dedicada a presentar de una forma unificada los disitintos avances obtenidos en el estudio de la propiedad DP1 en el caso de C*-álgebras y JB*-triples.

Si X es un espacio de Banach, notaremos mediante B_X, S_X y X^* a la bola unidad cerrada de X, la esfera unidad de X y el espacio dual de X, respectivamente.

2. Descripción de las C*-álgebras que poseen la propiedad DP1

En esta sección abordamos las dos conjeturas realizadas por W. Freedman para C*-álgebras que ya hemos comentado en la introducción. En primer lugar trataremos de ver la equivalencia entre las propiedades DPP y DP1 en el caso de una C*-álgebra. El propio Freedman demostró que en el caso de un álgebra de von Neumann ambas propiedades son equivalentes. Según sus propias palabras, "en una C*-álgebra en general esta equivalencia puede ser más difícil de probar debido a la escasez de resultados que sobre teoría de estructura existen para C*-álgebras en general" [14, Remark en pág. 158].

En toda esta nota usaremos notaciones usuales en el ambiente de C*-álgebras. Para las definiciones y términos básicos sobre C*-álgebras no definidos en esta nota el autor puede consultar [23, 27]. Si x es un elemento positivo en una C*-álgebra, A, notaremos mediante $A(x)$ al cierre en norma del conjunto xAx. Es conocido que si $r(x) \in A^{**}$ denota a la proyección de rango de x, entonces $A(x)^{**} = r(x)A^{**}r(x)$.

Lema 2.1. *Sea A una C*-álgebra verificando la propiedad DP1, sea x un elemento positivo y no cero en A y sea $e = 1 - r(x) \in A^{**}$. Entonces $A \cap eA^{**}e$ satisface la propiedad DPP.*

Demostración. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad alguna, que $\|x\| = 1$. Para simplificar notación, notaremos $I = A \cap eA^{**}e$. Sean (x_n) y (ρ_n) dos sucesiones débil nulas en I e I^*, respectivamente. Para terminar probaremos que $\rho_n(x_n) \to 0$. No es restrictivo suponer que $\|x_n\| \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por [23, 3.21.2], sabemos que existe una proyección f (posiblemente cero) en A^{**} verificando que

$$I^{**} = fA^{**}f.$$

Para cada n natural, sea $\widetilde{\rho}_n$ en A^*, el fucnionl definido por

$$\widetilde{\rho}_n(a) := \rho_n(faf).$$

Claramente $(\widetilde{\rho}_n)$ es una sucesión bébil nula en A^*. Más aún, $x_n + x \to x$ débilmente en A. Como para cada $n \in \mathbb{N}$, x_n pertenece a I, entonces $x_n = ex_ne$. Como además $ex = xe = 0$ tenemos que

$$x_n^*x = x_nx^* = 0.$$

Por tanto,

$$\|x_n + x\|^2 = \|x_n^*x_n + x^*x\| = 1.$$

Como A satisface la propiedad DP1, concluimos que $\widetilde{\rho}_n(x_n + x) \to 0$, y por tanto, $\rho_n(x_n) = \widetilde{\rho}_n(x_n) \to 0$, tal y como queríamos. □

El siguiente teorema obtenido por L. Bunce y el autor de esta nota en [4] muestra que las propiedades DPP y DP1 son equivalentes en cualquier C*-álgebra, dando así una prueba afirmativa a la conjetura realizada pro W. Freedman. Recordamos que una *representación* de una C*-álgebra A es un *-homomorfismo $\pi : A \to B(H)$, donde $B(H)$ denota al espacio de los operadores lineales y continuos en un espacio de Hilbert complejo H. Una representación π se dice *irreducible* si y solo si no se puede expresar como suma de dos sub-representaciones, es decir, H y $\{0\}$ son los dos únicos subespacios de H que son invariantes mediante $\pi(A)$.

Teorema 2.2. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para cual-quier C*-álgebra A.*

(*a*) *A satisface la propiedad DP1.*

(*b*) *A tiene la propiedad DPP.*

(*c*) *Todas las representaciones irreducibles de A son finito dimensionales.*

Demostración. Como ya hemos comentado en la introducción, la equivalencia de (b) y (c) fue probada en [9]. Como la implicación $(b) \Rightarrow (a)$ es conocida, solo nos resta demostrar que $(a) \Rightarrow (c)$ para concluir la prueba.

Supongamos pues que A satisface la propiedad DP1. Sea $\pi : A \to B(H)$ una representación irreducible de A. Con objeto de obtener (c), afirmamos que este caso H debe de ser finito dimensional. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que H tiene el menos dimensión dos. En dicho caso, una sencilla aplicación del cálculo funcional continuo nos asegura que $\pi(A)$ contiene al menos un par de elementos positivos y no nulos u y v tales que $uv = 0$. Por [2, 2.3 y 2.4] sabemos que los elementos u y v pueden ser "levantados" de manera ortogonal a A, es decir, existen dos elementos positivos y no nulos x e y en A tales que $\pi(x) = u$, $\pi(y) = v$ y $xy = 0$.

Por el Lema 4.1.5 en [23], podemos afirmar que la aplicación

$$\pi|_{A(y)} : A(y) \to B(\pi(A(y))(H))$$

es una representación irreducible de $A(y)$. Notemos además que $A(y)$ está contenido en $A \cap eA^{**}e$, donde $e = 1 - r(x)$. Ahora, por el Lema 2.1, junto con la ya conocida equivalencia entre (b) y (c) observamos que $v = \pi(y)$ debe tener rango finito. Análogamente debe de ocurrir que u también tenga rango finito. En particular, $\pi(A)$ contiene operadores de rango finito.

Ahora bien, como $\pi(A)$ contiene operadores de rango finito, el Lema 6.1.4 en [23] afirma que $\pi(A)$ contiene al espacio de los operadores compactos en H. En este caso, el argumento anterior afirma que todo par de operadores compactos, positivos, no nulos y ortogonales en H son operadores de rango finito. Esto implica que el propio H es finito dimensional. $\square$

Es este un buen momento para dirigir nuestra atención al estudio de la propiedad DP1 en los preduales de las álgebras de von Neumann.

Ya hemos recordado que las propiedades DPP y DP1 son preservadas en subespacios complementados. Sea M un álgebra de von Neumann con predual M_* y sea $P : M \to M$ una proyección débil*-continua sobre una subálgebra débil*-cerrada, N. Si notamos por $P_* : M_* \to M_*$ a la proyección inducida en el predual de M definida por $P_*(\rho) = \rho P$, entonces N_* es isométricamente isomorfo a $P_*(M_*)$. En consecuencia, si M_* satisface la propiedad DP1, entonces lo mismo le ocurre al predual de N. Por tanto, recordando que el producto de un álgebra de von Neumann es separadamente débil*-continuo, si el predual de M satisface la propiedad DP1, entonces lo mismo le ocurre al predual de eMe, para cualquier proyección e en M.

En una primera etapa presentaremos una clase de álgebras de von Neumann cuyo predual siempre satisface la propiedad DP1. Sea M un álgebra de von Neumann de tipo I. Por los resultados de estructura clásicos podemos afirmar que M es expresable como una ℓ_∞-suma de productos tensoriales von Neumann de la forma

$$N \overline{\otimes} B(H),$$

donde N es un álgebra de von Neumann abeliana y H es un espacio de Hilbert complejo. En consecuencia el predual de M se expresa como ℓ_1-suma de preduales de álgebras de von Neumann de la forma $N\overline{\otimes}B(H)$. Como la propiedad DP1 se preserva mediante ℓ_p-sumas ($1 \leq p < +\infty$), si demostramos que el predual de cada uno de los mencionados factores tiene la propiedad DP1 obtendremos que el predual de cualquier álgebra de von Neumann de tipo I satisface la misma propiedad.

Proposición 2.3. *Sea N un álgebra de von Neumann abeliana y sea H un espacio de Hilbert complejo. Entonces el predual del producto tensor von Neumann de N y $B(H)$ satisface la propiedad DP1. Como consecuencia, el predual de cualquier algebra de von Neumann de tipo I satisface la propiedad DP1.*

Demostración. Sea A la C*-álgebra producto tensorial de N y $K(H)$, donde $K(H)$ denota el espacio de los operadores compactos en H. Como A es débil*-densa en $M = N\overline{\otimes}B(H)$, entonces M es *-isomorfa (y por tanto isométrica) a $A^{**}z$ para cierta proyección central z en A^{**}. Por tanto M_* es isométrico a $(A^{**}z)_*$ el cual está complementado en A^*. Así pues, si A^* tiene la propiedad DP1 entonces también la tiene M_*. Mostraremos que A^* tiene la propiedad DP1 para concluir.

Sea (ρ_n) una sucesión de estados en A^* que converge débilmente a un estado ρ en A^*, y sea (x_n) una sucesión débil nula en A^{**}. Por [14, 2.1.(b)], será suficiente probar que $\rho_n(x_n) \to 0$. No es restrictivo asumir que $\|x_n\| \leq 1$ para todo n natural.

Sea $0 < \varepsilon < 1$. Podemos elegir a en A satisfaciendo $0 \leq a \leq 1$ y $\rho(a) > 1 - \varepsilon$. Podemos también tomar x en el producto tensor algebraico, $N \otimes F(H)$, satisfaciendo $x \geq 0$ y $\|a - x\| < \varepsilon$. Como x es un elemento en $N \otimes eB(H)e$ para cierta proyección de rango finito e, entonces $A(x)^{**}$ es una subalgebra de un álgebra de tipo I_n, para cierto $n < \infty$, por tanto $A(x)^*$ tiene la propiedad DPP. En consecuencia, como (xx_nx) es una sucesión débil nula en $A(x)^{**}$, tenemos que $\rho_n(xx_nx) \to 0$. Por tanto, para n suficientemente grande, se verifica que

$$\begin{aligned} |\rho_n(ax_na)| &\leq |\rho_n(xx_nx)| + |\rho_n(ax_n(a-x))| + |\rho_n((a-x)x_nx)| \\ &< 2\varepsilon + \varepsilon(1+\varepsilon) < 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Más aún, como $\rho_n(a) \to \rho(a)$ y $\rho(a) > 1 - \varepsilon$, obtenemos $\rho_n((1-a)^2) \leq \rho_n(1-a) < \varepsilon$, para todo n suficientemente grande. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz deducimos que, para todo n suficientemente grande,

$$|\rho_n(ax_n(1-a))|^2 \leq \rho_n(ax_nx_n^*a)\rho_n((1-a)^2) < \varepsilon$$

y de modo similar que

$$|\rho_n((1-a)x_n)|^2 < \varepsilon,$$

lo que a su vez, implica que

$$|\rho_n(x_n)| \leq |\rho_n(ax_na)| + |\rho_n((1-a)x_n)| + |\rho_n(ax_n(1-a))| < 4\varepsilon + 2\varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Por tanto, $\rho_n(x_n) \to 0$, tal y como queríamos. □

El resultado anterior estaba implícitamente conjeturado en el trabajo de Freedman y fue probado en [7]. En vista del mismo, podríamos preguntarnos si las álgebras de von Neumann de tipo I son las únicas algebras de von Neumann cuyo predual satisface la propiedad DP1.

El siguiente tipo de álgebras de von Neumann que uno debe considerar son las álgebras de tipo II y de tipo III. Sea M un álgebra de von Neumann de tipo II. Es bien conocido (ver por ejemplo [27]) que existe una proyección p en M verificando que pMp es de tipo II_1. Si M es un álgebra de von Neumann de tipo III, entonces por [16, 11.1], [28, Lemma 1.5.8] y [29, page 309], existe una proyección débil*-continua y contractiva de M verificando que $P(M)$ es de tipo II_1. En consecuencia, si el predual de cualquier algebra de von Neumann de tipo II_1 nunca satisface la propiedad DP1, entonces el predual de cualquier álgebra de von Neumann de tipo II o III nunca verificaría dicha propiedad.

Supongamos pues que M es un álgebra de von Neumann de tipo II_1. Sea τ una traza normal en M y sea (s_n) una sucesión infinita de isometrías anti-conmutantes en M (es decir, $s_n s_m + s_m s_n = 0$ para todo $n \neq m$). El espacio de Banach, H, generado por (s_n) es isométrico a un espacio de Hilbert que contiene a (s_n) como sistema ortonormal y además tenemos que $\tau(s_n) = 0$ para todo n natural (ver [18, §6]). Denotemos mediante e_n a la proyección $\frac{1}{2}(1+s_n)$ y mediante τ_n al estado normal en M definido por

$$\tau_n(x) := 2\tau(e_n x) \ (= 2\tau(e_n x e_n)).$$

Como (s_n) es un sistema ortonormal en H, tenemos que (s_n) es una sucesión débil nula en H y por tanto en M, se sigue que $\tau_n \to \tau$ débilmente en M_*. Pero $\tau_n(s_n) = 1$, para todo n natural. Por tanto M_* no satisface la propiedad DP1.

Finalmente, como todo álgebra de von Neumann se puede expresar como ℓ_∞-suma de álgebra de von Neumann de tipo I, II y III, lo demostrado anteriormente nos permite obtener la siguiente descripción de las álgebras de von Neumann cuyo predual satisface la propiedad DP1.

Teorema 2.4. *Sea M un álgebra de von Neumann. Entonces M_* verifica la propiedad DP1 si, y solo si, M es de tipo I.*

3. Descripción de los JBW*-triples que satisfacen la propiedad DP1

Dedicamos esta sección a dar una completa descripción de los JBW*-triples que verifican la propiedad DP1. Para iniciar dicha descripción vamos a estudiar dicha propiedad en los seis tipos de factores de Cartan clásicos. Dichos factores de Cartan son, en el caso de los JBW*-triples las piezas básicas para la descripción de los mismos. Referimos el trabajo [25] como referencia básica para las definiciones y conceptos básicos en la teoría de los JB*-triples.

El factor de Cartan de tipo 1 es el espacio de Banach complejo $B(H, K)$, donde H y K son espacios de Hilbert complejos y donde el producto triple está dado por $\{x, y, z\} := \frac{1}{2}(xy^*z + zy^*x)$. Si $j : H \to H$ es una conjugación (isometía conjugado lineal de periodo 2) en H, entonces la ley $z \mapsto z^t = jz^*j$ define una involución lineal (isometría lineal de periodo 2) en $B(H)$. El factor de Cartan de tipo 2 (respectivamente, de tipo 3) coincide con el espacio de Banach complejo formado por todos los elementos t-simétricos (respectivemente, t-anti-simétricos) en $B(H)$. Es claro que los factores de Cartan de tipo 2 y 3 son subtriples de $B(H)$ visto este como factor de Cartan de tipo 1.

La herramienta para abordar la propiedad DP1 en los tres primeros tipos de factores de Cartan será el siguiente lema.

Lema 3.1. *Sea H un espacio de Hilbert infinito dimensional y sea Y un espacio de Banach no nulo. Entonces el espacio $H \oplus^\infty Y$ no satisface la propiedad DP1.*

Demostración. Como H es infinito dimensional podemos elegir una sucesión infinita de vectores ortonormales (e_n) en H. Sea y un elemento en la esfera unidad de Y y sea por último ρ_n el funcional en H^* definido por $\rho_n(x) := (x|e_n)$. Claramente la sucesión (e_n, y) está en la esfera unidad de $H \oplus^\infty Y$ y converge débilmente al elemento $(0, y)$. Además la sucesión $(\rho_n, 0)$ converge a cero débilmente en el dual de $H \oplus^\infty Y$ y para todo n natural, tenemos $(\rho_n, 0)(e_n, y) = 1$. Esto muestra que $H \oplus^\infty Y$ no satisface la propiedad DP1. □

Proposición 3.2. *Sea C un factor de Cartan de tipo 1,2 o 3. Si C satisface la propiedad DP1, entonces C es o bien finito dimensional o bien isométrico a un espacio de Hilbert complejo.*

Demostración. Sea $C = B(H, K)$ un factor de Cartan de tipo 1 verificando la propiedad DP1. Afirmamos que si C no es finito dimensional entonces H o K tienen dimensión uno. Supongamos por el contrario que uno es infinito dimensional y que el otro tiene al menos dimensión dos. Como $B(H, K)$ y $B(K, H)$ son isométricamente isomorfos, podemos suponer que H tiene dimensión infinita y que K tiene al menos dimensión dos. Podemos tomar por tanto una sucesión infinita de elementos ortonormales (h_n) en H y dos elementos ortonormales k_1, k_2 en K. Sea Y el subespacio complementado en $B(H, K)$ generado por el conjunto

$$\{k_1 \otimes e_1, k_2 \otimes e_n : n \geq 2\},$$

donde para $k \in K$ y $h \in H$, el operador $k \otimes h$ está definido por $k \otimes h(x) := (x|h)k$ ($\forall x \in H$). Es claro que Y coincide con

$$\mathbb{C}(k_1 \otimes e_1) \oplus^\infty \mathrm{Lin}(\{k_2 \otimes e_n : n \geq 2\}),$$

donde el segundo de los espacios es isométrico a un espacio de Hilbert de dimensión infinita. Por el Lema 3.1 podemos afirmar que Y, y por tanto C, no satisface la propiedad DP1. En consecuencia todo factor de Cartan de tipo 1 verificando la propiedad DP1 es o bien finito dimensional o un espacio de Hilbert.

Supongamos ahora que j es una conjugación en un espacio de Hilbert complejo H y sea t la involución lineal en $B(H)$ dada por $z^t = jz^*j$. Supongamos que H es infinito dimensional y que el espacio de los operadores t-simétricos (respectivamente t-anti-simétricos) en $B(H)$ satisface la propiedad DP1. Sea (e_n) una sucesión infinita de elementos ortonormales en H. Análogamente a lo ya demostrado para el factor de Cartan de tipo 1, el subespacio Y de los operadores t-simétricos (respectivamente t-anti-simétricos) en $B(H)$ generado por

$$\{j(e_1) \otimes e_1, j(e_2) \otimes e_n + j(e_n) \otimes e_2 : n \geq 2\},$$

(respectivamente, $\{j(e_2) \otimes e_1 - j(e_1) \otimes e_2, j(e_2) \otimes e_n - j(e_n) \otimes e_2 : n \geq 3\}$,) complementado y no satisface la propiedad DP1. Por tanto, cualquier factor de Cartan de tipo 2 o 3 verificando la propiedad DP1 debe ser finito dimensional. $\square$

En el caso de los JBW*-triples, la propiedad DP1 está relacionada, además de con la propiedad DPP, con la clásica propiedad de Kadec-Klee. Recordamos que un espacio de Banach X tiene la propiedad de *Kadec-Klee* (propiedad KKP en lo sucesivo) si y solo si la convergencia secuencial débil en la esfera unidad de X equivale a la convergencia en norma. En otras palabras, la propiedad KKP no esotra cosa que la restricción de la propiedad de Schur a la esfera unidad de X.

Es claro que la propiedad KKP también implica la propiedad DP1. En el caso particular de los espacios de Banach reflexivos las propiedades DP1 y KKP son de hecho equivalentes (ver [14, Corollary 1.5]).

Un factor de Cartan de tipo 4 es un JB*-triple equipado con un producto escalar completo $(.|.)$ y una conjugación $*$ con triple producto y norma dados por

$$\{x, y, z\} = (x|y)z + (z|y)x - (x|z^*)y^*,$$

y

$$\|x\|^2 := (x|x) + ((x|x)^2 - |(x|x^*)|^2)^{\frac{1}{2}},$$

respectivamente.

Proposición 3.3. *Todo factor de Cartan de tipo 4 tiene la propiedad KKP y por tanto la propiedad DP1.*

Demostración. Sea C^4 un factor Cartan de tipo 4, con producto escalar $(.|.)$ y conjugación $*$. Sea $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una base ortonormal para el producto escalar que verifique que $e_\lambda^* = e_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Si para cada $x \in C^4$ expresamos $x(\lambda) := (x|e_\lambda)$, entonces la norma está dada por la expresión

$$\|x\|^2 = \|x\|_2^2 + q(x) := (x|x) + q(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} |x(\lambda)|^2 + q(x) \qquad (x \in C^4),$$

donde

$$q(x) := \left(\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^2 \right)^2 - \left| \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda)^2 \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Primero comprobaremos que para cada conjunto $F \subset \Lambda$ y $x \in C^4$, se verifica la siguiente desiguldad

$$q(x) \geq q\Big(\sum_{\lambda \in F} x(\lambda)\ e_\lambda \Big). \qquad (1).$$

En efecto, para $x \in C^4$ y $F \subseteq \Lambda$ se verifica

$$\left(\sum_{\lambda \in F} |x(\lambda)|^2 \right)^2 + \left| \sum_{\lambda \in F} x(\lambda)^2 + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus F} x(\lambda)^2 \right|^2$$

$$\leq \left(\sum_{\lambda \in F} |x(\lambda)|^2 + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus F} |x(\lambda)|^2 \right)^2 + \left| \sum_{\lambda \in F} x(\lambda)^2 \right|^2,$$

lo que equivale a que

$$q(x) \geq q\Big(\sum_{\lambda \in F} x(\lambda)\ e_\lambda \Big).$$

Dado $F \subset \Lambda$, notaremos mediante P_F a la proyección en C^4 dada por $P_F(x) := \sum_{\lambda \in F} x(\lambda)\ e_\lambda$. Se sigue de (1) que $\|P_F\| \leq 1$. Probamos ahora que para $\varepsilon > 0$ tenemos que

$$F \subseteq \Lambda, x \in C^4, \|x\| = 1, \|P_F(x)\|^2 > 1 - \varepsilon^2 \Rightarrow \|x - P_F(x)\|_2 < \varepsilon. \qquad (2)$$

A tal efecto, fijemos $x \in C^4$ con $\|x\| = 1$ y un subconjunto $F \subset \Lambda$ verificando $\|P_F(x)\|^2 > 1 - \varepsilon^2$. Como

$$1 = \|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^2 + q(x),$$

entonces

$$\varepsilon^2 > 1 - \|P_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|P_F(x)\|^2 =$$

$$= \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus F} |x(\lambda)|^2 + q(x) - q\Big(\sum_{\lambda \in F} x(\lambda) e_\lambda \Big) \geq \text{ por } (1)$$

$$\geq \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus F} |x(\lambda)|^2 = \|x - P_F(x)\|_2^2.$$

Mostramos ahora que C^4 tiene la propiedad KKP. Supongamos que $\{x_n\} \to x_0$ débilmente con $\|x_n\| = \|x_0\| = 1$. Para cada $\varepsilon > 0$, elegimos un subconjunto finito $G \subset \Lambda$ verificando que

$$\|x_0 - P_G(x_0)\| \leq \varepsilon \ \text{ y}$$

$$1 - \varepsilon^2 < \|P_G(x_0)\|^2.$$

Como P_G tiene rango finito y $P_G(x_n) \stackrel{w}{\to} P_G(x_0)$, se sigue que $P_G(x_n)$ converge a $P_G(x_0)$ en norma. Podemos elegir por tanto $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq m$

$$\|P_G(x_n) - P_G(x_0)\| \leq \varepsilon$$

y

$$1 - \varepsilon^2 < \|P_G(x_n)\|^2.$$

Por (2) deducimos que

$$\|x_n - P_G(x_n)\|_2 \leq \varepsilon \quad .$$

En consecuencia, para todo $n \geq m$ tenemos

$$\|x_n - x_0\|_2 \leq \|x_n - P_G(x_n)\|_2 + \|P_G(x_n) - P_G(x_0)\|_2 + \|P_G(x_0) - x_0\|_2 \leq$$

$$\leq 2\varepsilon + \|P_G(x_n) - P_G(x_0)\| \leq 3\varepsilon,$$

lo que implica que $\{x_n\}$ converge a x en norma. □

Los factores de Cartan de tipo 5 y 6 son finito dimensionales y por tanto verifican la propiedad DP1.

Una vez que hemos descrito todos los factores de Cartan que poseen la propiedad DP1 podemos continuar con el estudio de aquellos JBW*-triples que poseen dicha propiedad. Por los resultados de estructura sobre JBW*-triples (ver [19],[20],[21]), sabemos que cada JBW*-triple W admite una descomposición en la forma

$$W = \oplus_\alpha^{\ell_\infty} L^\infty(\Omega_\alpha, \mu_\alpha, C_\alpha) \oplus^{\ell_\infty} R \oplus^{\ell_\infty} H(M, \beta),$$

donde cada C_α es una factor de Cartan, R es un ideal derecho débil*-cerrado de un álgebra de von Neumann continua N, y $\beta : M \to M$ es un *-antiautomorphism de periodo 2 en un álgebra de von Neumann continua M verificando que $A = H(M, \beta)_{sa} := \{a \in H(M, \beta) : a^* = a\}$ es una JW-álgebra continua (real) bajo el producto $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$.

Chu y Mellon demostraron en [10] que un JBW*-triple W satisface la propiedad DPP si y solo si W es de la forma

$$W = \oplus_\alpha^{\ell_\infty} L^\infty(\Omega_\alpha, \mu_\alpha, C_\alpha) \oplus^{\ell_\infty} R \oplus^{\ell_\infty} H(M, \beta),$$

donde cada es un factor de Cartan y el conjunto formado por las dimensiones de los C_α está acotado.

Para cualquier JW-algebra continua A, Chu y Mellon [10, Corollary 13] probaron que A nunca satisface la propiedad DPP. Un refinamiento en los argumentos utilizados por Chu y Mellon permiten demostrar que ninguna JW-álgebra continua verifica la propiedad DP1 (ver [1, Lemma 2]).

Estamos ya en condiciones de establecer una descripción de los JBW*-triples que verifican la propiedad DP1.

Teorema 3.4. *Sea W un JBW*-triple verificando la propiedad DP1, entonces W satisface la propiedad DPP o W es un espacio de Hilbert o W es un factor de Cartan de tipo 4.*

Demostración. Ya sabemos que W se puede expresar en la forma

$$W = \bigoplus_{\alpha}^{\ell_\infty} L^\infty(\Omega_\alpha, \mu_\alpha, C_\alpha) \oplus^\infty R \oplus^\infty H(M, \beta).$$

Como la propiedad DP1 se hereda en cualquier subtriple, los comentarios que preceden a este Teorema nos aseguran que $H(M, \beta) = 0$.

Si $R \neq 0$, entonces R es de la forma pN para algún álgebra de von Neumann continua N y alguna proyección, no cero, $p \in N$. Como la propiedad DP1 es heredada por subálgebras, el álgebra de von Neumann pNp tiene la propiedad DP1. En el caso de un álgebra de von Neumann las propiedades DP1 y DPP son equivalentes (ver [14, Theorem 3.5]), por tanto pNp tiene la propiedad DPP. En consecuencia, por [8, Theorem 3] pNp es un álgebra de von Neumann de tipo I finita, sin embargo, pNp es continua ya que N es continua (ver [30, Corollary 11]), Por tanto $R = 0$.

Volvemos ahora nuestra mirada a los factores de Cartan que aparecen en la descomposición anterior. Cada C_α es un subtriple de W, y por tanto hereda la propiedad DP1. Ahora la Proposiciones 3.2 y 3.3 nos aseguran que cada C_α solo puede ser un espacio de Hilbert de dimensión infinita o un factor de Cartan finito dimensional.

Supongamos primero que uno de los factores, por ejemplo C_α, es un espacio de Hilbert infinito dimensional (visto como factor de Cartan de tipo 1 ó 4). Si cualquier otro factor no es cero, por ejemplo C_γ, entonces $C_\alpha \bigoplus^{\ell_\infty} C_\gamma$ es un subtriple de W y no satisface la propiedad DP1 (ver Lemma 3.1), lo cual es imposible ya que dicha propiedad es heredada por subtriples. En consecuencia $W = L^\infty(\Omega, \mu, H)$, donde H es un espacio de Hilbert infinito dimensional visto como factor de Cartan de tipo 1 ó 4. Si existe un conjunto μ-medible S tal que $\mu(S), \mu(\Omega \backslash S) > 0$, entonces W is isométricamente isomorfo a

$$L^\infty(S, \mu|_S, H) \bigoplus^{\infty} L^\infty(\Omega \backslash S, \mu|_{\Omega \backslash S}, H).$$

En consecuencia, $H \bigoplus^{\ell_\infty} H$ es un subtriple de W que no verifica la propiedad DP1, lo cual es imposible. Por tanto, W es un espacio de Hilbert infinito dimensional visto como factor de Cartan de tipo 1 ó 4.

Finalmente, suponemos que todos los C_α son finito dimensionales. Podemos deducir de las demostraciones de las Proposiciones 3.2 y 3.3 que cada factor de Cartan de tipo 1,2,3 y 4 contiene un subespacio (real) complementado isométrico a $\ell_2^{n_\alpha}$ y $\{n_\alpha\}$ crece con respecto a $dim\ C_\alpha$. Supongamos que $\sup_\alpha\ dim\ C_\alpha = \infty$, entonces $\bigoplus^{\ell_\infty} C_\alpha$ es un subtriple de W, y por tanto tiene la propiedad DP1. Sin embargo,

$\bigoplus^{\ell_\infty} C_\alpha$ contiene un subespacio complementado que es isométrico a

$$C_{\alpha_0} \bigoplus^{\infty} \left(\bigoplus_{\alpha \neq \alpha_0}^{\ell_\infty} \ell_2^{n_\alpha} \right),$$

el cual contiene a su vez un subespacio complementado que es isométricamente isomorfo a $C_{\alpha_0} \bigoplus^{\infty} \ell_2$ (ver [31, p. 81]). Esto contradice el hecho de que este último espacio no puede tener la propiedad DP1 (ver Lemma 3.1). □

Como cada factor de Cartan de tipo 4 tiene la propiedad KKP, obtenemos de inmediato el siguiente resultado.

Corolario 3.5. *Un JBW*-triple W propiedad DP1 si, y solo si, W tiene la propiedad DPP o la propiedad KKP.*

Corolario 3.6. *Un JBW*-triple tiene propiedad KKP si, y solo si, es finito dimensional ó un espacio de Hilbert (visto como factor de Cartan de tipo 1 ó 4).*

Demostración. Sea W un JBW*-triple verificando la propiedad KKP. Ya sabemos que la propiedad KKP implica la propiedad DP1, en consecuencia, a la vista del Teorema 3.4, o W tiene la propiedad DPP o es un espacio de Hilbert.

Si W tiene la propiedad DPP entonces admite la siguiente descomposición,

$$W = \oplus_{\alpha}^{\ell_\infty} L^\infty(\Omega_\alpha, \mu_\alpha, C_\alpha),$$

donde cada C_α es un factor de Cartan y $\sup_\alpha \dim C_\alpha < +\infty$.

Si para algún α, el espacio $L^\infty(\mu_\alpha)$ es infinito dimensional, entonces $L^\infty(\Omega_\alpha, \mu_\alpha, C_\alpha)$ contiene una copia isométrica de ℓ_∞. Como la propiedad KKP es heredada por subespacios, entonces ℓ_∞ tendría la propiedad KKP, lo cual es imposible (ver [11, Theorem II.7.10]). Un argumento similar nos ayudaría a probar que el conjunto de indices debe de ser finito y por tanto W es finito dimensional.

Para la implicación contraria, simplemente recordar que los espacios de Hilbert y los factores de Cartan de tipo 4 verifican la propiedad KKP (ver Proposición 3.3). □

Referencias

[1] M. D. Acosta y A. M. Peralta, An alternative Dunford-Pettis property for JB*-triples, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* **52** (2001), 391-401 (2001).

[2] C. A. Akeman, y G. K. Pedersen, Ideal perturbations of elements in C*-algebras, *Math. Scand.* **41** (1977), 117-139.

[3] Barton, T. and Friedman, Y.: Grothendieck's inequality for JB*-triples and applications, *J. London Math. Soc.* (2) **36**, 513-523 (1987).

[4] L. J. Bunce, The Dunford-Pettis property in the predual of a von Neumann algebra, *Proc. Amer. Math. Soc.* **116** (1992), 99-100.

[5] L. J. Bunce y A. M. Peralta, The alternative Dunford-Pettis property in C^*-algebras and von Neumann preduals, *Proc. Amer. Math. Soc.* **131**, No. 4 (2002), 1251-1255.

[6] L. J. Bunce y A. M. Peralta, Images of Contractive Projections on Operator Algebras, *J. Math. Anal. Appl.* **272**, 55-66 (2002).

[7] L. J. Bunce y A. M. Peralta, On weak sequential convergence in JB*-triple duals, *Studia Math.* **160** (2), 117-127 (2004).

[8] C.-H., Chu y B. Iochum, The Dunford-Pettis property in C*-algebras, *S*tudia Math. **97** (1990), 59-64.

[9] C.-H. Chu, B. Iochum y S. Watanabe, *C^*-algebras with the Dunford-Pettis property. Function spaces (Edwardsville, IL, 1990)*, 67-70, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 136, Dekker, New York, 1992.

[10] C.-H. Chu y P. Mellon, The Dunford-Pettis property in JB*-triples, *J. London Math. Soc.* **55** (1997), 515-526.

[11] R. Deville, G. Godefroy y V. Zizler, *Smoothness and renormings in Banach spaces*, Longman Scientific and Technical (Pitman monographs and surveys in Pure and Applied Mathematics, 1993).

[12] J. Diestel, A survey of results related to the Dunford-Pettis property, *C*ontemp. Math. **2** (1980), 15–60.

[13] N. Dunford y B.J. Pettis, Linear operations on summable functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* 47 (1940) 323–329.

[14] W. Freedman, An alternative Dunford-Pettis property, *Studia Math.* **125** (1997), 143–159.

[15] A. Grothendieck, Sur les applications lineaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$, *Canad. J. Math.* 5 (1953) 129–173.

[16] U. Haagerup y E. Størmer, Equivalence of normal states on von Neumann algebras and the flow of weights, *Advances in Math.* **83** (1990), 180-262.

[17] M. Hamana, On linear topological properties of some C^*-algebras, *Tôhoku Math. J.* (2) **29**, no. 1 (1977), 157-163.

[18] H. Hanche-Olsen y E. Størmer, *Jordan operator algebras*, Pitman, London, 1984.

[19] G. Horn, *Klassifikation der JBW*-Tripel vom Typ I*, Ph.D. Thesis, Tübingen, 1984.

[20] G. Horn, 'Classification of JBW*-Triples of type I', *Math. Z.* 196 (1987) 271–291.

[21] G. Horn y E. Neher, 'Classification of continuous JBW*-Triples', *Trans. Amer. Math. Soc.* 306 (1988) 553–578.

[22] W. Kaup, A Riemann mapping theorem for bounded symmetric domains in complex Banach spaces, *Math. Z.* **183** (1983), 503-529.

[23] G. K. Pedersen, *C*-algebras and their automorphism groups*, Academic Press, 1979.

[24] Peralta, A. M. and Rodríguez Palacios, A.: Grothendieck's inequalities for real and complex JBW^*-triples, *Proc. London Math. Soc.* (3) **83**, no. 3, 605–625 (2001).

[25] B. Russo, Structure of JB*-triples. In *Jordan Algebars: Proc. Oberwolfach Conf., August 9-15, 1992*, (ed. by W. Kaup, K. McCrimmon and H. Peterson), 209-280, de Gruyter, Berlin, 1994.

[26] S. Sakai, *C*-algebras and W*-algebras*, Springer-Verlag, Berlin 1971.

[27] M. Takesaki, *Theory of operator algebras I*, Springer Verlag, New York, 1979.

[28] M. Takesaki, *Tomita's theory of Modular Hilbert Algebras and its applications*, Lecture Notes in Math. **128**, Springer-Verlag, 1970.

[29] M. Takesaki, Conditional expectations in von Neumann algebras, *J. Func. Anal.* **9** (1972), 306-321.

[30] D. M. Topping, *Lectures on von Neumann algebras*, Van Nostrand, Princeton, (1971).

[31] P. Wojtaszczyk, *Banach spaces for analysts*, Cambridge studies in advanced mathematics 25, Cambridge Univ. Press (1991).