Soluciones de los ejercicios del examen de Análisis Matemático
Primer curso de Ingeniería Informática - septiembre de 2005

Ejercicio 1. Calcular las dimensiones (radio y altura) del depósito de máximo volumen formado por un cilindro circular recto cerrado en sus dos extremos por semiesferas cuya superficie total es igual a $2\pi\,\mathrm{m}^2$.

Solución. Llamemos r al radio y h a la altura del cilindro. La superficie total del depósito es $2\pi rh+4\pi r^2$ y su volumen es $\pi r^2 h+\frac{4}{3}\pi r^3$. Nos dicen que $2\pi rh+4\pi r^2=2\pi$, de donde se sigue que $h=1/r-2r$. Por tanto el volumen es igual a

$$\pi r^2(1/r-2r)+\frac{4}{3}\pi r^3=\pi\left(r-\frac{2}{3}r^3\right)=\frac{\pi}{3}\left(3r-2r^3\right)$$

Se trata, pues, de calcular el máximo absoluto de la función $f(r)=3r-2r^3$ donde $r>0$. Como $f'(r)=3-6r^2$, el único punto del intervalo $]0,+\infty[$ donde se anula la derivada es $r=1/\sqrt{2}$. Se tiene que

$$f'(r)=-6(r^2-1/2)=-6(r+1/\sqrt{2})(r-1/\sqrt{2})$$

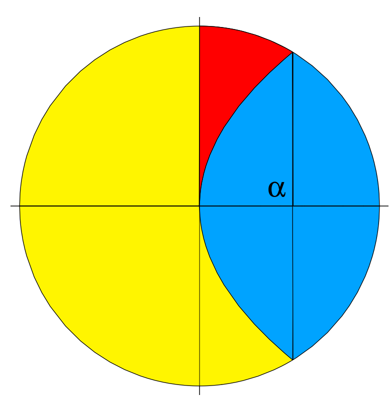
por lo que $f'(r)>0$ para $0<r<1/\sqrt{2}$ y $f'(r)<0$ para $r>1/\sqrt{2}$. Por tanto f es creciente en el intervalo $]0,1/\sqrt{2}]$ y decreciente en el intervalo $[1/\sqrt{2},+\infty[$. Concluimos que en el intervalo $]0,+\infty[$ la función f alcanza en el punto $1/\sqrt{2}$ un máximo absoluto.

Las dimensiones del depósito de máximo volumen en las condiciones del enunciado son $r=1/\sqrt{2}$ y $h=\sqrt{2}-2/\sqrt{2}=0$. Esto es, el depósito de máximo volumen en las condiciones del enunciado es una esfera de radio $1/\sqrt{2}$ metros.

Ejercicio 2. Calcula el área de las dos partes en que la parábola $y^2=4x$ divide al círculo $x^2+y^2=8$.

Solución.

Hay que calcular los puntos de intersección de la parábola y de la circunferencia. Para ello calculamos la raíz positiva de la ecuación $x^2+4x-8=0$ que es $\alpha=-2+2\sqrt{3}$. Los puntos de intersección son, por tanto, $(\alpha,2\sqrt{\alpha})$ y $(\alpha,-2\sqrt{\alpha})$. Teniendo en cuenta la simetría, para calcular el área de la parte azul del círculo es suficiente calcular el área de la región comprendida entre la circunferencia y la parábola cuando $x\in[0,\alpha]$, es decir, el área de la región coloreada en rojo. Se trata de una región de tipo I cuya área viene dada por:



$$\int_0^\alpha\left(\sqrt{8-x^2}-2\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^\alpha\sqrt{8-x^2}\,\mathrm{d}x-\int_0^\alpha 2x^{1/2}\,\mathrm{d}x=$$
$$=\int_0^\alpha\sqrt{8-x^2}\,\mathrm{d}x-\frac{4}{3}\alpha^{3/2}$$

Calculemos la integral que falta.

$$\int_0^{\alpha} \sqrt{8-x^2}\,\mathrm{d}x = \left[x=\sqrt{8}\,\mathrm{sen}\,t\right] = \sqrt{8}\int_0^{\arcsin(\alpha/\sqrt{8})} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{2}\int_0^{\arcsin(\alpha/\sqrt{8})} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \sqrt{2}\,\mathrm{arc\,sen}\left(\alpha/\sqrt{8}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}\left(2\,\mathrm{arc\,sen}(\alpha/\sqrt{8})\right)$$

Por tanto, el área,S, de la región en rojo es igual a

$$S = \sqrt{2}\,\mathrm{arc\,sen}\left(\alpha/\sqrt{8}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}\left(2\,\mathrm{arc\,sen}(\alpha/\sqrt{8})\right) - \frac{4}{3}\alpha^{3/2}$$

La solución obtenida puede simplificarse más usando que $\mathrm{sen}(2x) = 2\,\mathrm{sen}\,x\cos x$ pero, tal como está, la considero correcta.

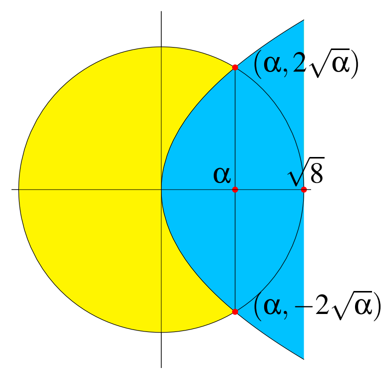
El área de la parte azul del círculo es igual $4\pi - 2S$ y el área de la parte amarilla del círculo es igual a $4\pi + 2S$.

Otras formas de hacer este ejercicio algo más trabajosas son las siguientes.

Teniendo en cuenta la simetría, el área de la parte azul del círculo es igual a

$$2\int_0^{\alpha} 2\sqrt{x} + 2\int_{\alpha}^{\sqrt{8}} \sqrt{8-x^2}\,\mathrm{d}x$$

que se calcula como antes.

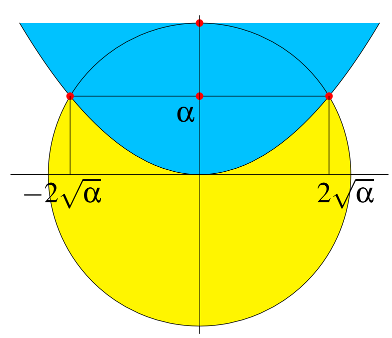


También puedes hacer este ejercicio cambiando los ejes (convirtiendo una región de tipo II en otra de tipo I) como en la siguiente figura obtenida simetrizando la anterior respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

El área de la parte azul del disco es igual a

$$\int_{-2\sqrt{\alpha}}^{2\sqrt{\alpha}} \left(\sqrt{8-x^2} - x^2/4\right)\,\mathrm{d}x$$

que se calcula igual que antes.



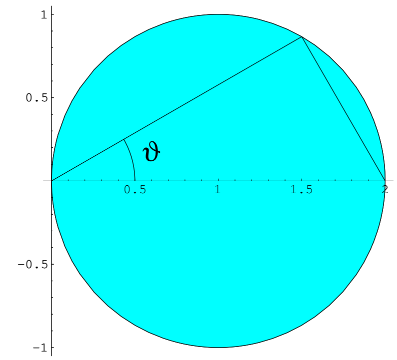
Ejercicio 3. Calcula

$$\iint\limits_{D((1,0),1)} \exp\left((x^2+y^2)/2x\right) d(x,y)$$

donde $D((1,0),1) == \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2 \leqslant 1\right\}$ es el círculo de centro $(1,0)$ y radio 1.

Solución.

Como el dominio de integración es un disco y en la función que queremos integrar figura la expresión x^2+y^2, para calcular la integral pasamos a coordenadas polares. Tenemos que



$$\iint\limits_{D((1,0),1)} \exp\left((x^2+y^2)/2x\right) d(x,y) = \iint\limits_{B} \rho \exp\left(\frac{\rho}{2\cos\vartheta}\right) d(\rho,\vartheta)$$

Donde

$$\begin{aligned} B &= \left\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^+\times[-\pi,\pi] : (\rho\cos\vartheta,\rho\operatorname{sen}\vartheta)\in D((1,0),1)\right\} = \\ &= \left\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^+\times[-\pi,\pi] : (\rho\cos\vartheta-1)^2+\rho^2\operatorname{sen}^2\vartheta \leqslant 1\right\} = \\ &= \left\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^+\times[-\pi,\pi] : \rho\leqslant 2\cos\vartheta, -\pi/2\leqslant\vartheta\leqslant\pi/2\right\} \end{aligned}$$

Por tanto, aplicando el teorema de Fubini, resulta:

$$\begin{aligned} \iint\limits_{B} \rho\exp\left(\frac{\rho}{2\cos\vartheta}\right) d(\rho,\vartheta) &= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\int\limits_{0}^{2\cos\vartheta}\rho\exp\left(\frac{\rho}{2\cos\vartheta}\right)d\rho\right]d\vartheta \\ &= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos^2\vartheta d\vartheta = 2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos(2\vartheta))d\vartheta = 2\pi \end{aligned}$$

Donde,integrando por partes, hemos calculado que $\mathrm{e}^{\rho/\lambda}(\lambda\rho-\lambda^2)$ es una primitiva de $\rho\,\mathrm{e}^{\rho/\lambda}$, por lo que $\int\limits_0^\lambda \rho\,\mathrm{e}^{\rho/\lambda}d\rho=\lambda^2$. Naturalmente, en nuestro caso es $\lambda=2\cos\vartheta$.

Ejercicio 4. Calcular la mínima distancia del origen a la superficie de ecuación $xy^2z^3=2$.

Solución. Se trata, claro está, de un problema de extremos condicionados pues nos piden calcular el mínimo absoluto de la función $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, que nos da la distancia del origen al punto (x,y,z), cuando el punto (x,y,z) está en la la superficie de ecuación $xy^2z^3-2=0$. A efectos de cálculo, podemos ignorar la raíz cuadrada y considerar la función

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

Formamos la función de Lagrange.

$$F(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda(xy^2z^3-2)$$

Calculamos los puntos críticos de la función de Lagrange.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda y^2 z^3 = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 2\lambda x y z^3 = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2z + 3\lambda x y^2 z^2 = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x y^2 z^3 - 2 = 0 \tag{4}$$

Multiplicando la ecuación (1) por x, la (2) por y, la (3) por z y sustituyendo en todas ellas xy^2z^3 por 2, obtenemos las igualdades:

$$x^2 = \frac{y^2}{2} = \frac{z^2}{3} = -\lambda \Longrightarrow \lambda < 0,\ x = \pm\sqrt{-\lambda},\ y = \pm\sqrt{-2\lambda},\ z = \pm\sqrt{-3\lambda} \tag{5}$$

Sustituyendo estas igualdades en (4) obtenemos la ecuación

$$\sqrt{-\lambda}\,(-2\lambda)\sqrt{-27\lambda^3} = 2 \Longrightarrow -2\lambda\sqrt{27\lambda^4} = 2 \Longrightarrow \lambda^3 = -\frac{1}{\sqrt{27}} \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Teniendo en cuenta que la igualdad (4) implica que x y z son ambos positivos o son ambos negativos, deducimos de (5) que la mínima distancia del origen a la superficie dada se alcanza en los cuatro puntos:

$$\pm\left(\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}}, \pm\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}, \sqrt{\frac{3}{\sqrt{3}}}\right)$$

y su valor es igual a

$$\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}}} = \sqrt{2\sqrt{3}}$$