Departamento de Análisis Matemático

ETSII Febrero 2000. Análisis Matemático.

Problema 1. (1 punto) Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x - \operatorname{sen} x} \qquad\qquad \lim_{x\to \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$$

Problema 2. (2 puntos) Considérese la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{2x^2 + 6x + 10}{x^2 + 1} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Se pide:

a) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos absolutos y la imagen.

b) Basándose en el apartado anterior, calcular el número de soluciones de la ecuación $f(x) = m$ según el valor del número real m.

Problema 3. (1.5 puntos) En un triángulo equilátero de lado 4 se inscribe un rectángulo apoyado en uno de sus lados. Calcular el área máxima que puede tener un rectángulo de esta forma (ver figura abajo).

Problema 4. (1.5 puntos) Calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al girar respecto al eje OX la función $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$ con $x \in [0,1]$.

Problema 5. (2 puntos)

(Ingeniería superior) Resolver la ecuación diferencial

$$(3x + 2\arctan y)dx + \frac{x}{1+y^2}dy = 0.$$

(Gestión y Sistemas) Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y) = 2x^2 - 2xy + y^2 - x$ en el cuadrado definido por $\{0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1\}$.

Granada 16 de febrero de 2000.

Departamento de Análisis Matemático

ETSII Febrero 2000. Análisis Matemático.

Problema 1. (1 punto) Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x-\operatorname{sen} x} \qquad\qquad \lim_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$$

Problema 2. (2 puntos) Considérese la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\frac{2x^2+6x+10}{x^2+1} \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Se pide:

a) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos absolutos y la imagen.

b) Basándose en el apartado anterior, calcular el número de soluciones de la ecuación $f(x)=m$ según el valor del número real m.

Problema 3. (1.5 puntos) En un triángulo equilátero de lado 4 se inscribe un rectángulo apoyado en uno de sus lados. Calcular el área máxima que puede tener un rectángulo de esta forma (ver figura abajo).

Problema 4. (1.5 puntos) Calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al girar respecto al eje OX la función $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$ con $x\in[0,1]$.

Problema 5. (2 puntos)

(Ingeniería superior) Resolver la ecuación diferencial

$$(3x+2\arctan y)dx+\frac{x}{1+y^2}dy=0.$$

(Gestión y Sistemas) Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y)=2x^2-2xy+y^2-x$ en el cuadrado definido por $\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$.

Granada 16 de febrero de 2000.

Departamento de Análisis Matemático

Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas.
Análisis Matemático.

Problema 1. Consideremos la función $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \ln x - x + 2 \qquad (x \in]0, +\infty[).$$

a) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de f. ¿Cuál es su imagen?.

b) Calcular el número de soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ en $]0, +\infty[$.

Problema 2. Se desea construir un cono usando una plancha circular de hojalata de radio R. Para ello, se toma un sector circular de dicha plancha y se une por los bordes rectos. Determinar el mayor volumen que puede tener un cono construido de esta forma.

Problema 3.

a) Calcular el área comprendida entre las curvas $x = y^3$ y $x = y^2$ en el primer cuadrante.

b) Calcular el área comprendida entre las curvas $y = 2x^2$ e $y = x^4 - 2x^2$.

c) Calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al girar respecto del eje OY la región bajo la curva $y = \dfrac{1}{x^2(1+x^2)}$ con $x \in [1, +\infty[$.

Problema 4. Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x+x^2} \qquad \lim_{x\to 0} (e^x + x)^{1/x} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{2^x - 3^x}{1+5^x}$$

Granada 13 de diciembre de 1999.

Departamento de Análisis Matemático

ETSII Febrero 2001. Análisis Matemático.

Problema 1. (2 puntos) Calcular, según el valor del parámetro real m, el número de soluciones de la ecuación

$$e^x = mx \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Problema 2. (2 puntos) Consideremos un rectángulo cuya base se encuentra sobre el eje de abcisas y cuyos otros dos vértices se hallan sobre la gráfica de la función $y = 4\,\mathrm{sen}\,x;\ 0 \le x \le \pi$ (ver figura de abajo). Encontrar el perímetro máximo que puede tener un rectángulo de esta forma.

Problema 3. (2 puntos) Calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al girar respecto al eje OX la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ con $x \in [0,\infty)$.

Problema 4. (2 puntos) Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^3 + y^2 + x^2y + 2y + 1$.

a) Calcular los extremos relativos y puntos de silla de f en $\mathbb{R}^2$.

b) Calcular los extremos absolutos de f en el conjunto $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x+y \le 2\right\}$ (triángulo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$ y $(0,2)$).

Granada 1 de Febrero de 2001.

Departamento de Análisis Matemático

ETSII Septiembre 2001. Análisis Matemático.

Problema 1. (4 puntos) Calcular:

(a) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log(\log x)}{x}\,dx$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x-x^4}-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x^3}}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2001/x}-1}{\log\left(\frac{x+1}{x}\right)}$

(d) Volumen del sólido de revolución obtenido al hacer girar al rededor del eje OX la región limitada por $x=y^3$, $x=0$, $x=8$.

Problema 2. (2 puntos) Se debe construir un canalón para lluvia a partir de una lámina metálica que tiene 30cm de ancho, doblando la tercera parte de la lámina de cada lado hasta que forme un ángulo θ (ver figura abajo). ¿Cómo debe elegirse θ para que el canalón lleve la cantidad máxima de agua?

Problema 3. (2 puntos) Consideremos la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=x^3-3xy+y^3.$$

a) Calcular los extremos relativos y puntos de silla de f en $\mathbb{R}^2$.

b) Calcular los extremos absolutos de f en el conjunto
$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 3\right\}$
(triángulo de vértices $(0,0)$, $(3,0)$ y $(0,3)$).

Granada 20 de septiembre de 2001.

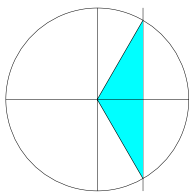
Análisis Matemático

1° de Informática. Granada, 11 de Septiembre de 2003

1.) Calcular el área del recinto:

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\,,\, x^2 + (y-1)^2 \leq 1\right\}$$

2.) De entre todas las cuerdas MN de la circunferencia unidad paralelas al eje OY, determinar la que forma con el origen O un triángulo de área máxima.



3.) Determinar el número de raíces reales de la función

$$f(x) = x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x$$

en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

4.) Sea $f : K \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = f(x,y) = x\,y\,(1-x)(1-y),$$

donde K es el cuadrado de vértices $(0,0), (1,0), (1,1)$ y $(0,1)$. Calcular los extremos absolutos de f en K.

Análisis Matemático

1° de Informática. Granada, 13 de Febrero de 2003

1.) Responder razonadamente si son ciertas las siguientes afirmaciones:

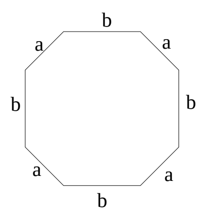
a) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente con $f(a)\, f(b) < 0$. Entonces $\exists c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

b) Toda función continua en un punto es derivable en dicho punto.

c) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = \left[\frac{-1}{x-1}\right]_0^3 = \frac{-1}{2} - 1 = \frac{-3}{2}.$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \frac{sen\, t}{t}\, dt}{x^2} = 1.$

2.) Consideremos un octógono en el que todos los ángulos interiores son iguales (y por tanto iguales a 135°) y las longitudes de los lados alternados son iguales (ver figura). De entre todos los octógonos de este tipo de perímetro 8, calcular el que tenga mayor superficie.



3.) Sea $f : K \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = f(x,y) = (2x^2 + y^2)\, e^{-(x^2+y^2)},$$

donde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Calcular los extremos absolutos de f en A.

4.) Calcular

$$\int_A (x^2 + y)\, dx\, dy,$$

siendo $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Análisis Matemático

1° de Informática. Granada, 29 de Enero de 2004

1. Contestar razonadamente a los siguientes enunciados:

   a) Justifíquese cuáles de los siguientes conjuntos son compactos y cuáles no:
      1) $\{x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 2\}$.
      2) $\{x, y) \in [0,1] \times [0,1];\ 0 \leq x < y \leq 1\}$
      3) $\{x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \geq 2\}$.

   b) Justifíquese si el punto $(0,0)$ es un éxtremo de la función $f(x,y) = |x| + y$ y $A = [-1,1] \times [-1,1]$

   c) Justifíquese si el punto $(0,0)$ es un éxtremo de la función $f(x,y) = |x| + |y|$ y $A = [-1,1] \times [-1,1]$

   d) Sea F la función definida mediante la expresión $F(x) = \int_0^{1+x^2} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} dt$. Calcular $F'(x)$ en los puntos donde sea posible.

2. Calcular el área máxima de un trapecio, inscrito en una circunferencia de radio 1, cuya base coincide con el diámetro de dicha circunferencia.

3. Calcúlense los extremos de la función

$$f(x,y) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 3y^2,$$

   en el conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$$

4. Calcúlese el volumen de madera desprendido al taladrar por el centro una bola de madera de 9cm de radio con una broca de 1 cm de radio.

Análisis Matemático

1° de Informática. Granada, 20 de Septiembre de 2004

1. Contestar razonadamente a los siguientes enunciados:

   a) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función derivable en el intervalo abierto (a, b). Entonces existe un punto $c \in (a, b)$ verificando que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

   b) El límite
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{\sin(x)} \frac{\sin(t)}{t} dt}{x}$$
   existe y vale $\frac{1}{3}$.

2. Hallar la longitud de la catenaria. Ecuación :
$$f : [-a, a] \to \mathbb{R} \quad : \quad f(x) = \frac{1}{2}a(\mathrm{e}^{x/a} + \mathrm{e}^{-x/a})$$

3. Consideremos la parábola de ecuación $y = f(x) = 4 - x^2$. Sea $(a, f(a))$ un punto en la gráfica de la mencionada parábola. Calcular a para que el triángulo que determina la recta tangente a la parábola en el punto $(a, f(a))$ con los semiejes positivos tenga área mínima.

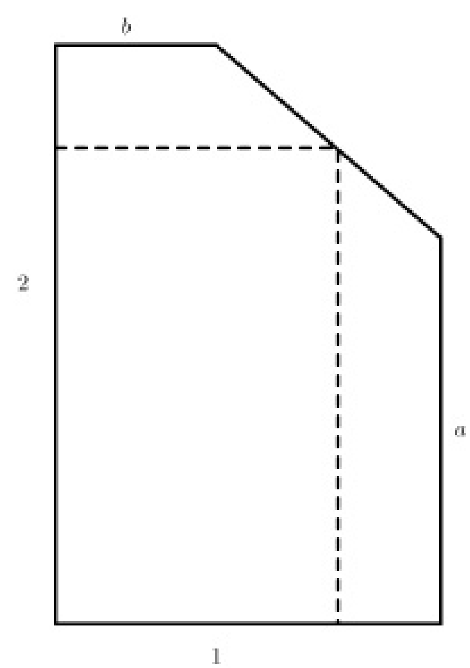
4. Sea $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y \geq 0,\ 4x^2 + y^2 \leq 4\}$. Calcular los extremos absolutos de la función $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 16y - 3, \quad (x, y) \in K.$$

Análisis Matemático

1° de Informática. Granada, 21 de Diciembre de 2004

1.) Intentaremos aproximar el $\log(1{,}5)$ con un error menor que 10^{-3}. A tal efecto se pide calcular el polinomio de Taylor de grado n, $P_n(x)$, de la función $f(x) = \log(1+20x)$ ($x \in (-\frac{1}{20}, +\infty]$). Calcular el menor n para el cual se verifica que el error cometido al aproximar $\log(1{,}5)$ mediante un determinado valor de $P_n(x)$ sea menor que 10^{-3}.

2.) Después de recibir un golpe, un espejo rectangular de base 1 y altura 2 se ha roto en una de sus esquinas y ha perdido un trozo en forma triangular de lados $0 < a < 2$ y $0 < b < 1$ (véase figura abajo). Pretendemos conseguir otro espejo rectangular cortando el trozo restante mediante dos paralelas a los lado (ver línea discontinua de la figura inferior). Calcular las dimensiones del espejo rectangular de mayor área que podemos conseguir de esta forma.



3.) Sea $f(x)$ la función cuya gráfica es la línea recta que pasa por los puntos $(0,r)$ y (h,R), donde $r,R,h \in \mathbb{R}^+$. Cuando giramos la gráfica de f entre 0 y h alrededor del eje OX obtenemos un tronco de cono de radios r,R y altura h. Obtener, mediante la fórmula del volumen de un sólido de revolución, el volumen de dicho tronco de cono.

Ingeniero Técnico en Informática de Gestión y de Sistemas

ANÁLISIS MATEMÁTICO. FEBRERO DE 2006

Problema 1. [2 puntos]

(a) Demuéstrese que $\;\mathrm{e}\log(x) \leqslant x\;$ para todo $x > 0$.

(b) Demuéstrese, usando el apartado anterior si se quiere, que $\;\mathrm{e}^{x/\mathrm{e}} \geqslant x\;$ para todo $x > 0$.

(c) Decidir razonadamente, usando de nuevo el apartado (a) si se quiere, cuál de los siguientes números es mayor: $\mathrm{e}^{\sqrt{5}}$ ó $\sqrt{5}^{\,\mathrm{e}}$.

Problema 2. [2 puntos] Calcula el volumen generado al girar alrededor del eje OX la gráfica de la función $f(x) = \cosh(x)$ con $x \in [0, \sqrt{7}]$.
Nota: $\cosh(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$.

Problema 3. [2 puntos] Halla los puntos de la curva

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

que están más próximos al origen de coordenadas.

Problema 4. [2 puntos] Calcula la integral

$$\iiint_A \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, d(x,y) \qquad \text{donde } A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2+y^2 \leqslant 2x,\; x \leqslant y\right\}.$$

Granada, 10 de febrero de 2006.

Ingeniero Técnico en Informática de Gestión y de Sistemas

ANÁLISIS MATEMÁTICO. SEPTIEMBRE DE 2006

Problema 1. Demuéstrese que la desigualdad

$$1 + x < e^x < \frac{1}{1-x}$$

se verifica para todo $x \in (0,1)$.

Problema 2. Usando un desarrollo de Taylor adecuado de la función $f(x) = \log(1+x)$, aproximar $\log(1{,}25)$ con un error menor que 10^{-3}.

Problema 3. Calcúlense los extremos absolutos y relativos de la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = x^2 + 4xy + y^2,$$

en el conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ : \ x^2 + y^2 \leqslant 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R} \times R^- : \ -2 \leqslant 2x + y, \ 2x - y \leqslant 2\}.$$

Problema 4. Calcular el volumen formado por la intersección de las esferas

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$$

$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2z\}.$$

Granada, 11 de septiembre de 2006.

Ingeniero en Informática, Ingeniero Técnico en Informática de Gestión y de Sistemas

ANÁLISIS MATEMÁTICO.
CONVOCATORIA ORDINARIA DE FEBRERO DE 2007

Problema 1. Consideremos la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\frac{3}{2}x^4-2x^3-6x^2 \qquad \big(x\in\mathbb{R}\big).$$

Se pide:

(a) Calcular la imagen de la función f.

(b) Calcular el número de soluciones de la ecuación

$$f(x)=m$$

según los valores del parámetro $m\in\mathbb{R}$.

Problema 2. Consideremos la función

$$f(x)=\frac{-\log(x)}{x^{1/4}} \qquad \big(x\in]0,1]\big).$$

Se pide:

(a) Calcular el volumen obtenido al girar la gráfica bajo la función f respecto del eje OX.

(b) Calcular el volumen obtenido al girar la gráfica bajo la función f respecto del eje OY.

Problema 3. Calcúlense los extremos absolutos de la función $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y)=\mathrm{e}^{-xy},$$

en el conjunto

$$\Omega=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+4y^2\leqslant 8\big\}.$$

Problema 4. Calcúlese el área del conjunto

$$A=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ (x-1)^2+y^2\leqslant 1,\ x^2+(y-1)^2\leqslant 1\big\}.$$

Granada, 16 de febrero de 2007.

Ingeniero en Informática, Ingeniero Técnico en Informática de Gestión y de Sistemas

ANÁLISIS MATEMÁTICO. SEPTIEMBRE DE 2007

Problema 1. Sea $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{x}{2}\left[\operatorname{sen}(\log(x)) - \cos(\log(x))\right].$$

a) Calcular los puntos críticos de f.

b) Clasificar los puntos críticos obtenidos en el apartado anterior.

c) Calcular la imagen de f.

Problema 2. Usando un desarrollo de Taylor adecuado de la función

$$f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

aproximar el valor de $\cosh(0{,}5)$ con un error menor que 10^{-3}.

Problema 3. Consideremos la función

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x,y) = 3(x^2-1)y - 2x^4.$$

a) Calcular y clasificar los puntos críticos de f.

b) Calcular los extremos absolutos de f en el conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leqslant 2, y \geqslant x^2\}.$$

Problema 4. Calcular

$$\int_A x^3 y \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y^2}{x}\right) d(x,y),$$

siendo

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\}.$$

Granada, 17 de Septiembre de 2007.