

Integración

1 Integrales inmediatas

Ejercicio 1

- a) $\int 5a^2x^6 dx$
- b) $\int x(x+a)(x+b)dx$
- c) $\int (a+bx^3)^2 dx$
- d) $\int \frac{dx}{\frac{n}{x}}$
- e) $\int (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3 dx$
- f) $\int \frac{x^2+1}{x-1} dx$

Ejercicio 2

- a) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$
- b) $\int \frac{x}{\sqrt{a^4-x^4}} dx$
- c) $\int 4^{2-3x} dx$
- d) $\int x7^{x^2} dx$
- e) $\int x\sqrt{5-x^2} dx$

Ejercicio 3

- a) $\int 2\sinh(5x) - \cosh(5x) dx$
 - b) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln(x)}}{x} dx$
 - c) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$
 - d) $\int \frac{dx}{e^x+1}$
 - e) $\int x(2x+5)^{10} dx$
-

2 Integración por partes

Ejercicio 4

- a) $\int \ln(x) dx$
- b) $\int \arctan(x) dx$
- c) $\int \arcsen(x) dx$
- d) $\int x\sen(x) dx$
- e) $\int xe^{-x} dx$
- f) $\int x^2e^{3x} dx$
- g) $\int x\sen(x)\cos(x) dx$

Ejercicio 5

- a) $\int x^2 \ln(x) dx$
 b) $\int \ln^2(x) dx$
 c) $\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$
 d) $\int x \arctan(x) dx$
 e) $\int x \arcsen(x) dx$
 f) $\int \frac{x}{\sen^2(x)} dx$
-

3 Integración de funciones racionales**Ejercicio 6**

- a) $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$
 b) $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} dx$
 c) $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} dx$
 d) $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$
 e) $\int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}$

Ejercicio 7

- a) $\int \frac{dx}{x^3+1}$
 b) $\int \frac{dx}{x^4+1}$
 c) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$
 d) $\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$
-

4 Integración de funciones trigonométricas**Ejercicio 8**

- a) $\int \cos^3(x) dx$
 b) $\int \sen^5(x) dx$
 c) $\int \sen^2(x) \cos^3(x) dx$
 d) $\int \frac{\cos^5(x)}{\sen^3(x)} dx$
 e) $\int \sen^2(x) \cos^2(x) dx$
 f) $\int \cos^6(3x) dx$

Ejercicio 9

- a) $\int \frac{dx}{\cos^4(x)}$
 b) $\int \frac{\cos^2(x)}{\sen^6(x)} dx$

c) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2(x) \cos^4(x)}$

d) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^5(x) \cos^3(x)}$

e) $\int \tan^5(5x) dx$

f) $\int \cotan^3(x) dx$

Ejercicio 10

a) $\int x \operatorname{sen}^2(x^2) dx$

b) $\int \operatorname{sen}(9x) \operatorname{sen}(x) dx$

c) $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen}(x) + \cos(x)}$

d) $\int \frac{dx}{3 + 5 \cos(x)}$

e) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x) + \cos(x)}$

Ejercicio 11

a) $\int \frac{\cos(x)}{1 + \cos(x)} dx$

b) $\int \frac{1 + \tan(x)}{1 - \tan(x)} dx$

c) $\int \frac{dx}{1 + \cos^2(3x)}$

d) $\int \frac{dx}{3 \operatorname{sen}^2(x) + 5 \cos^2(x)}$

e) $\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{1 + \operatorname{sen}^2(x)} dx$

5 Integración de funciones irracionales**Ejercicio 12**

a) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

d) $\int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx$

Ejercicio 13

a) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$

b) $\int \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2 - 1}}$

c) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

d) $\int \frac{x^6}{\sqrt{1 + x^2}} dx$

6 Integración de funciones hiperbólicas**Ejercicio 14**

- a) $\int \sinh^3(x) dx$
 b) $\int \cosh^4(x) dx$
 c) $\int \sinh^3(x) \cosh(x) dx$
 d) $\int \sinh^2(x) \cosh^2(x) dx$
 e) $\int \tanh^3(x) dx$
 f) $\int \frac{dx}{\sinh(x) \cosh^2(x)}$
 g) $\int \frac{dx}{2\sinh(x) + 3\cosh(x)}$
-

7 Un poco de todo

Ejercicio 15

- a) $\int \sqrt{3 - 2x - x^2} dx$
 b) $\int \sqrt{2 + x^2} dx$
 c) $\int \sqrt{x^2 + x} dx$

Ejercicio 16

- a) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$
 b) $\int \frac{dx}{2x^2 - 4x + 9}$
 c) $\int \frac{x^3}{x^2 + x + \frac{1}{2}} dx$
 d) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$

Ejercicio 17

- a) $\int \frac{x dx}{(x^2 - x + 1)^2}$
 b) $\int \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{x^3} dx$
 c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$
 d) $\int \frac{1 - \sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}} dx$

Ejercicio 18

- a) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x} + \sqrt{5-x}}$
 b) $\int \frac{dx}{\cos(x) \operatorname{sen}^5(x)}$
 c) $\int \tan^3\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) dx$
 d) $\int \frac{dx}{\cos^2(x) + 2\operatorname{sen}(x) \cos(x) + 2\operatorname{sen}^2(x)}$

Ejercicio 19

- a) $\int x \operatorname{sen}^2(x) dx$
 b) $\int x e^{2x} dx$
 c) $\int \operatorname{senh}(x) \cosh(x) dx$
 d) $\int |x| dx$

Ejercicio 20

Hallar las derivadas de cada una de las funciones siguientes:

a) $F(x) = \int_a^x \operatorname{sen}^3(t) dt$

b) $F(x) = \int_x^b \frac{1}{1+t^2 + \operatorname{sen}^2(t)} dt.$

c) $F(x) = \int_a^b \frac{x}{1+t^2 + \operatorname{sen}^2(t)} dt$

Ejercicio 21

Calcular las siguientes áreas:

a) Área limitada por las curvas $y = x^2$ y $y^2 = 8x$

b) Área limitada por $y = xe^{-x^2}$, el eje OX , la ordenada en el punto $x = 0$ y la ordenada en el máximo.

c) Área de la figura limitada por la curva $y = x(x-1)(x-2)$ y el eje OX .

Ejercicio 22

Calcular las siguientes áreas:

a) Área comprendida entre la curva $y = \tan(x)$, el eje OX y la recta $x = \pi/3$.

b) Área del recinto limitado por las rectas $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ y la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$

c) Área de la superficie obtenida por la revolución de la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $x = 5$ alrededor del eje OX .

Ejercicio 23

Al girar alrededor del eje OX , el segmento de curva $y = \sqrt{x}$ comprendido entre las abscisas 0 y a , engendra un tronco de paraboloides de revolución cuya superficie equivale a la de una esfera de radio $\sqrt{13}/12$. Hállese el valor de a .

Ejercicio 24

Hallar la longitud de las siguientes curvas:

a) $y = \frac{x^4+48}{24x}$ en $[2, 4]$

b) $y = \ln(1-x^2)$ en $[1/3, 2/3]$.

c) Hallar la longitud de la catenaria. Ecuación :

$$f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}a(e^{x/a} + e^{-x/a})$$

Ejercicio 25

Probar las siguientes igualdades:

a) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{\pi}{2}$

b) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}(x)}} dx = 2$

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \frac{\pi}{2}$

Ejercicio 26

Probar las siguientes igualdades:

$$a) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2$$

$$b) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^2} = \frac{1}{\ln(2)}$$

$$c) \int_0^1 \ln x dx = -1$$

Ejercicio 27

La curva $y = \sin^2(x)$, $x \in [0, \pi]$, gira en torno al eje OX determinando un sólido. Calcular su volumen.

Ejercicio 28

Hallar el volumen generado al girar alrededor del eje OX la gráfica de $f(x) = \frac{18x}{x^2+9}$.

Ejercicio 29

Hallar el área del recinto limitado por las gráficas de $f(x) = \cosh(x)$ y $g(x) = \sinh(x)$, en el primer cuadrante.

Ejercicio 30

Calcular el volumen del sólido generado al girar la región limitada por $x = y^2$ e $y = x^2$

a) alrededor del eje OX .

b) alrededor del eje OY .

Ejercicio 31

Idéntico ejercicio que el anterior para la región limitada por las rectas $y = 1$, $x = 1$ y la curva $y = x^3 + 2x + 1$.

Ejercicio 32

Hallar el área comprendida entre el eje de abscisas y la parábola $y = 4x - x^2$.

Ejercicio 33

Hallar el área comprendida entre el eje de abscisas y la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$.

Ejercicio 34

Hallar el área comprendida entre las parábolas $y = 6x - x^2$, $y = x^2 - 2x$.

Ejercicio 35

Hallar el área de la intersección de los círculos $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 4x$.

Ejercicio 36

Hallar el área limitada por $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 0$, $x = 2$.

Ejercicio 37

Hállese la longitud del arco de curva $x = \frac{1}{3y^3} + \frac{1}{4y}$ desde $y = 1$ hasta $y = 3$.

Ejercicio 38

Hállese la longitud del arco de la curva $9x^2 = 4y^3$ entre los puntos $(0, 0)$ y $(2\sqrt{3}, 3)$.

Ejercicio 39

Hallar la longitud del arco de la curva $y = x^{\frac{2}{3}}$ desde $x = 0$ hasta $x = 5$.

Ejercicio 40

Hallar la longitud de la curva $y = e^x$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

Ejercicio 41

Hallar el volumen del sólido de revolución generado al girar alrededor del eje OX el arco de la curva $y = \sin(x)$ comprendido entre $x = 0$ y $x = 2\pi$.

Ejercicio 42

Hallar el volumen del sólido de revolución generado al girar alrededor del eje OY el arco de la curva $y = \sin(x)$ comprendido entre $x = 0$ y $x = \pi$.

Ejercicio 43

Hallar el volumen del elipsoide engendrado por la rotación de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ alrededor del eje OX ($a > 0$, $b > 0$).

Ejercicio 44

Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje OX la curva $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ entre $x = 1$ y $x = -1$.

Ejercicio 45

Hallar el volumen de los cuerpos engendrados al girar $y = e^x$ entre $x = 0$ y $x = 1$ alrededor de: a) el eje OX, b) el eje OY.

Ejercicio 46

Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje OX la superficie comprendida entre las curvas $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

Ejercicio 47

Hallar el área de la superficie generada al girar la curva $y = x^3$ alrededor del eje OX entre $x = 0$ y $x = 1$.

Ejercicio 48

Hallar el área de la superficie generada al girar la curva $y = x^2$ alrededor del eje OY entre $y = 0$ y $y = \sqrt{2}$.

Ejercicio 49

Hallar mediante integración el área y volumen de un cono circular recto de altura h y con base de radio r .

Ejercicio 50

Hallar el volumen del sólido S que se genera al girar alrededor del eje x la región bajo la curva $y = x^2 + 1$ en $[0, 2]$.

Ejercicio 51

Hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene girando la gráfica de la función $f(x) = x^3 + x^2 + 1$, limitado por las rectas $x = 1$, $x = 3$ e $y = 0$ alrededor de

- a) el eje OX
- b) el eje OY