Derivación

1 Ejercicios conocidos

Ejercicio 1

Calcular la tangente de las siguientes curvas en los puntos dados:

a) $y = x^2 + 1$ en $(3, 10)$
b) $y = \cos(x)$ en $(\pi/2, 0)$
c) $y = |x|$ en $(1, 1)$
d) $y = \frac{x}{x^2+1}$ en el origen.

Ejercicio 2

Calcular la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \operatorname{sen}(x + 3)$
b) $y = \cos^2(x)$
c) $y = \frac{1}{\cos(x)}$
d) $y = \sec(x)$
e) $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
f) $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

Ejercicio 3

Calcular la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \left(\sqrt[5]{x} - \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^5$.
b) $f(x) = \cos(\cos(\cos(x)))$.
c) $f(x) = x^4 e^x \ln(x)$.
d) $f(x) = x^x$.
e) $f(x) = \sqrt{x}^{\sqrt{x}}$.
f) $f(x) = \frac{1}{2} x\, |x|$.

Ejercicio 4

Calcular los puntos donde la recta tangente a la curva $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 40$ es paralela al eje OX.

Ejercicio 5

Dibújense las gráficas de las siguientes funciones indicando los máximos, mínimos y puntos de inflexión.

a) $y = 6 - 2x - x^2$
b) $y = 3x^4 - 4x^3$
c) $y = (x - 1)^3$

Ejercicio 6

Calcular dos números positivos cuya suma sea 20 y su producto sea máximo.

Ejercicio 7

Calcular las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo de radio r.

Ejercicio 8

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}$

b) $\lim_{x\to \pi/2^-} \frac{2x-\pi}{\cos(x)}$

c) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$

---

2 Definición. Reglas de derivación

Ejercicio 9

Sea $f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{\ln(1-\operatorname{sen}(x)) - 2\ln(\cos(x))}{\operatorname{sen}(x)},$$

si $x \neq 0$ y $f(0) = a$. Estudiar para qué valor de a la función f es continua en cero.

---

3 Teorema del valor medio

Ejercicio 10

Probar que $\operatorname{arcsen}(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ para todo $x \in [-1,1]$.

Ejercicio 11

Demostrar que la desigualdad $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ se verifica para todo $x > 0$.

Ejercicio 12

Demostrar que $\left|\operatorname{sen}(ax) - \operatorname{sen}(ay)\right| \leq |a|\,\left|x-y\right|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 13

Demostrar que $\left|\arctan(x) - \arctan(y)\right| \leq \left|x-y\right|$, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 14

Calcular el número de ceros y la imagen de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$.

Ejercicio 15

Probar que para $0 < a < 1$ se verifica $(1+x)^a \leq 1 + ax, \quad \forall x \geq -1$.

Ejercicio 16

Calcular el número de soluciones de la ecuación $3\ln(x) - x = 0$.

Ejercicio 17

Calcular la imagen de $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{1/x}$.

Ejercicio 18

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a^2 < 3b$. Probar que la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ tiene una solución real única.

Ejercicio 19

Determinar el número de raíces reales de la ecuación $3x^5 + 5x^3 - 30x = m$ según el valor de m.

Ejercicio 20

Estudiar los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en los siguientes casos

a)

$$f(x) = \begin{cases} x \ln|x|, & \text{si } x \in \mathbb{R}^*, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x|, & \text{si } x \in \mathbb{R}^*, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

4 Reglas de L'Hôpital

Ejercicio 21

Calcular los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)+3x-1}{2x}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2\cos(x)}{x\operatorname{sen}(2x)}$.

c) $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^a-a^x}{a^x-a^a}$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}$.

Ejercicio 22

Estudiar el comportamiento de la función $f : A \to \mathbb{R}$ en el punto α en cada uno de los siguientes casos:

a) $A =]2, +\infty[$, $f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}$, $\alpha = 2$.

b) $A = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $f(x) = \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1}$, $\alpha = 1$.

c) $A =]1, +\infty[$, $f(x) = \frac{x^x-x}{1-x-\ln(x)}$, $\alpha = 1$.

Ejercicio 23

Estudiar el comportamiento en $+\infty$ de las funciones $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dadas por

a) $f(x) = \frac{\ln(2+3e^x)}{\sqrt{2+3x^2}}$,

b) $g(x) = (a^x + x)^{1/x}$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$, donde $a \in \mathbb{R}^+$.

Ejercicio 24

Estudiar el comportamiento en el punto cero de la función $f : A \to \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

a) $A = \mathbb{R}^+$, $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{\sqrt{x}}$,

b) $A = \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x^2}$,

c) $A =]0, \frac{\pi}{2}[$, $f(x) = (\operatorname{sen}(x) + \cos(x))^{1/x}$

d) $A =]0, \frac{\pi}{2}[$, $f(x) = \left(\cos(x) + \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Ejercicio 25

Estudiar el comportamiento en el punto cero de la función $f : A \to \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

a) $A =]0, \frac{\pi}{2}[$, $f(x) = (1 - \tan(x))^{\frac{1}{x^2}}$,

b) $A = \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^{\operatorname{sen}(x)}$,

c) $A =]0, \frac{\pi}{2}[$, $f(x) = \frac{x-\arctan(x)}{\operatorname{sen}^3(x)}$.

5 Optimización

Ejercicio 26

Estudiar los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \cosh(x) + \cos(x)$.

Ejercicio 27

Calcular $\max \{ \sqrt[n]{n} : n \in \mathbb{N} \}$.

Ejercicio 28

Demostrar que la suma de un número positivo y su recíproco es al menos 2.

Ejercicio 29

Una caja abierta está construida con un rectángulo de cartón, quitando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse con ese procedimiento si el rectángulo tiene como lados

a) 10 y 10,

b) 12 y 18.

Ejercicio 30

Durante la tos, el diámetro de la tráquea disminuye. La velocidad v del aire en la tráquea durante la tos se relaciona con el radio, r, mediante la ecuación $v = Ar^2(r_0 - r)$, donde A es una constante y r_0 es el radio en estado de relajación. Determínese el radio de la tráquea cuando la velocidad es máxima, así como esta velocidad.

Ejercicio 31

Se desea construir una ventana con forma de rectángulo coronado de un semicírculo de diámetro igual a la base del rectángulo. Pondremos cristal blanco en la parte rectangular y cristal de color en el semicírculo. Sabiendo que el cristal coloreado deja pasar la mitad de luz (por unidad de superficie) que el blanco, calcular las dimensiones de la ventana para conseguir la máxima luminosidad si se ha de mantener un perímetro constante dado.

Ejercicio 32

Se inscribe un rectángulo en la elipse $\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{225} = 1$ con sus lados paralelos a los ejes. Hallar las dimensiones del rectángulo para que **(a)** el área sea máxima, **(b)** el perímetro sea máximo.

Ejercicio 33

Se desea confeccionar una tienda de campaña cónica de un volumen determinado. Calcular sus dimensiones para que la cantidad de lona necesaria sea mínima.

Ejercicio 34

Demostrar que de todos los triángulos isósceles que se pueden circunscribir a una circunferencia de radio r, el de área mínima es el equilátero de altura $3r$.

Ejercicio 35

Atamos el extremo de una cuerda de longitud L a una columna de radio R mediante un nudo corredizo. Calcular la máxima distancia posible del otro extremo al centro de la columna.

Ejercicio 36

Hallar las dimensiones del cilindro de mayor volumen entre todos aquellos que tienen la superficie lateral total constante.

Ejercicio 37

Se desea construir un silo, con un volumen V determinado, que tenga la forma de un cilindro rematado por una semiesfera. El costo de construcción (por unidad de superficie) es doble para la semiesfera que para el cilindro (la base es gratis). Determínense las dimensiones óptimas para minimizar el costo de construcción.

Ejercicio 38

Se proyecta un jardín de forma de sector circular de radio R y ángulo central θ. El área del jardín ha de ser A fija. ¿Qué valores de R y θ hacen mínimo el perímetro que bordea el jardín?

Ejercicio 39

Una persona desea cortar un pedazo de alambre de longitud L en dos trozos. Uno de ellos se va a doblar en forma de circunferencia, y el otro en forma de cuadrado. ¿Cómo debe cortar el alambre para que la suma de áreas sea mínima? ¿Y máxima?

---

6 Polinomio de Taylor

Ejercicio 40

Probar que las funciones exponencial, seno y coseno son de clase C^∞ en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 41

Expresar el polinomio $x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 7x + 6$ en potencias de $(x-2)$.

Ejercicio 42

Calcular un valor aproximado del número real α con un error menor de 10^{-2} en cada uno de los casos siguientes:

a) $\alpha = \sqrt{e}$,
b) $\alpha = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Ejercicio 43

Utilizar el polinomio de Taylor para calcular $\sqrt{102}$ con un error menor que 10^{-2}.

Ejercicio 44

Utilizar el polinomio de Taylor para calcular $\sqrt[3]{28}$ con un error menor que 10^{-2}.

Ejercicio 45

Estudiar el comportamiento de la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ en el punto α en cada uno de los siguientes casos:

a) $A =]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\},\ f(x) = \frac{(\tan(x))(\arctan(x)) - x^2}{x^6},\ \alpha = 0$
b) $A = \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{1}{x^4} - \frac{1}{6x^2} - \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^5},\ \alpha = 0$

---

7 Ejercicios complementarios

Ejercicio 46

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Estudiar la continuidad y derivabilidad de f y calcular su imagen.

Ejercicio 47

Para $a > 0$ demostrar que $-ae\ln(x) \leq x^{-a} \quad \forall x > 0$.

Ejercicio 48

Estudiar la continuidad y derivabilidad en cero de la función $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (1 - e^{x^2})\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 49

Sea $a > 0$. Probar que $\frac{ea}{x} \leq e^{a/x}$, $\forall x > 0$ y se da la igualdad si, y sólo si, $x = a$.

Ejercicio 50

Estudiar continuidad, derivabilidad, crecimiento, extremos relativos y extremos absolutos de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin]-1,1[\\ e^{-(x-1)^{-2}} \cdot e^{-(x+1)^{-2}} & \text{si } x \in]-1,1[\end{cases}$$

Ejercicio 51

Sea $a > 0$ un número real que verifica $a^{x/a} \geq x \ \forall x > 0$. Probar que $a = e$.

Ejercicio 52

Estudiar la derivabilidad de la función $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (1+x)^{1/x}$ para $x \in \mathbb{R}^+$, $f(0) = e$.

Ejercicio 53

Sea $f : [-1/2, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x + e^x)^{1/x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = e^2$. Estudiar la continuidad y derivabilidad de f en cero.

Ejercicio 54

Calcular el área máxima de un rectángulo, que tiene dos vértices sobre una circunferencia de radio R y los otros dos sobre una cuerda dada de dicha circunferencia.

Ejercicio 55

Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables en todo $\mathbb{R}$ verificando

$$f'(x) = g(x), \quad g'(x) = -f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(0) = 0, \quad g(0) = 1.$$

Probar que f y g son, respectivamente, las funciones seno y coseno.

Ejercicio 56

Sea $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $\mathbb{R}^+$. Supongamos que f y f' tienen límite en $+\infty$. Probar que $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

Ejercicio 57

Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable, verificando que $f(0) = 0$ y que $|f'(x)| \leq |f(x)|, \ \forall x \in [0,1]$. Probar que $f(x) = 0, \ \forall x \in [0,1]$.

Ejercicio 58

Demostrar que para $0 < a < b$ se verifica $1 - \frac{a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b}{a} - 1$.

Ejercicio 59

Estudiar el comportamiento en $+\infty$ de la función $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x(x^{1/x} - 1)}{\ln(x)}$.

Ejercicio 60

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$ verificando $f(a) = f(b) = 0$. Probar que para todo número real λ existe un punto $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = \lambda f(c)$. (Indicación: Considérese la función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = e^{-\lambda x} f(x),\ \forall x \in [a,b]$).

Ejercicio 61

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ derivable y verificando $f(0) = 0$. Supongamos que la función f' es creciente. Probar que la función $g :]0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{f(x)}{x},\ \forall x \in]0,1]$ también es creciente.

Ejercicio 62

Dado un punto $P = (a,b)$ situado en el primer cuadrante del plano, determinar el segmento con extremos en los ejes coordenados y que pasa por P que tiene longitud mínima.

Ejercicio 63

¿Cuál es la longitud de la escalera más larga que puede hacerse pasar a través de la esquina, en ángulo recto, que forman dos corredores de anchuras respectivas a y b?

Ejercicio 64

Las palomas domésticas no suelen volar sobre extensiones grandes de agua a menos que se vean forzadas a ello, posiblemente porque se requiera más energía para mantener la altitud sobre el agua fría. Supongamos que se suelta una paloma desde un barco situado a 3 km de un punto A de la costa, y dicho punto de la costa está a 10 km del palomar. Si la paloma gasta dos veces más energía volando sobre el agua que sobre la tierra firme y sigue un camino que hace mínima la energía gastada, determínese el punto dónde la paloma abandona el agua.