Límites y continuidad

Ejercicio 1

Calcular los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{7x+4}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x+3}{2x^2+1}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

d) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+4}{x-2}$

Ejercicio 2

Si $f(x) = 1/x$ y $g(x) = 1/\sqrt{x}$, ¿cuáles son los dominios naturales de f, g, $f+g$, $f\cdot g$ y de las composiciones $f\circ g$ y $g\circ f$?

Ejercicio 3

Calcular el dominio y la imagen de las siguientes funciones:

a. $y = \dfrac{1}{1+x}$

b. $y = \dfrac{1}{1+x^2}$

c. $y = \dfrac{1}{1+\sqrt{2x}}$

Ejercicio 4

a) Dar un ejemplo de una función continua cuya imagen no sea un intervalo.
b) Dar un ejemplo de una función definida en un intervalo cuya imagen sea un intervalo y que no sea continua.
c) Dar un ejemplo de una función continua en todo $\mathbb{R}$, no constante y cuya imagen sea un conjunto (obligatoriamente un intervalo) acotado.
d) Dar un ejemplo de una función continua en $[0,1[$ tal que $f([0,1[)$ no sea acotado.
e) Dar un ejemplo de una función continua definida en un intervalo abierto acotado y cuya imagen sea un intervalo cerrado y acotado.

Ejercicio 5

Sea $f:[0,1]\to[0,1]$ una función continua en $[0,1]$. Pruébese que f tiene un punto fijo: $\exists\, x \in [0,1] : f(x) = x$.

Ejercicio 6

Suponiendo que la temperatura varía de manera continua a lo largo del ecuador, pruébese que, en cualquier instante, existen dos puntos antípodas sobre el ecuador que se hallan a la misma temperatura.

Ejercicio 7

Un corredor recorre 6 kilómetros en 30 minutos. Probar que existe un intervalo de 5 minutos seguidos a lo largo del cual el corredor recorre exactamente 1 kilómetro.

Ejercicio 8

Un reloj averiado marca inicialmente un tiempo t_0. El reloj puede adelantar o atrasar, pero cuenta con exactitud períodos de 12 horas, es decir, pasadas doce horas el reloj marca un tiempo $t_0 + 12$ horas. Demuéstrese que en algún momento dicho reloj mide con exactitud una hora.

Ejercicio 9

Un escalador comienza, desde su campamento base, a subir a una montaña el sábado a las 7 horas, alcanzando la cima a las 8 de la tarde. A las 7 horas del domingo inicia el descenso hacia el campamento base tardando el mismo tiempo que le costó la subida. Demostrar que existe una determinada hora, a lo largo del domingo, en la que el escalador se encuentra exactamente a la misma altura que a esa misma hora del sábado.

Ejercicio 10

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por

a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{1/x}}, & \text{si } x \neq 0 \\ \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

b)

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x}, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \sqrt[5]{x}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de f y g en todo punto de $\mathbb{R}$ y la existencia de límites de f y g en $+\infty$ y $-\infty$.

Ejercicio 11

Probar que existe un número real positivo x tal que $\ln(x) + \sqrt{x} = 0$.

Ejercicio 12

Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^{\frac{1}{\ln(x)-1}}$, para todo $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$. Estudiar el comportamiento de f en $0, e, +\infty$.

Ejercicio 13

Probar que la ecuación $\tan(x) = x$ tiene infinitas soluciones.

Ejercicio 14

Sea $f :]0, \pi/2[\to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \left(\frac{1}{\tan(x)}\right)^{\operatorname{sen}(x)}$. Probar que f tiene límite en los puntos 0 y $\frac{\pi}{2}$ y calcular dichos límites.

Ejercicio 15

Sea $f :]0, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (1 + \operatorname{sen}(x))^{\operatorname{cotan}(x)}$. Estudiar la continuidad de f y su comportamiento en 0 y $\pi/2$.

Ejercicio 16

Determinar la imagen de la función $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \arctan(\ln|x|)$.

Ejercicio 17

Probar que la ecuación $x + e^x + \arctan(x) = 0$ tiene una sola raíz real. Dar un intervalo de longitud uno en el que se encuentre dicha raíz.