
Sucesiones de números reales

1 Sucesiones

Ejercicio 1. Prueba que si $|x| < 1$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1}{1-x}$.

Ejercicio 2. Sea a un número real positivo y definamos $x_1 = a$, $x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Probar que la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a cero.

Ejercicio 3. Demostrar que la sucesión $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{3x_n}$, $\forall n \geq 1$ es convergente y calcular su límite.

Ejercicio 4. Estudiar la convergencia de la sucesión definida como $a_1 = 2$ y $x_{n+1} = \frac{x_n^2+5}{6}$, para $n \geq 1$.

E **Ejercicio 5.** Se define la sucesión $\{x_n\}$ por recurrencia como $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{1+2x_n} - 1$. Calcula $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_{n+1}}$.

Ejercicio 6. Estudia la convergencia de la sucesión definida por recurrencia como $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n+1}$ para cualquier natural n .

Ejercicio 7. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por recurrencia como $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_{n+1} = x_n^2 + \frac{4}{25}$.

a) Demuestra que $\frac{1}{5} < x_n < \frac{4}{5}$ para cualquier natural n .

b) Demuestra que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente.

c) Calcula su límite.

Ejercicio 8. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Estudiar el comportamiento de la sucesión $x_1 = a$, $x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2+a}{2}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 9. Sea $a \leq 1$. Estudia la convergencia de la sucesión definida por recurrencia como $x_1 = a$, $x_{n+1} = 1 - \sqrt{1-x_n}$.

D **Ejercicio 10.** Estudia la convergencia de la sucesión definida por recurrencia como $x_1 = 2$, $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$.

2 Criterios de convergencia

Ejercicio 11. Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones y calcular su límite cuando exista:

a) $\left\{ \frac{1+2^4+3^4+\dots+n^4}{n^5} \right\}$,

b) $\left\{ \frac{1!+2!+3!+\dots+n!}{n!} \right\}$,

c) $\left\{ \frac{1+1/2+1/3+\dots+1/n}{n} \right\}$,

d) $\left\{ \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right\}$.

Ejercicio 12. Estudia la posible convergencia de las siguientes sucesiones y calcula su límite cuando exista:

- a) $\left\{ \frac{n^2 \sqrt{n}}{1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\dots+n\sqrt{n}} \right\}$,
 b) $\left\{ \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \right\}$,
 c) $\left\{ \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} \right\}$.

Ejercicio 13. Calcular el límite de las siguientes sucesiones.

- a) $\left\{ \frac{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}{\ln(n)} \right\}$,
 b) $\left\{ \frac{\ln(n+1)!}{\ln(n+1)^n} \right\}$,
 c) $\left\{ \left(\frac{n^2-5n+6}{n^2+2n+1} \right)^{\frac{n^2+5}{n+2}} \right\}$,
 d) $\{(1 + \ln(n + 1) - \ln(n))^n\}$.

Ejercicio 14. Calcular el límite de las siguientes sucesiones.

- a) $\left\{ \left(\frac{n+1}{n^2+n+5} \right)^{\frac{1}{1+\ln(n)}} \right\}$,
 b) $\left\{ \operatorname{sen} \left(\frac{1}{n} \right) \right\}$,
 c) $\left\{ \frac{\cos(\sqrt{n^2+1}) \ln(n)}{n} \right\}$.

Ejercicio 15. Calcula los siguientes límites

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2+1} \right)^{n^2+56n+5}$,
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n!)}{\sqrt{1+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}}}$
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{(2n)^{n+1}}}$

E **Ejercicio 16.** Calcula el siguiente límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \log \left(\frac{3n^2 + 2n + 1}{3n^2 + 5n} \right) \right)^{4n+1}.$$

E **Ejercicio 17.** Calcula el siguiente límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(1) + \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \dots + \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - n}{\log(n^3 + 1)}.$$

Ejercicio 18. Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$; estudiar el carácter de la sucesión $\{(a^n + b^n)^{1/n}\}$.