Números complejos

Ejercicio 1. Efectuar las operaciones indicadas:

a) $\frac{2-3i}{4-i}$

b) $\frac{(2+i)(3-2i)(1+2i)}{(1-i)^2}$

c) $(2i-1)^2\left(\frac{4}{1-i}+\frac{2-i}{1+i}\right)$

d) $\frac{i^4+i^9+i^{16}}{2-i^5+i^{10}-i^{15}}$

Ejercicio 2. Si $z_1 = 1-i$, $z_2 = -2+4i$, y $z_3 = \sqrt{3}-2i$, calcular las siguientes expresiones:

a) $z_1^2 + 2z_1 - 3$

b) $|2z_2 - 3z_1|^2$

c) $(z_3 - \overline{z_3})^5$

d) $|z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}|$

e) $\left|\frac{z_1+z_2+1}{z_1-z_2+i}\right|$

f) $|z_1^2 + \overline{z_2}^2|^2 + |\overline{z_3}^2 - z_2^2|^2$

Ejercicio 3. Calcular el módulo y el argumento de los números complejos:

a) 1

b) i

c) -1

d) $-i$

e) $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ejercicio 4. Expresa en forma polar los números complejos:

a) 3+3i

b) $-1+\sqrt{3}i$

c) -1

d) $-1-\sqrt{3}i$

Ejercicio 5. Calcula

a) $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5$

b) $\sqrt{2\sqrt{3}-2i}$

c) $(-4+4i)^{1/5}$

d) $(-16i)^{1/4}$

e) $i^{2/3}$

Ejercicio 6. Encuentra todas las soluciones de las ecuaciones:

a) $x^4 - 1 = 0$

b) $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 - 8x + 6 = 0$

Ejercicio 7. Resolver las ecuaciones

a) $z^4 - 81 = 0$,

b) $z^6 + 1 = \sqrt{3}i$,

c) $(z+i)^3 = 1$.

Ejercicio 8. Resolver la ecuación $(1+i)z^3 - 2i = 0$.

Ejercicio 9. Resolver la ecuación $z^5 = \overline{z}$

Ejercicio 10. Expresa los 8 números $\pm 1 \pm i$, $\pm\sqrt{3} \pm i$ en la forma $re^{i\varphi}$.

Ejercicio 11. Calcula $\log(z)$ y $\mathrm{Log}(z)$ cuando z es uno de los números siguientes

$$i,\ -i,\ e^{-3},\ e^{5i},\ 4,\ -5e,\ 1+i.$$

Ejercicio 1.12. Demostrar que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, para $n \in \mathbb{N}$.

1.1.2 Ejercicios complementarios

Ejercicio 1.1. Demostrar por inducción que todos los números de la forma $n^3 + 5n$ son divisibles por 6.

Ejercicio 1.2. Demostrar por inducción que todos los números de la forma $3^{2n} - 1$ son divisibles por 8.

Ejercicio 1.3. Pruébese que para todo natural $n \geq 2$ se verifica que 3 *no* divide a $n^3 - n + 1$.

Ejercicio 1.4. Pruébese que para todo natural $n \geq 2$ se verifica que: 5 divide a $n^5 - n$.

Ejercicio 1.5. Demostrar que $(1+x)^n > 1 + nx$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x > -1$.

Ejercicio 1.6. Demostrar que $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} > x^n + \frac{1}{x^n}$, para cualquier natural n y cualquier real x positivo distinto de uno.

Ejercicio 1.7. Probar que si $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, entonces se verifica que

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ejercicio 1.8. Demostrar que, dado un natural n, $\sqrt{n}$ es natural o irracional.

Ejercicio 1.9. Demostrar que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es irracional.