**Departamento de Análisis Matemático**

# FUNCIONES ELEMENTALES.

## 1. Polinomios

$p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$,
donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes reales.

Propiedades de los polinomios:

*a*) $p$ es continuo en todo $\mathbb{R}$.

*b*) $p$ es derivable en todo $\mathbb{R}$.

## 2. Funciones racionales

Una función racional es el cociente de dos polinomios. Concretamente: sean $p, q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos polinomios y sea

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ q(x) \neq 0\}.$$

Se define la función racional $R = \dfrac{p}{q} : A \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \forall\, x \in A.$$

Propiedades de las funciones racionales:

*a*) $R$ es continua en $A$.

*b*) $R$ es derivable en $A$.

## 3. Función exponencial

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ f(x) = e^x, \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$.
También se escribe $f(x) = \exp(x)$.

Propiedades de la función:

*a*) $f$ es continua en $\mathbb{R}$.

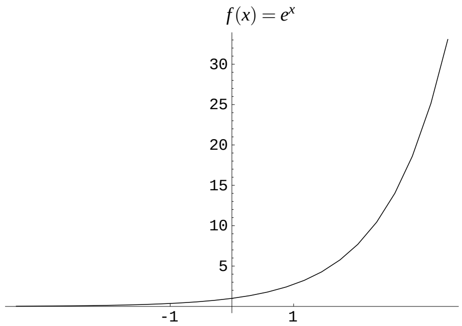
*b*) $f$ es derivable en $\mathbb{R}$, con $f'(x) = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

*c*) $f$ es estrictamente creciente.

*d*) La imagen de $f$ es $\mathbb{R}^+$.

*e*) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

*f*) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \qquad (e^{x+y} = e^x e^y)$.




## 4. Función logarítmica

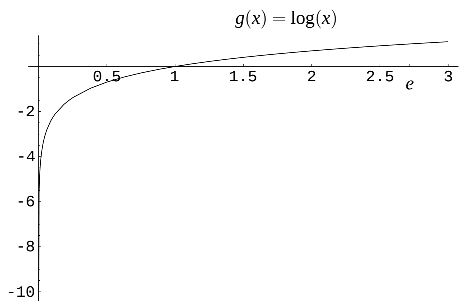
$g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \log(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}^+.$

La función logarítmica es la inversa de la función exponencial:

$$e^{\log(x)} = x \quad \text{y} \quad \log(e^x) = x.$$

Se suele utilizar la notación $g(y) = \log y$ o $g(y) = \ln y$ (en desuso, pero que puedes encontrarla en algunos libros). Se lee "logaritmo neperiano de $y$".

> **Nota:** Para nosotros los logaritmos siempre serán neperianos, es decir, con base "$e$". Más adelante veremos la notación que vamos a usar para logaritmos con otra base.




La función logaritmo tiene las siguientes propiedades:

*a*) $g$ es continua en $\mathbb{R}^+$.

*b*) $g$ es derivable en $\mathbb{R}^+$, con $g'(x) = \dfrac{1}{x}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

*c*) $g$ es estrictamente creciente.

*d*) $\lim\limits_{x \to 0} \log x = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} \log x = +\infty$.

*e*) $\log(xy) = \log(x) + \log(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^+$.
$\log\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^+$.
$\log\left(x^y\right) = y \log(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^+,\ y \in \mathbb{R}$.
$\log 1 = 0,\ \ \log(e) = 1$.

□ Haciendo uso de la siguiente fórmula se deducen las propiedades de las funciones potenciales y exponenciales:

$$\boxed{a^b = e^{\log(a^b)} = e^{b \log a},\ \ \forall a \in \mathbb{R}^+,\ b \in \mathbb{R}}$$

## 5. Función exponencial de base $a$ ($a > 0,\ a \neq 1$)

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ f(x) = a^x,\ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

*a*) $f$ continua en todo $\mathbb{R}$ y verifica $a^{x+y} = a^x a^y$.

*b*) $f$ es derivable en todo $\mathbb{R}$ con $f'(x) = a^x \log(a)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

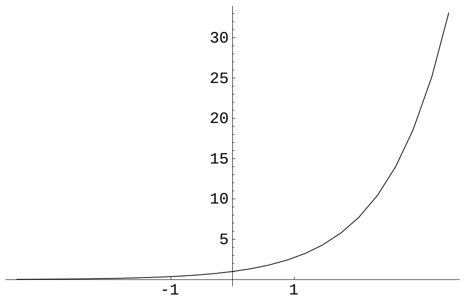
*c*) Si $a > 1$, $f$ es estrictamente creciente y verifica

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \quad \text{y} \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty.$$

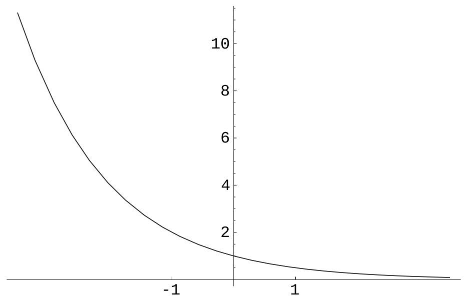
*d*) Si $a < 1$, $f$ es estrictamente decreciente y verifica

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty \quad \text{y} \lim_{x \to +\infty} a^x = 0.$$

$f(x) = a^x,\ a > 1$




$f(x) = a^x,\ a < 1$



6. **Función potencial de exponente b** $(b \neq 0)$

$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^b = e^{b \log x}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^+$.

*a*) $f$ es continua y verifica $(xy)^b = x^b y^b$.

*b*) $f$ es derivable en todo $\mathbb{R}$ con $f'(x) = b x^{b-1}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

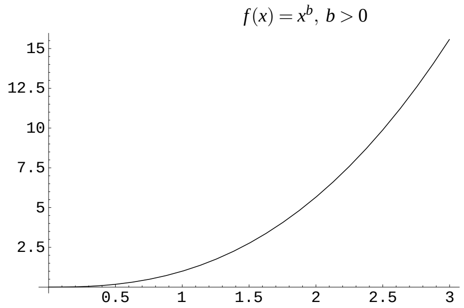
*c*) Si $b > 0$, $f$ es estrictamente creciente y

$$\lim_{x \to 0} x^b = 0 \quad \text{y} \lim_{x \to +\infty} x^b = +\infty.$$

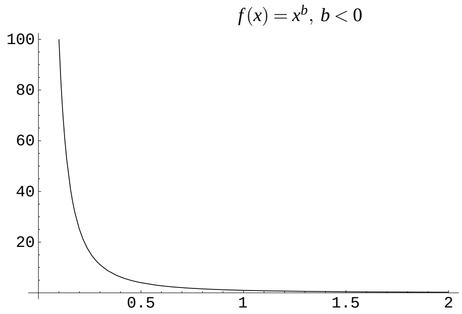
*d*) Si $b < 0$, $f$ es estrictamente decreciente y

$$\lim_{x \to 0} x^b = +\infty \quad \text{y} \lim_{x \to +\infty} x^b = 0.$$

$f(x) = x^b,\ b > 0$




$f(x) = x^b,\ b < 0$




7. **Función logarítmica de base a** $(a \neq 1)$

$g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $\;g(x) = \log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$ $\;\forall x \in \mathbb{R}^+$.

Tiene las siguientes propiedades:

*a*) $g$ es continua y derivable en $\mathbb{R}^+$, con $g'(x) = \dfrac{1}{x \log a}$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

*b*) $g$ es biyectiva de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$. Además $g$ es la inversa de la función exponencial de base $a$, es decir,

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{y} \quad a^{\log_a x} = x.$$

Verifica también que

$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^+$.

$\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^+$.

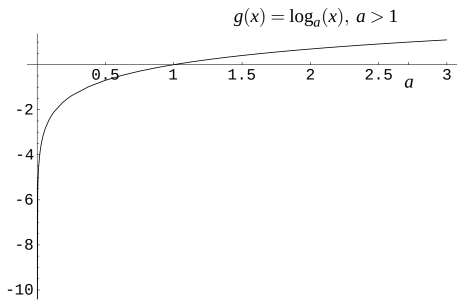
$\log_a\left(x^y\right) = y \log_a(x)$, $\;\forall\, x \in \mathbb{R}^+$, $y \in \mathbb{R}$.

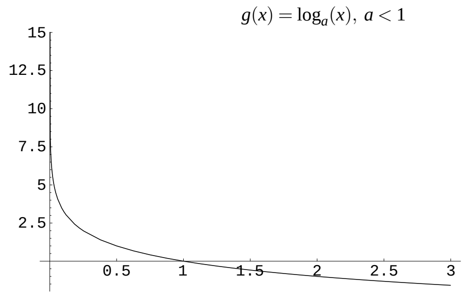
*c*) Si $a > 1$, $g$ es estrictamente creciente y

$$\lim_{x\to 0} \log_a x = -\infty, \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty.$$

*d*) Si $a < 1$, $g$ es estrictamente decreciente y

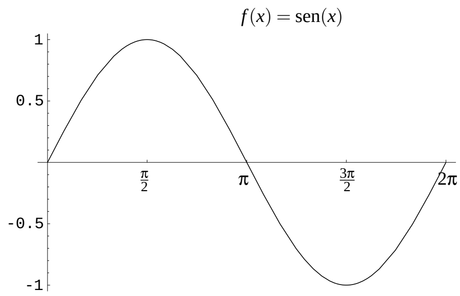
$$\lim_{x\to 0} \log_a x = +\infty, \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty.$$

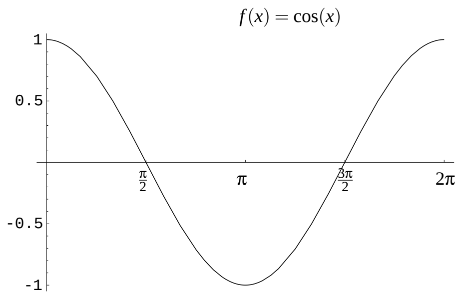



## 8. Funciones seno y coseno

$\text{sen} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad \cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ verifican:




*a*) Ambas funciones son continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$. Además, $\dfrac{d}{dx}\big(\text{sen}(x)\big) = \cos(x)$ y $\dfrac{d}{dx}\big(\cos(x)\big) = -\,\text{sen}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

*b*) $\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}\, x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, $\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ (son periódicas de periodo $2\pi$).

*c*) $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, $\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ (fórmula fundamental de trigonometría )

*d*) $\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ es una biyección estrictamente decreciente con $\cos\, 0 = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\cos \pi = -1$.

*e*) $\text{sen} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$ es una biyección estrictamente creciente con $\text{sen} -\frac{\pi}{2} = -1$, $\text{sen}\, 0 = 0$, $\text{sen}\, \frac{\pi}{2} = 1$.

*f*) La imagen, tanto de la función seno como de la función coseno, es el intervalo $[-1,1]$.

*g*) $\cos(-x) = \cos x,\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ (coseno es una función par).
$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x,\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ (seno es una función impar).

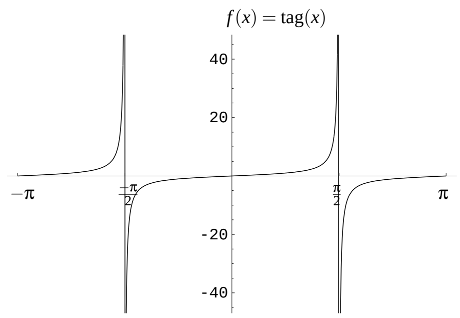
*h*) $\cos(x+\pi) = -\cos x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{sen}(x+\pi) = -\operatorname{sen} x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

*i*) Las funciones seno y coseno no tienen límite en $+\infty$ ni en $-\infty$.

*j*) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y,\ \forall\, x,y \in \mathbb{R}$
$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y,\ \forall\, x,y \in \mathbb{R}$
(Fórmulas de adición).

## 9. Función tangente

Como se verifica que $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$ entonces
$\operatorname{tg} : A \longrightarrow \mathbb{R},\ \ A = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + K\pi,\ K \in \mathbb{Z}\}$ definida por $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x},\ \forall\, x \in A$.




La función $\operatorname{tg} : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y derivable en todo $A$ con $\frac{d}{dx}\big(\operatorname{tg}(x)\big) = 1 + \operatorname{tg}^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ para todo $x \in A$.

*a*) $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x,\ \forall\, x \in A$.

*b*) $\operatorname{tg} : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función estrictamente creciente y además verifica que
$\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty, \quad \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty.$

## 10. Funciones secante, cosecante y cotangente

Como se verifica que $\operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$ se define el conjunto $B = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ y se pueden definir las funciones

$$\operatorname{cosec} : B \longrightarrow \mathbb{R},\ \ \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x},\ \forall\, x \in B$$

$$\sec : A \longrightarrow \mathbb{R}, \;\; \sec x = \frac{1}{\cos x}, \; \forall\, x \in A$$
$$\operatorname{cotg} : B \longrightarrow \mathbb{R}, \;\; \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \; \forall\, x \in B$$

Las funciones sec, cosec y cotg son continuas y derivables en sus respectivos dominios de definición. Sus derivadas pueden calcularse usando las reglas usuales para derivar cocientes.

## 11. Función arcoseno

Esta función es la inversa de la restricción de la función seno al intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, y por tanto

$$\operatorname{arc\,sen} : [-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

verificando que

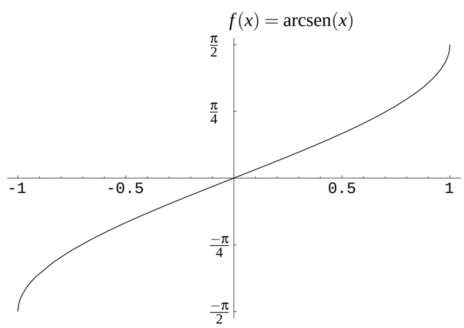
$$\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen}(x)) = x, \quad \forall x \in [-1,1].$$

Es biyectiva, continua y estrictamente creciente con

$$\operatorname{arc\,sen}(-1) = -\frac{\pi}{2}, \;\; \operatorname{arc\,sen}(0) = 0, \;\; \operatorname{arc\,sen}(1) = \frac{\pi}{2}$$

La función arcoseno es derivable en $]-1,1[$ con derivada

$$\frac{d}{dx}\big(\operatorname{arc\,sen}(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in ]-1,1[.$$




## 12. Función arcocoseno

Es la función inversa de la restricción de la función coseno al intervalo $[0,\pi]$, y por tanto

$$\operatorname{arc\,cos} : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$$

verificando que

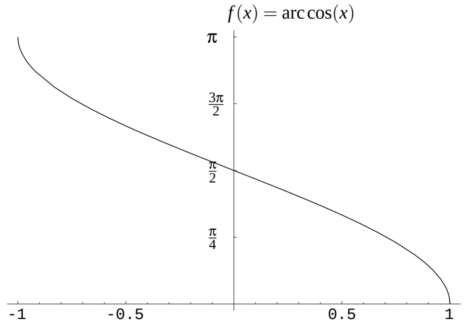
$$\cos(\operatorname{arc\,cos}(x)) = x, \quad \forall x \in [-1,1].$$

Esta función es biyectiva, continua y estrictamente decreciente con

$$\arccos(-1) = \pi, \quad \arccos(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \arccos(1) = 0$$

La función arcocoseno es derivable en $]-1,1[$ con derivada

$$\frac{d}{dx}\big(\arccos(x)\big) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in ]-1,1[.$$

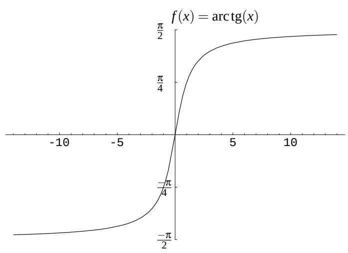



## 13. Función arcotangente

Es la inversa de la restricción de la función tangente al intervalo $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$; y por tanto

$$\operatorname{arc\,tg} : \mathbb{R} \longrightarrow ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$$

verificando que $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}(x)) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.




Esta función es biyectiva, continua y estrictamente creciente con

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,tg} x = -\frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arc\,tg} 0 = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2}$$

La función arcoseno es derivable en todo $\mathbb{R}$ con derivada

$$\frac{d}{dx}\big(\operatorname{arc\,tg}(x)\big) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in ]-1,1[.$$

## Identidades trigonométricas

### Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)=1$$

$$\operatorname{tg}^2(x)+1=\sec^2(x)$$

$$\operatorname{cotg}^2(x)+1=\operatorname{cosec}^2(x)$$

### Suma y diferencia de ángulos

$$\operatorname{sen}(x\pm y)=\operatorname{sen}x\cos y\pm\cos x\operatorname{sen}y$$

$$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y$$

$$\operatorname{tg}(x\pm y)=\frac{\operatorname{tg}x\pm\operatorname{tg}y}{1\mp\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$$

### Angulo doble

$$\operatorname{sen}2x=2\operatorname{sen}x\cos x$$

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1=1-2\operatorname{sen}^2 x$$

### Angulo mitad

$$\operatorname{sen}^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen}x}=\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}$$

### Producto

$$\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$$

$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)+\cos(x+y)]$$

$$\operatorname{sen}x\cos y=\frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)]$$

## 14. Funciones hiperbólicas

Se definen $\operatorname{senh},\cosh:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ como

$$\operatorname{senh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

*a*) Las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico son continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$, con derivada:

$$(\operatorname{senh}(x))' = \cosh(x) \qquad (\cosh(x))' = \operatorname{senh}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

*b*) $\operatorname{senh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $\cosh(\mathbb{R}) = [1, +\infty[$.

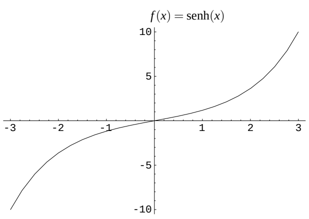
La función tangente hiperbólica, $\operatorname{tgh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, se define como

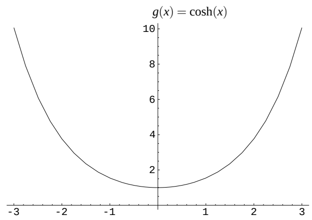
$$\operatorname{tgh}(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

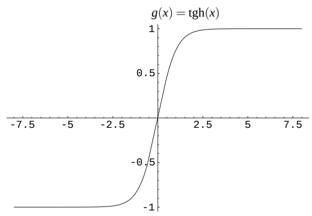
La función tgh es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ con

$$\frac{d}{dx}\big(\operatorname{tgh}(x)\big) = 1 - \operatorname{tgh}^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

También se tiene que $\operatorname{tgh}(\mathbb{R}) = ]-1, 1[$.




Por analogía con las funciones trigonométricas hablaremos de cotangente hiperbólica, secante y cosecante hiperbólica.

# Identidades hiperbólicas

$$\begin{aligned} \cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) &= 1 \\ \operatorname{tgh}^2(x) + \operatorname{sech}^2(x) &= 1 \\ \operatorname{cotgh}^2(x) - \operatorname{cosech}^2(x) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{senh}(x+y) &= \operatorname{senh}(x)\cosh(y) + \cosh(x)\operatorname{senh}(y) \\ \operatorname{senh}(x-y) &= \operatorname{senh}(x)\cosh(y) - \cosh(x)\operatorname{senh}(y) \\ \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y) \\ \cosh(x-y) &= \cosh(x)\cosh(y) - \operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y) \end{aligned}$$

$$\operatorname{senh}^2(x) = \frac{-1 + \cosh(2x)}{2} \qquad \cosh^2(x) = \frac{1 + \cosh(2x)}{2}$$

## 15. Funciones hiperbólicas inversas

La función seno hiperbólico es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$ cuya inversa, representada por, argsenh, (léase *argumento seno hiperbólico*) viene dada por:

$$\operatorname{argsenh} x = \log(x + \sqrt{x^2+1}) \quad (x \in \mathbb{R})$$

La función tangente hiperbólica es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre el intervalo $]-1,1[$ cuya inversa, representada por, argtgh, (léase *argumento tangente hiperbólica*) es la función definida en el intervalo $]-1,1[$ por:

$$\operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (-1 < x < 1)$$

La función coseno hiperbólico es inyectiva en $\mathbb{R}_0^+$ y su imagen es la semirrecta $[1,+\infty[$. La función, definida en $[1,+\infty[$, que a cada número $x \geqslant 1$ asigna el único número $y > 0$ tal que $\cosh y = x$, se llama *argumento coseno hiperbólico*, se representa por, argcosh, y viene dada por:

$$\operatorname{argcosh} x = \log(x + \sqrt{x^2-1}) \quad (x \geqslant 1)$$