RELACIÓN 5ª DE EJERCICIOS.
MATEMÁTICAS 1. INGENIERÍA QUÍMICA.

1. Resolver las siguientes integrales
   (a) $\int_0^1 \sqrt[3]{1-x^2}xdx \quad (=\frac{3}{8})$
   (b) $\int_0^{1/\sqrt{2}} \sqrt{x^2-2x^4}dx \quad (=\frac{1}{6})$
   (c) $\int_0^1 \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}dx \quad (=\frac{56}{15})$
   (d) $\int_0^1 \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}dx \quad (=\frac{1}{2})$
2. Probar que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen}x}}dx = 2$ y que $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \frac{1}{\ln 2}$
3. Probar que $\forall n \in \mathbf{N}$ se verifica que $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx = n!$
4. Calcular las siguientes integrales
   (a) $\int_0^t \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx \quad (=1-\sqrt{1+t^2}+t\ln(t+\sqrt{1+t^2}))$
   (b) $\int_{-1}^1 (\operatorname{arcsen}x)^2dx \quad (=-4+\frac{\pi^2}{2})$
5. Calcular las siguientes integrales utilizando el cambio de variable indicado en cada caso
   (a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen}^3x}{\cos^4x}dx \qquad x = arccost \quad (=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3})$
   (b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cox}^3x\operatorname{sen}^4xdx \qquad x = arcsent \quad (=\frac{2}{35})$
   (c) $\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen}^2x}{\cos^4x}dx \qquad x = arctg \quad (=\frac{2}{3})$
6. Calcular las siguientes integrales
   (a) $\int_0^{+\infty} \frac{3x^2+4x+6}{x^4+2x^3+5x^2+8x+4}dx \quad (=1+\frac{\pi}{2})$
   (b) $\int_0^1 \frac{x^3+2x^2-5x+10}{(x^2+1)(x-3)^2}dx \quad (=\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}+\ln\frac{2}{3})$
   (c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}x\operatorname{tg}^2xdx \quad (=-2+\frac{3}{\sqrt{2}})$
   (d) $\int_0^1 \cos^2(\ln x)dx \quad (=\frac{3}{5})$
7. Estudiar los intervalos de monotonía de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \int_0^{x^3+x^2} e^{-t^2}dt$$
8. Calcular el área de los recintos delimitados por las curvas de ecuación $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ e $y = x^2$

9. Calcular las siguientes integrales

   (a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2\text{sen}^2 x} \quad (= \frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}})$

   (b) $\int_2^3 \frac{\ln(\ln x)}{x} dx \quad (= \ln 3(\ln\ln 3 - 1) - \ln 2(\ln\ln 2 - 1))$

10. Calcular el siguiente límite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\int_1^{(x+1)e^x} \ln\,(t)\ \text{arctg}\,(t)\ dt}{x^2 e^x}$$

11. Resolver las siguientes integrales

   (a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen} x}{2-\text{sen} x} dx \quad (= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + (\frac{4\sqrt{3}-9}{18})\pi)$

   (b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+\cos x} \quad (= \frac{arctg(\frac{1}{\sqrt{2}})}{\sqrt{2}})$

   (c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\text{sen} x}{1+\cos x} dx \quad (= 1 - 2\ln\frac{1}{\sqrt{2}})$

12. El cuadrado con un vértice en el origen y el vértice opuesto en $(1,1)$ se divide en dos partes por cada una de las siguientes curvas. En cada ejemplo hallar la razón entre el área mayor y el área menor.

   (a) $y^2 = x^3$

   (b) $y = x^n, \quad n > 1$

   (c) $y = xe^{x-1}$

13. Probar que existen las siguientes integrales y que tienen el valor que se indica en cada caso:

   - $\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} = 1 + \ln(\frac{2}{1+e})$
   - $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}} = \arcsin(2/3) - \arcsin(7/12)$
   - $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \pi/2$
   - $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx = \pi/6$
   - $\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5} dx = \frac{3\pi+\ln 2}{10}$
   - $\int_0^{+\infty} \frac{x}{3+x^4} dx = \frac{\sqrt{3}\pi}{12}$
   - $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = \pi/2$
   - $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos(\beta x) dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$
   - $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin(\beta x) dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}, \quad \alpha > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}$
   - $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$
   - $\int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos x)^2 dx = 3\pi$

- $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin x|^3 dx = 4/3$
- $\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\cos^2\theta d\theta = \frac{\pi}{16}$
- $\int_0^1 \left(1-\rho^{2/3}\right)^{3/2} 3\rho d\rho = \frac{8}{35}$
- $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2+y^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}$
- $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(1+\sqrt{2})$
- $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+y)(1+yx^2)} = \frac{\pi}{2(1+y)\sqrt{y}}$
- $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \pi$