RELACIÓN 3ª DE EJERCICIOS.
MATEMÁTICAS 1. INGENIERÍA QUÍMICA.

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - x + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Probar, utilizando la definición, que f es derivable en cualquier punto de $\mathbb{R}$. Encontrar los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente tenga pendiente 2.

2. Sean $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Encontrar los valores de α y de β que hacen que el punto $(2, 4)$ esté en la gráfica de f y que la recta tangente a la misma en dicho punto sea la recta de ecuación $2x - y = 0$.

3. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Estudiar la continuidad y derivabilidad en 0 de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$
según los valores de α.

4. Estudiar la derivabilidad de $f : A \to \mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

   (a) $A = [-1, 1],\ f(x) = \sqrt{1 - x^2},\ \forall x \in A.$

   (b) $A = \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[3]{|x|},\ \forall x \in A.$

   (c) $A = \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2x}{1+|x|},\ \forall x \in A.$

   (d) $A = \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ \ln(1 + x) & x > 0 \end{cases}$

   (e) $A = \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 \ln |x| & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

5. Determinar la imagen de la función f en cada uno de los siguientes casos

   (a) $f : [0, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + 1,\ \forall x \in [0, 2]$

   (b) $f : [1, 2e] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\ln x}{x},\ \forall x \in [1, 2e]$

   (c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{1+x^2},\ \forall x \in \mathbb{R}$

6. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a^2 < 3b$. Probar que la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ tiene una única solución real.

7. Probar las siguientes desigualdades:

   (a) $1 + x \leq e^x \leq 1 + xe^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

   (b) $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1 + x) \leq x, \quad \forall x > -1.$

   (c) $-ae \ln x \leq x^{-a} \quad \forall x > 0 \ \ \forall a > 0$

(d) $(1+x)^a \leq 1+ax \quad \forall x \geq -1 \quad 0<a<1.$

(e) $\dfrac{ea}{x} \leq e^{a/x} \quad \forall x>0 \ \ \forall a>0$ y se da la igualdad si, y sólo si, $x=a$.

8. Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x+1}} & x<-1 \\ x(1-x) & -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2}\text{arcsen}x & 0 \leq x \leq 1 \\ \text{arctg}x & x>1 \end{cases}$$

Calcular su imagen.

9. Estudiar, en función del número real K, el número de soluciones de la ecuación

$$3\ln x = x+k$$

10. Estudiar el comportamiento en el punto cero de la función $f: A \to \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

a)

$$A=\mathbb{R}^+, \quad f(x)=\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, \qquad \forall x \in A$$

b)

$$A=\mathbb{R}^*, \qquad f(x)=\frac{1-cosx}{x^2}, \qquad \forall x \in A$$

c)

$$A=]0,\pi/2[, \qquad f(x)=(\sin x+\cos x)^{1/x}, \qquad \forall x \in A$$

d)

$$A=]0,\pi/2[, \qquad f(x)=\left(\cos x+\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}, \qquad \forall x \in A$$

e)

$$A=]0,\pi/2[, \qquad f(x)=(1-\tan x)^{\frac{1}{x^2}}, \qquad \forall x \in A$$

f)

$$A=\mathbb{R}^+, \qquad f(x)=x^{\sin x}, \qquad \forall x \in A$$

g)

$$A=]0,\pi/2[, \qquad f(x)=\frac{x-\arctan x}{\sin^3 x}, \qquad \forall x \in A$$

11. Estudiar el comportamiento en 0 de las siguientes funciones:

(a)

$$f:]0,\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}, \quad f(x)=\frac{\text{tg}(x)\text{sen}(\frac{1}{x})}{x}, \quad \forall x \in]0,\frac{\pi}{2}[$$

(b)

$$f :]0,\pi[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2 + \cos x - 1}{\operatorname{sen}^2 x}, \quad \forall x \in]0,\pi[$$

12. Estudiar el comportamiento de la función $f : A \to \mathbb{R}$ en el punto α en cada uno de los siguientes casos:

a)

$$A = \mathbb{R}^+ - \{1\}, \qquad f(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \qquad \forall x \in A, \quad \alpha = 1.$$

b)

$$A =]1, \to [, \qquad f(x) = \frac{x^x - x}{1 - x - \ln x} \qquad \forall x \in A, \quad \alpha = 1.$$

13. Estudiar el comportamiento en $+\infty$ de las funciones $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = \frac{\ln(2 + 3e^x)}{\sqrt{2 + 3x^2}}, \qquad g(x) = (a^x + x)^{1/x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

donde $a \in \mathbb{R}^+$.

14. Estudiar el comportamiento en $+\infty$ de la función definida por

$$f :]1, \to [\to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{x(x^{1/x} - 1)}{\ln x}.$$

15. Demostrar que, si $0 < a < b$, entonces $1 - \frac{a}{b} < \ln(\frac{b}{a}) < \frac{b}{a} - 1$.

16. Estudiar la continuidad y derivabilidad en 0 de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (1 - e^{x^2})\operatorname{sen}(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

17. Calcular el número de ceros de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Calcular su imagen.

18. Decidir razonadamente qué número es mayor, 999^{1000} o 1000^{999}?

19. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones derivables en todo $\mathbb{R}$ verificando

$$f'(x) = g(x), \qquad g'(x) = -f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(0) = 0, \quad g(0) = 1.$$

Probar que f y g son, respectivamente, las funciones seno y coseno.

20. Probar que

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

21. Calcular la imagen de $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{1/x}$.

22. Sea $a > 0$ un número real que verifica $a^{x/a} \geq x \quad \forall x > 0$. Probar que $a = e$.

23. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2+1}, & x \leq -1 \\ \frac{-2}{\pi}\text{arcsen}x, & -1 < x < 1 \\ \frac{\text{sen}x}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

Estudiar continuidad, derivabilidad y calcular la imagen de f.

24. Estudiar los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

a)

$$f(x) = x \ln |x|, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(0) = 0.$$

b)

$$f(x) = x^2 \ln |x|, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(0) = 0.$$

25. Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ una función derivable en $\mathbb{R}^+$. Supongamos que f y f' tienen límite en $+\infty$. Probar que

$$\lim_{x \to +\infty} f' = 0$$

26. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$ verificando $f(a) = f(b) = 0$. Probar que para todo número real λ existe un punto $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = \lambda f(c)$. (Indicación: Considérese la función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = e^{-\lambda x} f(x)$, $\forall x \in [a, b]$).

27. Estudiar las gráficas de las funciones siguientes:

    (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

    (b) $f : \mathbb{R}^+ \setminus \{\frac{1}{e}\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x}{1+\ln x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{\frac{1}{e}\}$.

28. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ derivable y verificando $f(0) = 0$. Supongamos que la función f' es creciente. Probar que la función $g :]0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $\forall x \in]0, 1]$ también es creciente.

29. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función derivable, verificando que $f(0) = 0$ y que $|f'(x)| \leq |f(x)|$, $\forall x \in [0, 1]$. Probar que $f(x) = 0$, $\forall x \in [0, 1]$.

30. ¿Cuál es la longitud de la escalera más larga que puede hacerse pasar a través de la esquina, en ángulo recto, que forman dos corredores de anchuras respectivas a y b?

31. Calcular el área máxima de un rectángulo, que tiene dos vértices sobre una circunferencia de radio R y los otros dos sobre una cuerda dada de dicha circunferencia.

32. Una caja abierta está construida con un rectángulo de cartón, quitando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse con ese procedimiento si el rectángulo tiene como lados **(a)** 10 y 10, **(b)** 12 y 18.

33. Se desea construir una ventana con forma de rectángulo coronado de un semicírculo de diámetro igual a la base del rectángulo. Pondremos cristal blanco en la parte rectangular y cristal de color en el semicírculo. Sabiendo que el cristal coloreado deja pasar la mitad de luz (por unidad de superficie) que el blanco, calcular las dimensiones de la ventana para conseguir la máxima luminosidad si se ha de mantener un perímetro constante dado.

34. Se traza la tangente en un punto de la elipse $x^2/25 + y^2/16 = 1$ de forma que el segmento (de dicha tangente) interceptado por los ejes sea mínimo. Demostrar que la longitud de dicho segmento es 9 unidades.

35. Se inscribe un rectángulo en la elipse $x^2/400 + y^2/225 = 1$ con sus lados paralelos a los ejes. Hallar las dimensiones del rectángulo para que **(a)** el área sea máxima, **(b)** el perímetro sea máximo.

36. Se desea confeccionar una tienda de campaña cónica de un volumen determinado. Calcular sus dimensiones para que la cantidad de lona necesaria sea mínima.

37. Demostrar que de todos los triángulos isósceles que se pueden circunscribir a una circunferencia de radio r, el de área mínima es el equilátero de altura $3r$.

38. Demostrar que la suma de un número positivo y su recíproco es al menos 2.

39. Hallar las dimensiones del cilindro de mayor volumen entre todos aquellos que tienen la superficie lateral total constante.

40. Se desea construir un silo, con un volumen V determinado, que tenga la forma de un cilindro rematado por una semiesfera. El costo de construcción (por unidad de superficie) es doble para la semiesfera que para el cilindro (la base es gratis). Determínense las dimensiones óptimas para minimizar el costo de construcción.

41. Una persona desea cortar un pedazo de alambre de 1 m. de largo en dos trozos. Uno de ellos se va a doblar en forma de circunferencia, y el otro en forma de cuadrado. ¿Cómo debe cortar el alambre para que la suma de áreas sea mínima?.

42. Un muro de 4 metros de altura está a 3 metros de la fachada de una casa. Hallar la escalera más corta que llegará desde el suelo hasta la casa por encima del muro.

43. Un automovilista entra en una autopista y recibe un talón marcado a las 1:15. Tras 141 km de viaje llega al siguiente puesto de peaje a las 2:15 horas, en el cual recibe una multa por exceso de velocidad. ¿Cómo demuestra el agente de tráfico la existencia de la infracción?.

44. Investigar la posibilidad de inscribir un cilindro circular recto de área total máxima en un cono circular recto de radio r y altura h.

45. Un cultivador de naranjas estima que, si planta 60 naranjos, obtendrá una cosecha media de 400 naranjas por árbol. Este número bajará 4 unidades por cada árbol más que se plante en el mismo terreno. Halle el número de árboles que hace máxima la cosecha.

46. Durante la tos, el diámetro de la tráquea disminuye. La velocidad v del aire en la tráquea durante la tos se relaciona con el radio, r, mediante la ecuación $v = Ar^2(r_0 - r)$, donde A es una constante y r_0 es el radio en estado de relajación. Determínese el radio de la tráquea cuando la velocidad es máxima, así como esta velocidad.

47. Una fábrica de plásticos recibe del Ayuntamiento de la ciudad un pedido de 8.000 tablas flotadoras para el programa de natación del verano. La fábrica posee 10 máquinas, cada una de las cuales produce 50 tablas por hora. El coste de preparar las máquinas para hacer el trabajo es de 800 EUROS por máquina. Una vez que las máquinas están preparadas, la operación es automática y puede ser supervisada por una sóla persona, que gana 35 EUROS/hora.

    (a) ¿Cuántas máquinas hay que usar para minimizar el coste de producción?

    (b) Si se usa el número óptimo de máquinas, ¿cuánto ganará el supervisor durante el proceso?.

48. Utilizar la fórmula infinitesimal del resto para estudiar el comportamiento en 0 de las funciones:

    (a)
    $$f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus\{0\} \to \mathbb{R}; \quad f(x) = \frac{(\mathrm{tg}x)(\mathrm{arctg}x) - x^2}{x^6}.$$

    (b)
    $$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}; \quad f(x) = \frac{1}{x^4} - \frac{1}{6x^2} - \frac{\mathrm{sen}x}{x^5}.$$

49. Calcular un valor aproximado del número real α con un error menor que 10^{-4} en cada uno de los siguientes casos:

    (a) $\sqrt[3]{7}$

    (b) sen $\frac{1}{2}$