RELACIÓN $2^{\underline{a}}$ DE EJERCICIOS.
MATEMÁTICAS 1. INGENIERÍA QUÍMICA.

1. Demostrar que se verifican las siguientes relaciones para cualquier natural:
   (a) $1 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1}$
   (b) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$
   (c) $1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
   (d) $\frac{2}{1} + \frac{4}{3} + \cdots + \frac{2n}{2n-1} > \sqrt{2n + 1}$
   (e) $n^2 < 2^{2n}$
2. Probar que la suma de los cubos de tres naturales consecutivos es siempre divisible por 9.
3. Sea $A \subset \mathbb{R}, \quad A \neq \emptyset$. Probar que :
$$A \text{ está acotado } \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}^+ : \ |x| \leq M, \quad \forall x \in A$$
4. Simplificar las expresiones:
$$a)\ log_2(2^{x^2}) \qquad b)\ ln(e^{\sqrt{2}}) \qquad c)\ e^{ln(3x)} \qquad d)\ 10^{log_{10}2} \qquad e)\ b^{log_b\sqrt{x}}$$
5. Probar que la ecuación $3ln(x - 3) - ln(x) - 2ln(x - 2) = 0$ no tiene soluciones reales.
6. Resolver las ecuaciones:
$$a)\ \frac{1}{2}log_{10}(x) + \frac{1}{2}log_{10}(x - 21) = 1 \qquad b)\ 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 117$$
7. Razonar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:
$$a)\ log_a(e) = \frac{1}{ln(a)} \quad b)\ ln(x + 25) = ln(x) + ln(25) \quad c)\ ln(e^{n+1}) - ln(e^n) = 1$$
$$d)\ a^x = e^{x\ ln(a)} \qquad e)\ \sqrt{ln(x)} = \frac{1}{2}ln(x)$$
8. Resolver las ecuaciones:
$$a)\ cos(2x) + 3sen(x) - 2 = 0 \qquad b)\ tg^2(x) = tg(x) \qquad c)\ cox(4x) - 7cos(2x) = 8$$
9. Probar que la ecuación $tg(x) = x$ tiene infinitas soluciones.
10. Determinar la imagen de la función $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:
$$f(x) = \operatorname{arctg}(\ln |x|)$$

11. Estudiar la continuidad de las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = E(x^2), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = \begin{cases} xE(\frac{1}{x}), & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

12. Estudiar la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{1+x^2}, & x < -1 \\ x+1, & -1 \le x < 1 \\ \frac{x^3}{1+x^4}, & 1 \le x \le 2 \\ \frac{32(x-2)}{5(x^2-4)}, & 2 < x \end{cases}$$

Estudiar también su comportamiento en $+\infty$ y en $-\infty$.

13. Estudiar la continuidad y el comportamiento en $+\infty$ y en $-\infty$ de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

(a) $f(x) = \frac{x}{1+|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x}, & x < 0 \\ x, & 0 \le x < 1 \\ \sqrt[5]{x}, & x \ge 1 \end{cases}$

14. Dar un ejemplo de una función continua cuya imagen no sea un intervalo.

15. Dar un ejemplo de una función definida en un intervalo cuya imagen sea un intervalo y que no sea continua.

16. Dar un ejemplo de una función continua en todo $\mathbb{R}$, no constante y cuya imagen sea un conjunto (obligatoriamente un intervalo) acotado.

17. Dar un ejemplo de una función continua en $[0, 1[$ tal que $f([0, 1[)$ no sea acotado.

18. Dar un ejemplo de una función continua definida en un intervalo abierto acotado y cuya imagen sea un intervalo cerrado y acotado.

19. ¿Puede existir una función definida en todo $\mathbb{R}$, continua en un punto x, y que no tenga signo constante en ningún intervalo centrado en dicho punto?

20. Pruébese que todo polinomio de grado impar admite al menos una raíz real.

21. Un corredor recorre 6 kilómetros en 30 minutos. Probar que existe un intervalo de 5 minutos seguidos a lo largo del cual el corredor recorre exactamente 1 kilómetro.

22. Supongamos que la temperatura de una esfera es una función continua. Demostrar que, en cada diámetro de la esfera, existen dos puntos antípodas que tienen la misma temperatura.

23. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua. Demostrar que la función f tiene al menos un punto fijo en $[0,1]$; es decir un punto $x \in [0,1]$ verificando que $f(x) = x$.

24. Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua verificando $f(0) = f(1) = 0$. Probar que, dado $n \in N$, existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = f(x + \frac{1}{n})$.

25. Un escalador comienza, desde su campamento base, a subir a una montaña el sábado a las 7 horas, alcanzando la cima a las 8 de la tarde. A las 7 horas del domingo inicia el descenso hacia el campamento base tardando el mismo tiempo que le costó la subida. Demostrar que existe una determinada hora, a lo largo del domingo, en la que el escalador se encuentra exactamente a la misma altura que a esa misma hora del sábado.

26. Calcular la imagen de las siguientes funciones:

    (a) $f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x + \text{arctg} x, \quad \forall x \in [0,1].$
    (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x + \text{arctg} x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$
    (c) $f :]0,1[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2x-1}{x(x+1)}, \quad \forall x \in]0,1[.$
    (d) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}, \quad \forall x \in [-1,1].$
    (e) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2x}{1+|x|}, \quad \forall x \in [-1,1].$
    (f) $f :]-1,1[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = x(1-x^2)^{-1/2}.$

27. Sean $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = x, \quad \forall x \in]0,1[$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x}, & \text{si } x \in \mathbb{R}_0^+ \\ \frac{x}{1-x}, & \text{si } x \in \mathbb{R}^- \end{cases}$$

    Comprobar que f y g son continuas y acotadas pero no tienen máximo ni mínimo absolutos.

28. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} & , \; x \neq 0 \\ 0 & \; x = 0 \end{cases}$$

    Demostrar que f es continua en $\mathbb{R}$, estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^-$ y estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$. Calcular la imagen de f.

29. Probar que existe un número real positivo x verificando que

$$\ln x + \sqrt{x} = 0.$$

30. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & , \ x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de f y los límites en $-\infty$ y en $+\infty$.

31. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Estudiar para qué valores de α existe $\lim_{x \to 0} f(x)$ y para qué valores es f continua en 0.

32. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ la funcion definida por

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

(a) Estudiar la continuidad de f.

(b) Calcular, si existen, los límites de f en 1, $-\infty$ y $+\infty$.

(c) Calcular la imagen de f.

33. Demostrar que la aplicación $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ es biyectiva. Determínese f^{-1} y compruébese que es una función continua.

34. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = x^\alpha \operatorname{sen} \frac{1}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(0) = 0.$$

Estudiar la continuidad de f según los valores de α.

35. Probar que para cada número real x existe un único número positivo y verificando $y + \ln y = x$. Estúdiese la función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$ que a cada número real x asocia el único número positivo y que verifica $y + \ln y = x$.

36. Probar que la ecuación

$$x + e^x + \operatorname{arctg} x = 0$$

tiene una sola raíz real. Dar un intervalo de longitud uno en el que se encuentre dicha raíz.