

RELACIÓN 1ª DE EJERCICIOS.
MATEMÁTICAS 1. INGENIERÍA QUÍMICA.
MATRICES, SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1. Dadas las matrices A y B efectuar, si es posible, los productos AA , AB , BA y BB en cada uno de los siguientes casos

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Explicar por qué razón, en general, si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden, NO se verifican las igualdades

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$$

3. Una matriz cuadrada se dice que es nilpotente si existe un natural n tal que $A^n = 0$.
Probar, que si A es una matriz nilpotente, entonces la matriz $I - A$ es inversible, siendo I la matriz identidad.

4. Hallar a y b números naturales para que el determinante de AB sea 1000, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & 1 & 3 \\ b^2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

5. Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{array}{l} \text{(Det. de Van Der Monde)} \\ \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{array} \right| \end{array}$$

6. Calcular la inversa de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

7. Calcular los determinantes de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} t-2 & 4 & 3 \\ 1 & t+1 & -2 \\ 0 & 0 & t-4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 7 & t-5 & 1 \\ 6 & -6 & t+2 \end{pmatrix}$$

8. Calcular para qué valores de t las matrices del ejercicio anterior no son inversibles.

9. Calcular la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

con $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n} \neq 0$.

10. Calcular la inversa de las siguientes matrices de orden 4, donde k_1, k_2, k_3, k_4 y k son distintos de 0.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$$

11. Demostrar que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta & 0 \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es inversible para cualquier valor de θ y calcular su inversa.

12. Resolver, si es posible, el sistema:

$$\begin{cases} 3x + y - z + t = -4 \\ x - 2y + 3z - 2t = 2 \\ 2x + z + t = 0 \\ 9x - 4y + 7z - 4t = -2 \end{cases}$$

13. Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 11 \\ x + 5y + 3z = -15 \\ 4x - y - 4z = 30 \end{cases}$$

14. Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

15. Resolver y discutir el siguiente sistema:

$$\begin{cases} (\lambda + 1)x + (\lambda - 1)y = \lambda \\ \lambda x + (\lambda + 1)y = \lambda - 1 \end{cases}$$

16. Discutir, según los valores de α y β el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - 2y = 3\alpha + 3\beta \\ x - y = 2\alpha + 2\beta + 1 \\ \beta x + \alpha y + 5 = \beta^2 - \alpha^2 - 1 \\ \alpha x + \beta y + 7 = \alpha^2 - \beta^2 + 13 \end{cases}$$

17. Discutir y resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} (m + 2)x + y + z = m - 1 \\ mx + (m - 1)y + z = m - 1 \\ (m + 1)x + (m + 1)z = m - 1 \end{cases}$$

18. Discutir y resolver el sistema:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

19. Discutir y resolver respecto a los parámetros k y m el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x + y + kz = 0 \\ x - y - z = 0 \\ mx + y + z = 0 \\ x + my - z = 0 \end{cases}$$

20. Discutir y resolver el sistema:

$$\begin{cases} ax + y + z + t = 0 \\ x + ay + z + t = 0 \\ x + y + az + t = 0 \\ x + y + z + at = 0 \end{cases}$$

21. Discutir, según los valores de α y β , el sistema

$$\begin{cases} \beta x + y + z = 4 \\ x + \alpha y + z = 3 \\ x + 2\alpha y + z = 4 \end{cases}$$