SEGUNDO EXAMEN PARCIAL.
MATEMÁTICAS 1. INGENIERÍA QUÍMICA.

1. Construcción de la integral de Riemann para funciones reales de una variable real.

2. Estudiar continuidad y derivabilidad, y calcular la imagen, de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} x\right), & \text{si } x < 0 \\ \frac{-2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\ln\left(x - \frac{\pi}{2}\right) & \text{si } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

3. Estudiar la continuidad y diferenciabilidad de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \ln(x^2 + y^2), & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

4. Calcular los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$ y estudiar si son absolutos.

5. Calcular la integral

$$\int_M z e^{-(x^2+y^2)} d(x,y,z)$$

donde $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad 2(x^2+y^2) < z^2 < x^2 + y^2 + 1, \ z > 0\right\}$.

Granada, a 20 de junio de 1995.

EXAMEN FINAL.
MATEMÁTICAS 1. INGENIERÍA QUÍMICA.

1. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una aplicación lineal cuya matriz asociada, en la base canónica de $\mathbb{R}^4$, es $M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si en $\mathbb{R}^4$ consideramos el producto escalar cuya matriz asociada, en la misma base canónica de $\mathbb{R}^4$ es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ calcular las ecuaciones paramétricas de $f\left[(ker f)^{\perp}\right]$.

2. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones, según los valores de a y b, y resolverlo cuando sea posible:
$$\begin{aligned} x + ay + a^2z + a^3t &= a^4 \\ x + by + b^2z + b^3t &= b^4 \\ y + 2az + 3a^2t &= 4a^3 \\ y + 2bz + 3b^2t &= 4b^3 \end{aligned}$$

3. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
   (a) Estudiar la continuidad de f y los límites en $-\infty$ y $+\infty$.
   (b) Calcular la imagen de f.

4. (a) Calcular los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4a^2xy$, donde a es un número positivo.
   (b) Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en $(0, 0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x, y) = \frac{x^2 \operatorname{sen} y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (x, y) \neq (0, 0); \ f(0, 0) = 0.$$

5. (a) Calcular la integral
$$\int_A \frac{d(x, y)}{(x^2 + y^2)^2}$$
   donde $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \leq 1, \ \sqrt{1 - x^2} \leq y \leq x\right\}$.
   (b) Calcular el volumen de los dos sólidos que resultan al intersecar la esfera $x^2+y^2+z^2 = 3a^2$ y el paraboloide $2az = x^2 + y^2$, donde $a > 0$.

Granada, a 10 de julio de 1996.

EXAMEN FINAL.
MATEMÁTICAS 1. INGENIERÍA QUÍMICA.

1. (1,5 puntos) Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales, según los valores de a, b, y c. Resolver en cada caso

$$\begin{array}{ccccccc} 3x & + & 2ay & + & 4z & = & 0 \\ x & + & by & + & z & = & 0 \\ & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & + & cz & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

2. (2 ptos.) Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la función lineal cuya matriz asociada, en las bases canónicas, es

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) ¿Es f sobreyectiva?

   (b) Calcular una base ortogonal de $f(E)$ donde E es el subespacio definido implíctamente por $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \quad x - y + 2t = 0\}$.

3. (1.5 ptos.) Demostrar que, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, se verifica que

$$1 + \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) > \sqrt{1+x^2}.$$

4. (1 pto.) Demostrar que, para $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, se verifica la igualdad

$$\int_{\frac{1}{e}}^{\tan x} \frac{t\,dt}{1+t^2} + \int_{\frac{1}{e}}^{\cot x} \frac{dt}{t(1+t^2)} = 1.$$

5. (1.5 ptos.) Calcular los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^3y^2(12 - x - y)$. ¿Alcanza la función algún extremo absoluto en su dominio?

6. Calcular los siguientes volúmenes:

   (a) (1.25 ptos.) El volumen del sólido $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x-1)^2 + y^2 \leq z, \ \ 2x + z \leq 2\right\}$.

   (b) (1.25 ptos.) El volumen del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$, el plano $z = 0$ y el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

Granada, a 29 de junio de 1998.

2º EXAMEN PARCIAL.
MATEMÁTICAS 1. INGENIERÍA QUÍMICA.

1. (a) Sea $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ con $A > 0$. Calcular el límite

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{f(x+1)} - \sqrt[3]{f(x)}$$

   (b) Demostrar que, para cualquier $a \in \mathbb{R}$, la ecuación $x = -a + \sqrt{2} \sin\left(\frac{a-x}{\sqrt{2}}\right)$ tiene una única solución.

2. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(0,0) = 0$ y $f(x,y) = (x+y)^n \sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$ si $(x,y) \neq (0,0)$. Decidir qué valores debe tomar n para que

   (a) f sea continua en todo $\mathbb{R}^2$.

   (b) f sea diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$.

   (c) f tenga derivadas parciales continuas en todo $\mathbb{R}^2$.

3. Obténganse los valores máximo y mínimo que toma la función $f(x,y,z) = x + y + z$ sobre el conjunto $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1\right\}$.

4. (a) Calcular el volumen de $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z, \quad x^2 + y^2 \leq z\right\}$.

   (b) Calcular el volumen del sólido delimitado por el el paraboloide $x^2 + y^2 = 4z$, el cilindro $x^2 + y^2 = 8y$ y el plano $z = 0$.

5. (a) Demostrar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifica que existe un $k > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|^2$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ entonces f es constante en $\mathbb{R}$.

   (b) Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua con $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Demostrar que entonces f alcanza mínimo absoluto en algún punto de su dominio.

Granada, a 14 de junio de 1999.

EXAMEN FINAL.
MATEMÁTICAS 1. INGENIERÍA QUÍMICA.

1. (1,5 puntos) Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales, según los valores de a, b, y c. Resolver en cada caso

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 2ay & + & 4z & = & 0 \\ x & + & by & + & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & + & cz & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

2. (1,5 puntos.) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la función lineal definida por

$$\begin{array}{rcl} f(1,0,0) & = & (2,0,1,1) \\ f(1,1,0) & = & (2,1,1,2) \\ f(1,1,1) & = & (2,-1,1,0) \end{array}$$

Calcular una base de $(Im(f))^{\perp}$.

3. (a) (1 punto.) Sea $k > 0$. Calcular $\lim \left\{ \left(2k^{1/n} - 1\right)^n \right\}$

   (b) (1 punto.) Sea $a > 0$, $a \neq 1$. Calcular $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a^x - 1}{x(a-1)} \right)^{1/x}$

4. (2.5 puntos.) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2) - \int_0^x \frac{2t}{1+t^4} dt$. Calcular los extremos relativos de f.

5. Calcular

   (a) (1.25 puntos.) El volumen del sólido obtenido como intersección de dos cilindros, del mismo radio a, cuyos ejes se cortan perpendicularmente.

   (b) (1.25 puntos.) La integral

$$\int_M z e^{-(x^2+y^2)} d(x,y,z)$$

   donde $M = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad 2(x^2+y^2) \leq z^2 \leq x^2 + y^2 + 1, \quad z \geq 0 \right\}$.

Granada, a 2 de julio de 1999.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE DICIEMBRE.
MATEMÁTICAS 1. INGENIERÍA QUÍMICA.

1. (2 ptos.) Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales, dependiendo del parámetro a,

$$\begin{aligned} 2(a+1)x + 3y + az &= a+4 \\ (4a-1)x + (a+1)y + (2a-1)z &= 2a+2 \\ (5a-4)x + (a+1)y + (3a-4)z &= a-1 \end{aligned}$$

   Resolver cuando $a = 1$.

2. Calcular los límites de las siguientes sucesiones de números reales:

   (a) (1 pto.) $\left\{ \left(\frac{\sin(\theta + c/n)}{\sin\theta} \right)^n \right\}$, donde $c \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$ y $\sin\theta \neq 0$.

   (b) (1 pto.) $\left\{ \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)} \right\}$

3. (1.5 ptos.) Demostrar que, para $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, se verifica la igualdad

$$\int_{\frac{1}{e}}^{\tan x} \frac{t\,dt}{1+t^2} + \int_{\frac{1}{e}}^{\cot x} \frac{dt}{t(1+t^2)} = 1.$$

4. (1.5 ptos.) Calcular los extremos absolutos de la función $f : K \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 2x^2 - 3y^2 - 2x$, siendo $K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \leq x \leq 2 - y^2 \right\}$.

5. (1.5 ptos.) Calcular el volumen del sólido delimitado por el cono de ecuación $x^2 + y^2 = az^2$ situado por encima del plano $z = 0$ y en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = by$.

6. (1.5 ptos.) Calcular la integral

$$\int_M z e^{-(x^2+y^2)} d(x, y, z)$$

   donde $M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad 2(x^2 + y^2) < z^2 < x^2 + y^2 + 1, \ z > 0 \right\}$.

Granada, a 20 de diciembre de 1999.

EXAMEN FINAL.
MATEMÁTICAS 1. INGENIERÍA QUÍMICA.

1. (2 puntos) Decidir razonadamente si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

   (a) Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en un punto $p \in A$, verificando que $D_i f(p) = 0, \quad i = 1, 2$. Entonces $Df(p) \equiv 0$.

   (b) Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función. Sea $p \in A$ un punto en el que se verifica que $D_i f(p) = 0, \quad i = 1, 2$. Entonces f es diferenciable en p y $Df(p) \equiv 0$.

   (c) El subconjunto Wde $\mathbb{R}^3$ dado por $W = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 : \quad x + 2y + z = 0, \ 2x + y = 3\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

   (d) La matriz M representa la matriz asociada a un producto escalar en $\mathbb{R}^2$, donde

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. (2.5 puntos) Sea $E \subset \mathbb{R}^4$ el subespacio vectorial dado por

$$E = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \ x + y - z = 0, \quad x - 3y = 0\right\}$$

   (a) Encontrar una base ortonormal de $E^{\perp}$, una base de E y ampliarla hasta obtener una base de $\mathbb{R}^4$.

   (b) Si $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ es la base de $\mathbb{R}^4$ obtenida en el apartado anterior y consideramos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(e_1) = (1, 0, 1), \quad f(e_2) = (-1, 3, 2), \quad f(e_3) = (-1, 6, 5), \quad f(e_4) = (-2, 3, 1).$$

   Encontrar la matriz asociada a f en las bases B de $\mathbb{R}^4$ y $B' = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

   (c) Calcular las dimensiones de $Ker(f)$ e $Im(f)$.

3. (2 puntos) Calcular las siguientes integrales:

   (a) $\int\limits_B \frac{d(x,y)}{4-3x^2-y^2}$ siendo $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 3x^2 + y^2 \leq 1\}$.

   (b) $\int\limits_B \arctan(\frac{y}{x}) d(x, y)$ siendo B el recinto del primer cuadrante limitado por las curvas $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$ y las rectas $y = x$ e $y = \sqrt{3}x$.

4. (2 puntos) Estudiar la existencia de extremos relativos condicionados de la función $f(x, y, z) = x^2 + y + z$ en el conjunto $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad -x + y + z = 0, \ xy + z = 0\}$.

5. Calcular, si existen, los siguientes límites:

   (a) (0.75 puntos) $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \frac{5x^2y^2}{x^3 + y^6}$.

   (b) (0.75 puntos) $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x \sin y^2}{\arctan(x^2 + y^2)}$.

Granada, a 3 de julio de 2000.

EXAMEN FINAL
MATEMÁTICAS 1. INGENIERÍA QUÍMICA

1. (2.5 puntos) Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz asociada en las bases $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (1,1,1)\}$ y $B_c = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ es

$$M(f, B, B_c) = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Estudiar, en función del parámetro a, cuando f es biyectiva.

   (b) Calcular la matriz de f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   (c) Sea $g := f - Id_{\mathbb{R}^3}$. Calcular $Ker(g)$ y $(Ker(g))^\perp$.

2. (1.5 puntos)

   (a) Demostrar, por inducción, que
   $$\lim_{x \to 0^+} x(\ln(x))^n = 0,$$
   para todo n natural.

   (b) Demostrar, por inducción, que
   $$\int_0^1 (\ln(x))^n dx = (-1)^n n!,$$
   para todo n natural.

3. (1.5 puntos) Demostrar que
$$\int_{\frac{1}{e}}^{\tan(x)} \frac{t}{1+t^2}\, dt + \int_{\frac{1}{e}}^{cotan(x)} \frac{1}{t(1+t^2)}\, dt = 1,$$
para todo $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

4. (1.5 puntos) Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función de dos variables definida por $f(x,y) := e^{ax+y^2} + b\, \sin(x^2+y^2)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, donde a y $b \in \mathbb{R}$.

   (a) Calcular el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(0,0)$.

   (b) Calcular el valor de a y b para que f alcance un extremo relativo en $(0,0)$ y que el polinomio de Taylor de orden 2 de f en $(0,0)$ tome el valor 6 en $(1,2)$.

   (c) Con los resultados del apartado anterior, ¿qué tipo de extremo tiene f en $(0,0)$?.

5. (1.5 puntos) Calcular los extremos condicionados de $f(x,y,z) := 20 + 2x + 2y + z^2$ en $M := \{(x,y,x) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 = 11,\ x+y+z = 3\}$.

6. (1.5 puntos) Calcular el volumen del sólido delimitado exteriormente por el elipsoide $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1$ e interiormente por el cilindro $x^2+y^2 = 4$.

Granada, a 26 de junio de 2001.

EXAMEN FINAL DE MATEMATICAS I. 1º INGENIERIA QUIMICA

1. **(1.5 puntos)** Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y,z) = xe^{y^2+z} \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Calcular una base ortonormal de Ker $Df(1,1,-1)$.

2. Sea $\mathbb{P}_3$ el espacio vectorial de todos los polinomios de grado menor o igual que 3. Consideremos en $\mathbb{P}_3$ las siguientes bases:

$$B = \{1, x, x^2, x^3\}, \quad B' = \{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}.$$

Sea $F : \mathbb{P}_3 \longrightarrow \mathbb{P}_3$ definida por

$$F(f) = f' \quad \forall f \in \mathbb{P}_3,$$

donde f' es la función derivada de f.

(a) **(1 punto)** Calcular $M(F,B)$ y $M(F,B')$.

(b) **(1 punto)** Calcular una base de $(\text{Ker } F)^{\perp}$.

3. Calcular los límites de las siguientes sucesiones:

(a) **(0.75 puntos)** $\left\{ \dfrac{\frac{n}{1} + \frac{n-1}{2} + \frac{n-2}{3} + \cdots + \frac{2}{n-1} + \frac{1}{n}}{\ln(n!)} \right\}$.

(b) **(0.75 puntos)** $\left\{ \left(\dfrac{n^2+1}{n+2} \right)^{\frac{1}{\ln(n^2+n+1)}} \right\}$.

4. Sea $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_0^x \frac{\ln(2+t)}{1+t} dt \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+.$$

(a) **(0.5 puntos)** Probar que f es estrictamente creciente.

(b) **(0.5 puntos)** Calcular $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{(\ln x)^2}$.

(c) **(0.5 puntos)** Calcular $\text{Im}(f)$.

5. **(1.5 puntos)** Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y,z) = x^2 + y^3 - z^2$ en el conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 6\}.$$

6. **(2 puntos)** Calcular el volumen del conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z + 1, \; x^2 + y^2 \leq (1-z)^2, \; z \leq 1\}.$$

Granada, a 5 de Julio de 2002.

EXAMEN DE SEPTIEMBRE. MATEMATICAS I. 1º INGENIERIA QUIMICA

1. Sea $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definida por

$$f(x,y,z,t) = (x-y+3z,\ 2x+y-t,\ -x-y+2t,\ 2x-y+3z+t).$$

(a) **(1 punto)** Calcular una base de $\mathrm{Ker}(f)$ y razonar si f es sobreyectiva.

(b) **(1 punto)** Calcular para qué valores de a, el vector $(1,-2,0,a)$ pertenece a $\mathrm{Im}(f)$.

(c) **(1 punto)** Calcular una base ortonormal de $f(A)$, donde

$$A = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 :\ x+y-t = 0,\ 2x+z = 0\}.$$

2. Calcular los límites de las siguientes sucesiones:

(a) **(0.75 puntos)** $\left\{(n\tan(1/n))^{n^2}\right\}$.

(b) **(0.75 puntos)** $\left\{\dfrac{1^2\,\mathrm{sen}(a/1)+2^2\,\mathrm{sen}(a/2)+\cdots+n^2\,\mathrm{sen}(a/n)}{n^2}\right\}$, donde $a \in \mathbb{R}$.

3. **(1.5 puntos)** Sea $f : \left]-\frac{\pi}{4},+\infty\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (1+\tan x)^{\frac{1}{\mathrm{sen}\,x}} & \text{si } -\frac{\pi}{4} < x < 0 \\ a & \text{si } x = 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{xe^{x-1}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

¿Existe algún valor de a para el que f sea continua? Estudiar el comportamiento de f en $-\frac{\pi}{4}$ y en $+\infty$.

4. **(2 puntos)** Calcular los extremos relativos de la función $f(x,y,z) = \ln x + \ln y + 3\ln z$ en el conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 = 5,\ x>0,\ y>0,\ z>0\}.$$

Decidir si los extremos obtenidos son absolutos.

5. **(2 puntos)** Calcular $\int_A x^2$, donde

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+(z-1)^2 \le 1,\ x^2+y^2 \le z^2\}.$$

Granada, a 17 de Septiembre de 2002.

PRIMER PARCIAL DE MATEMÁTICAS I. 1º INGENIERÍA QUÍMICA

1. Sea B la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $B' = \{v_1, v_2\}$ una base de $\mathbb{R}^2$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal verificando:

$$\begin{aligned} f(1,1,0) &= v_1 + v_2 \\ f(1,0,1) &= v_1 + v_2 \\ f(0,1,1) &= v_1 \end{aligned}$$

a) **(1 punto).** Calcular $M(f, B, B')$.

b) **(1 punto).** Calcular una base de $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.

c) **(1 punto).** Calcular $\mathrm{Ker}(f)^{\perp}$.

2. Sea E un espacio vectorial euclídeo.

a) **(0.5 puntos).** Dados $u, v \in E$ con $\|u\| = \|v\|$, probar que los vectores $u+v$ y $u-v$ son ortogonales.

b) **(0.5 puntos).** Sean $u_1, \ldots, u_n$ vectores de E tales que $f(u_1), \ldots, f(u_n)$ son linealmente independientes. Probar que $u_1, \ldots, u_n$ son también linealmente independientes.

3. **(2 puntos).** Discutir y resolver, cuando sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales, dependiendo del valor del parámetro a:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= 1 \\ 4x + 2y + az &= 1 \end{aligned}$$

4. **(2 puntos).** Calcular el límite de la siguiente sucesión:

$$\left\{ \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}}{\sqrt{n}} \right\}.$$

5. **(2 puntos).** Sea $a \in \mathbb{R}^+$ y $\{x_n\}$ la sucesión definida por:

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + x_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $\{x_n\}$ es convergente y calcular su límite.

Granada, 31 de Enero de 2003

SEGUNDO PARCIAL DE MATEMÁTICAS I. 1º INGENIERÍA QUÍMICA

1. Calcular el límite de las siguientes sucesiones:

(a) **(1 pto.)** $\left\{ \left(\frac{\ln(n+a)}{\ln n} \right)^{n \ln n} \right\}$, donde $a \in \mathbb{R}$.

(b) **(1 pto.)** $\left\{ \frac{\sqrt[n]{(n+1)\cdot(n+2)\cdots(n+n)}}{n} \right\}$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{e^x} & \text{si } \ 0 < x < e \\ e^{-x} & \text{si } \quad x \geq e \end{cases}$$

(a) **(1 pto.)** Estudiar la continuidad y derivabilidad de f.

(b) **(1 pto.)** Calcular la imagen de f.

3. **(2 ptos.)** Sea $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{e^{t^2}}{t}\, dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}_0^+.$$

Estudiar los extremos relativos de f.

4. **(2 ptos.)** Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y,z) = xyz$ en el conjunto $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\}$.

5. **(2 ptos.)** Sean $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2+1}$, $\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| \leq y \ . \ x^2+y^2 \leq 1\}$.

Calcular $\displaystyle\int_A f$.

Granada, 16 de Junio de 2003

EXAMEN DE SEPTIEMBRE DE MATEMÁTICAS I. 1º INGENIERÍA QUÍMICA

1. **(2 puntos)** Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales, según el valor del parámetro a, y resolver para $a = 1$.

$$\begin{aligned} 2(a+1)x+3y+az &= a+4 \\ (4a-1)x+(a+1)y+(2a-1)z &= 2a+2 \\ (5a-4)x+(a+1)y+(3a-4)z &= a-1 \end{aligned}$$

2. **(2 puntos)** Sea $f:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x,y,z,t) = (x+3y-4t, 2x+y+z, x-y).$$

Calcular la dimensión, una base y las ecuaciones cartesianas y paramétricas de $(\mathrm{Ker}(f))^{\perp}$.

3. Calcular el límite de las siguientes sucesiones:

(a) **(1 punto)** $\left\{ \left(\mathrm{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right) + \cos\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{n^2} \right\}$.

(b) **(1 punto)** $\left\{ \dfrac{\frac{n}{1} + \frac{n-1}{2} + \frac{n-2}{3} + \cdots + \frac{3}{n-2} + \frac{2}{n-1} + \frac{1}{n}}{\ln(n!)} \right\}$.

4. **(2 puntos)** Determinar el rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados, inscrito en la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$, que tenga área máxima.

5. **(2 puntos)** Calcular el área del siguiente recinto de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 1,\ x^2+y^2 \leq 2y,\ y \leq x \right\}.$$

Granada, 16 de Septiembre de 2003

EXAMEN DE DICIEMBRE
MATEMÁTICAS I. 1º INGENIERÍA QUÍMICA

1. Sea $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por:

$$f(x,y,z,t) = (x - y + 3z, 2x + y - t, -x - y + 2t).$$

(a) Calcular $\mathrm{Ker}(f)$. Decir razonadamente si f es sobreyectiva.

(b) Resolver, si es posible, la ecuación

$$f(x,y,z,t) = (1,2,1).$$

2. Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tiene como matriz asociada, considerando en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ las bases canónicas, la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

calcular la matriz de f asociada a las bases $B = \{(1,0),(1,1)\}$ y $C = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$.

3. Estudiar la continuidad, derivabilidad y calcular la imagen de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \tan x & \text{si} \quad 0 < x \leq \pi/4 \\ \frac{4xe^{\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}}{\pi} & \text{si} \quad \pi/4 < x \end{cases}$$

4. Calcular los extremos relativos y absolutos de la función $f(x,y) = x^3 - y^2x + y^4$ en el conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 2x\}.$$

5. Calcular $\int_A f$, donde $f(x,y,z) = ze^{-(x^2+y^2)}$ y

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2(x^2+y^2) \leq z^2 \leq x^2 + y^2 + 1, \ z \geq 0\}.$$

Granada, 15 de Diciembre de 2003

PRIMER PARCIAL DE MATEMÁTICAS I. 1º INGENIERÍA QUÍMICA

1. **(2 puntos)** Decidir razonadamente si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

(a) Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ lineal e inyectiva. Entonces $m = \dim(\mathrm{Im}(f))$.

(b) Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ lineal e inyectiva. Entonces $n \leq m$.

(c) Sean A, B matrices cuadradas. Entonces $| A + B | = | A | + | B |$.

(d) Si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente, entonces $\{x_n\}$ es acotada.

(e) Si $\{x_n\}$ es una sucesión divergente, entonces $\{x_n\}$ es monótona.

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por:

$$f(1,0,0) = (1,1,0)$$
$$f(1,1,0) = (1,0,1)$$
$$f(1,1,1) = (1,3,-2)$$

(a) **(1 punto)** Calcular la matriz de la aplicación f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(b) **(1 punto)** Calcular la dimensión, una base y las ecuaciones paramétricas y cartesianas de $\mathrm{Ker}(f)$ y de $\mathrm{Im}(f)$.

(c) **(1 punto)** Calcular una base ortonormal de $f(\mathrm{Ker}(f)^{\perp})$.

3. **(1.5 puntos)** Discutir y resolver, cuando sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales, según los valores de los parámetros a y b:

$$\begin{aligned} 3x - y + az &= b \\ 2x - 3y - 4z &= -1 \\ x + 2y + 5z &= 3 \end{aligned}$$

4. **(1.5 puntos)** Sea $p \in \mathbb{N}$. Calcular el límite de la siguiente sucesión:

$$\left\{ \frac{1^p + 3^p + \cdots + (2n+1)^p}{n^{p+1}} \right\}$$

5. **(2 puntos)** Sea $a \in \mathbb{R}_0^+$. Se define la sucesión $\{x_n\}$ como sigue:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = ax_n + 1, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

¿Para qué valores de a la sucesión $\{x_n\}$ es convergente? En caso de convergencia, calcular el límite.

Granada, 30 de Enero de 2004

EXAMEN FINAL.
MATEMÁTICAS 1. INGENIERÍA QUÍMICA.

1. (2 puntos) Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal que tiene como matriz asociada, en las bases canónicas, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcular la dimensión y las ecuaciones paramétricas y cartesianas de $\ker(f)$ y de $\operatorname{Im}(f)$.

   (b) Sea $\mathfrak{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \ x + y + z = 0\}$. Calcular $f(\mathfrak{A}^{\perp})$.

2. (2 puntos) Discutir dependiendo de los valores del parámetro a y resolver, cuando sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & 0 \\ x & + & a^2y & + & z & = & 0 \end{array}$$

3. (2 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-1/x^2}}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

   Estudiar la continuidad y derivabilidad de f y calcular su imagen.

4. (2 puntos) Determinar las dimensiones del ortoedro de volumen máximo si la suma de las áreas de sus lados es 6.

5. (2 puntos) Calcular el volumen del conjunto

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \ x^2 + y^2 \leq z^2, \ \ 0 \leq z \leq 6 - x^2 - y^2 \ \right\}.$$

Granada, a 9 de julio de 2004.

EXAMEN FINAL .
MATEMÁTICAS 1. INGENIERÍA QUÍMICA.

1. Sean $M = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ x+3y-z=0, \ x-y+t=0, \ 3y-t=0 \ \}$ y $N = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ x-y+t=0 \ \}$.

   a) (1.5 ptos.) Calcular una base de M y una base ortonormal de N.

   b) (1 pto.) Dar un ejemplo de una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ con $\ker(f) = M$ e $Im(f) = N$.

2. (1.5 ptos.) Discutir y resolver, cuando sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales, dependiendo de los valores que tomen los parámetros a y b.

$$\begin{array}{cccccc} ax & +by & +z & = & 1 \\ x & +aby & +z & = & b \\ x & +by & +az & = & 1 \end{array}$$

3. (1 pto.) Estudiar la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Calcular la imagen de la función.

4. (1 pto.) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida por $f(x,y) = \left(\left(y^2+1\right)e^x, y\,(x+1)\right)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Calcular la imagen de $Df(3/5, 2)$.

5. (2 ptos.) En la bola $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ \ x^2+y^2+z^2 \leq 1\right\}$ la temperatura de cada punto (x,y,z) viene dada por $T(x,y,z) = 4 - 2x^2 - y^2 - z^2 + x$. Calcular los puntos de B en los que se alcanza mayor y menor temperatura.

6. (2 ptos.) Calcular el volumen del conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$ dado por

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ x^2+y^2 \leq z+1, \ x^2+y^2 \leq (1-z)^2, \ z \leq 1\right\}.$$

Granada, a 8 de julio de 2005.

EXAMEN SEPTIEMBRE.
MATEMÁTICAS 1. INGENIERÍA QUÍMICA.

1. Sea $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y en la base de $\mathbb{R}^3$ $B = \{(1,0,1), (1,0,-1), (0,1,-1)\}$, viene dada por
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$
   a) (1.25 ptos.) Calcula la matriz asociada a f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$.
   b) (1.25 ptos.) Calcula las bases de $\ker(f)$ y de $Im(f)$. Calcula también el valor de b para que $(2, b, 1) \in Im(f)$.

2. (1.5 ptos.) Sean $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal, cuya matriz asociada en las bases canónicas es $M_g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, y el subespacio $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y = 0\}$.
   Calculal una base ortonormal de $g(E)^\perp$.

3. (1.5 ptos.) Demostrar que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, se verifica $1 + x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2}$.

4. (1.5 ptos.) Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por
$$f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$
   Calcular el conjunto $Im(f)$.

5. (1.5 ptos.) Diseñar una lata (cerrada) de forma cilíndrica que contenga un litro de capacidad con el mínimo coste de material.

6. (1.5 ptos.) Calcula la integral
$$\int_A (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)\,dx\,dy,$$
   donde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 1 \le x^2+y^2 \le 2, x \ge 0, y \ge 0\}$.

Granada, a 9 de septiembre de 2005.

SEGUNDO PARCIAL DE MATEMÁTICAS I
1º INGENIERÍA QUÍMICA. GRUPO B

1. **(1.5 puntos)** Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(e^{2x}+\mathrm{sen}(x))}{\sqrt{3x^2+1}}$.

b) $\lim\limits_{x\to 1} \left(a^{x-1}-x+1\right)^{\frac{1}{x-1}}$, $(a>0)$.

2. **(1 punto)** Calcular la imagen de la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=e^{-x^2}(x^2-3) \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

3. **(1.5 puntos)** Sea $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $g\in C^1(\mathbb{R})$, con $g(0)=0$ y $g'(0)\neq 0$. Sea $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y,z)=z^2+\int_x^y g(t)dt \quad \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

Demostrar que $(0,0,0)$ es un punto crítico de f y razonar si es extremo relativo.

4. **(2 puntos)** Calcular los extremos relativos de la función $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=e^{2x+y}(x^2y-4x) \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

En caso de que se alcance algún extremo relativo, razonar si es absoluto o no.

5. **(2 puntos)** Calcular los extremos absolutos de la función

$$f(x,y)=x^2+3y^2$$

en el conjunto

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ (x-1)^2+y^2\leq 4\}.$$

6. **(2 puntos)** Calcular el área del siguiente recinto de $\mathbb{R}^2$:

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 4\leq (x-2)^2+y^2,\ (x-4)^2+y^2\leq 16.\ x\leq y\}.$$

Granada, 14 de Junio de 2006

EXAMEN FINAL DE MATEMÁTICAS I
1º INGENIERÍA QUÍMICA

1. **(1.5 puntos)** Discutir y resolver, cuando sea posible, según los valores de a y b, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} ax + +y + bz &= 0 \\ x + ay + 2z &= b - 2 \\ x + ay + bz &= a - 1 \end{aligned}$$

2. **(2 puntos)** Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calcular $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$.

(b) Calcular una base y la dimensión del subespacio

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ f(x,y,z) = 3(x,y,z)\}.$$

(c) Calcular la matriz asociada a f respecto de la base

$$B = \{(1,-2,5),(1,1,-1),(0,0,1)\}.$$

3. **(1 punto)** Calcular el límite de las siguientes sucesiones:

$$\left\{ \frac{\ln n}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}} \right\} \quad \text{y} \quad \left(\frac{n}{n^3 + n + 1} \right)^{\frac{1}{1+a^n}} \qquad (a > 0).$$

4. **(1 punto)** Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x,y,z) = \left(e^{x+y^2}, xz^2 - y + z, z + e^{-y}\mathrm{sen}(x) \right) \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Calcular $Df(0,0,1)^{-1}$.

5. **(2.5 puntos)** Calcular los extremos absolutos de la función

$$f(x,y,z) = x^2 + (2x-1)y^2 + 2z^2$$

en el conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

6. **(2 puntos)** Calcular $\int_A y^2$, donde

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x \geq 0, \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z, \ x^2 + y^2 + z \leq 4\}.$$

Granada, 7 de Julio de 2006

EXAMEN DE DICIEMBRE DE MATEMÁTICAS I
1º INGENIERÍA QUÍMICA

1. **(2.5 puntos)** Sean $E, F \subset \mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales cuyas coordenadas implícitas son:

$$E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : -x+2y+z-t=0,\ x-z-t=0\},$$
$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x-y-z=0,\ 2x-y+t=0\}.$$

Dar un ejemplo de una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ con $\mathrm{Ker}(f) = E \cap F$ e $\mathrm{Im}(f) = E+F$.

2. **(2 puntos)** Discutir y resolver el siguiente sistema de ecuaciones, según los valores del parámetro a:

$$\begin{array}{rcl} ax+y+z & = & 1 \\ x+ay-z & = & a \\ x+y+az & = & a^2 \end{array}$$

3. **(1.5 puntos)** Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-|x|}\mathrm{sen}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Estudiar si f es derivable en todo $\mathbb{R}$ y calcular su imagen.

4. **(2 puntos)** Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 4x^2$ en el conjunto

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 3\}.$$

5. **(2 puntos)** Calcular el volumen interior al cilindro $x^2+y^2=9$, limitado inferiormente por el paraboloide de ecuación $x^2+y^2+4z=16$ y superiormente por el plano de ecuación $z=4$.

Granada, 12 de Diciembre de 2006

SEGUNDO PARCIAL DE MATEMÁTICAS I. 1º INGENIERÍA QUÍMICA
GRUPO B

1. **(1 punto).** Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x) \right)^{1/x}$$

2. **(1 punto).** Hallar la imagen de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} \left(\frac{x+1}{x} \right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

3. **(1.5 puntos).** Probar que

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

4. **(2 puntos).** Hallar los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x^2 + 3y^2$ en el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 4\}$.

5. **(1 punto).** Estudiar los extremos relativos de la función $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$, donde $a \in \mathbb{R}$.

6. **(2.5 puntos).** Sean la función $f(x,y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$ y el conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1, \ x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

Calcular $\int_A f$.

7. **(1 punto).** Resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$\left. \begin{array}{r} y \operatorname{sen} x \, dx - \cos x \, dy = 0 \\ y(0) = 1 \end{array} \right\}$$

Granada, 15 de Junio de 2007

EXAMEN FINAL DE MATEMÁTICAS I. 1º INGENIERÍA QUÍMICA

1. **(1 punto)** Sean $\{v_1,\dots,v_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$ y $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz inversible. Probar que $\{Av_1,\dots,Av_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$.

2. **(2.5 puntos)** Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ se define la aplicación lineal $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ tiene asociada la matriz

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Hallar $\mathrm{Ker}(f_\alpha)$, según los valores de α.

(b) Decidir, según los valores de α, cuándo f_α es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

(c) Dada la base $B' = \{(1,-1,0),(0,1,-1),(0,0,1)\}$, calcular la matriz de f_α respecto de la base B'.

(d) Para $\alpha = 1$, calcular una base de $f(\mathrm{Ker}(f_1)^\perp)$.

3. **(1.5 puntos)**

(a) Sean $f, g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}, \quad g(x) = \frac{2}{x} - \frac{x}{2}, \ \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Estudiar los extremos, los intervalos de monotonía, los cortes con los ejes y el comportamiento en $+\infty$ y $-\infty$ de ambas funciones. Hacer un esbozo de las gráficas.

(b) Sea $a > 2$. Se define la sucesión $\{x_n\}$:

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \frac{2}{x_n} + \frac{x_n}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $\{x_n\}$ es monótona y acotada y calcular su límite. (SUGERENCIA: Usar las funciones del apartado anterior).

4. **(1 punto)** Calcular el límite de la sucesión $\left\{ \left(\frac{3}{4}\ \frac{1+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2}{n^3} \right)^{n^2} \right\}$.

5. **(2 puntos)**

(a) Demostrar que la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, es biyectiva.

(b) Calcular los extremos relativos de la función $f(x,y,z) = z$ en la superficie

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z + e^z + 2x + 2y - x^2 - y^2 = 3\}.$$

(c) En el caso de que alcanzara algún extremo relativo, comprobar si es absoluto.

6. **(2 puntos)** Calcular $\int_A e^{x^2+y^2} d(x,y,z)$, donde $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 \le z \le 3-(x^2+y^2)\}$.

Granada, 2 de Julio de 2007

EXAMEN DE SEPTIEMBRE DE MATEMÁTICAS I. 1º INGENIERÍA QUÍMICA

1. **(1.75 puntos).** En $\mathbb{R}^4$, se consideran los subespacios

$$A = \langle (1,-1,0,2),(0,2,1,-1),(2,0,1,\alpha) \rangle,$$
$$B = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x-y-z-t=0,\ 2x-3z-t=0,\ 2y-5z+\alpha t=0\}.$$

a) Hallar α para que $A \cap B$ esté engendrado por un único vector. ¿Existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $A \cap B$ tiene dimensión 2?

b) Para los valores anteriores de α, hallar tres bases B_0, B_1 y B_2 de $A \cap B$, A y $A+B$, respectivamente, de modo que $B_0 \subset B_1 \subset B_2$.

2. **(1.75 puntos).** Se considera en $\mathbb{R}^3$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores de a, la matriz A representa la matriz asociada a un producto escalar en $\mathbb{R}^3$, respecto a la base canónica?

b) Calcular a sabiendo que, además, los subespacios

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=0,\ y=0\} \quad \text{y} \quad V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y-2z=0\}$$

son ortogonales.

3. a) **(0.75 puntos).** Sean las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ definidas por

$$a_n = \frac{e^n + (-e)^n}{e^n}, \quad b_n = \frac{e^n + (-e)^n}{\pi^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $\{a_n\}$ no tiene límite y $\{b_n\}$ sí lo tiene y calcularlo.

b) **(0.75 puntos).** Calcular el límite de la sucesión $\left\{ \left(\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+2}} \right)^{\sqrt{n^2+3}} \right\}$.

4. **(1 punto).** Probar que $\ln(x) < \sqrt{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

5. **(2 puntos).** Hallar el punto más alto de la curva dada por la intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=44$ y el plano $2x+y-z=2$.

6. **(2 puntos).** Calcular el volumen del sólido dado por:

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0,\ (x^2+y^2)^2 \leq 9(x^2-y^2),\ 0 \leq z \leq \sqrt{9-x^2-y^2}\}.$$

Granada, 7 de Septiembre de 2007

EXAMEN DE DIEMBRE DE MATEMÁTICAS I. 1º INGENIERÍA QUÍMICA

1. Sea $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por $f(x,y,z) = (\alpha x+y+z, x+\alpha y, x+y+\alpha z)$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Para qué valores de α se verifica que $Ker(f)$ tiene dimensión igual a 1?

2. Considérense los subespacios lineales $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+2y-z=0\}$ y $B = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 2x-y+z=0,\ x+y=0\}$. Dar un ejemplo de una aplicación lineal $f:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $f(B)=A$ y $Ker(f) = B^{\perp}$. Tómese el producto escalar usual en $\mathbb{R}^4$.

3. Calcular el límite cuando $n \longrightarrow \infty$ de las sucesiones

- $a_n = \left(\frac{n^2+1}{n+4}\right)^{\frac{1}{\ln(n^2+n+1)}}$
- $b_n = \frac{1}{n^2}\left[1^2 sen\frac{a}{1} + 2^2 sen\frac{a}{2} + \cdots + n^2 sen\frac{a}{n}\right]$, siendo $a \in \mathbb{R}$.

4. Demostrar que para $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, se verifica la igualdad

$$\int_{\frac{1}{e}}^{\tan x} \frac{t\,dt}{1+t^2} + \int_{\frac{1}{e}}^{\cot x} \frac{dt}{t(1+t^2)} = 1.$$

5. Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por la expresión $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2 + 4$. Considerar el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(1,2)$. De entre los puntos de ese plano, calcular el que se encuentre a menor distancia del punto $(1,2,-1)$.

6. Calcular el volumen de $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y-1)^2 + z^2 \leq 1,\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z\}$.

Granada, 3 de Diciembre de 2007

Examen 1º Cuatrimestre Ingeniería Química.

1. - Definir vectores linealmente dependientes y linealmente independientes.
   - Definición de aplicación lineal entre dos espacios vectoriales.
   - Si $f : V \to W$ es una aplicación lineal y $\{v_1, \ldots, v_r\}$ son linealmente dependientes, ¿Son $\{f(v_1), \ldots, f(v_r)\}$ linealmente dependientes? Demuéstralo si es cierto o pon un contraejemplo en caso contrario.
   - Enunciar y demostrar el Teorema de Pitágoras.

2. Estudiar según los valores de a el sistema

$$\left.\begin{array}{rrrcl} & 2y & -z & = & a \\ 3x & & -2z & = & 11 \\ & y & +z & = & 6 \\ 2x & +y & -4z & = & a \end{array}\right\}$$

   y resolverlo para los valores de a que lo hagan compatible.

3. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$f(1,0,1) = (1,1,1,1-a)$$
$$f(1,1,1) = (1,1,1-a,1)$$
$$f(0,1,1) = (1,0,a,1)$$

   - Calcular la matriz de f respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$.
   - Discutir según los valores de a cuando f es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.
   - Para $a = 0$ hallar una base y la dimensión del núcleo y la imagen de f.

4. En $\mathbb{R}^3$ sean

$$U \equiv \left\{ \begin{array}{l} 2x + y - z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{array} \right.$$

$$V \equiv \left\{ \begin{array}{ll} x = -2\lambda & \\ y = & \mu \\ z = 3\lambda & \end{array} \right.$$

   Hallar las ecuaciones paramétricas, implícitas, la dimensión y una base de $U + V$ y de $U \cap V$.

   Si la matriz del producto escalar en $\mathbb{R}^3$ viene dada por $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, y W es el subespacio generado por el vector $(1,1,0)$, halla $W^\perp$ y una base ortonormal de $W^\perp$.

Granada a 28 de Enero de 2008.

INGENIERÍA QUÍMICA.

MATEMÁTICAS I

1. Discutir, según los valores de los parámetros a y b, el siguiente sistema de ecuaciones y resolverlo en los casos en que resulte compatible:

$$\left.\begin{array}{llcl} bx & +y & +z & = & 4 \\ x & +ay & +z & = & 3 \\ x & +2ay & +z & = & 4 \end{array}\right\}$$

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por

$$f(x, y, z) = (2x + y + 4z,\ x + y + 2z,\ x + 2z)$$

Calcular la matriz asociada a la aplicación así como la dimensión y una base tanto del núcleo como de la imagen de f.

3. a) Calcular

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{3 + \operatorname{sen} x}{3 - \operatorname{sen} x} \right)^{\frac{1}{x}}$$

b) Considérese la función $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = k \ln(x)$ con $k \in \mathbb{R}^+$. Describir, según los valores de k, la intersección de la gráfica de f con la recta $y = x$.

4. Supongamos que la función $f(x, y, z) = xy + yz$ nos proporciona la temperatura del punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Encontrar los puntos más calientes y los más fríos de la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano $z = y$.

5. Calcular la siguiente integral:

$$\int\int_A xy \, \mathrm{d}(x, y)$$

donde $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$

Granada a 27 de junio de 2008

Examen Matemáticas 1º Ingeniería Química.

1.- Si $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^7$ es una aplicación lineal, ¿Cuál puede ser el rango de la matriz formada por los vectores $f(1,1,1), f(2,2,2), f(3,3,3)$? ¿0,1,2,3,7? Justifica la respuesta.

2.- Definir una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mediante su matriz asociada tal que $f(1,0,0) = (2,3)$ y $dim\ ker(f) = 2$.

3.- Dado $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$, justificar si los subconjuntos $B_1 = \{(1,-1,1),(-1,1,2)\}$, $B_2 = \{(1,1,0)$ son o no base de S y si esta es ortogonal u ortonormal.

4.- ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

(a) un sistema compatible indeterminado puede tener el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.

(b) Un sistema de n+1 ecuaciones y n incógnitas tal que el rango de su matriz ampliada sea n+1 puede ser indeterminado.

(c) Un sistema compatible determinado puede tener más incógnitas que ecuaciones.

(d) Un sistema compatible determinado no puede tener más ecuaciones que incógnitas.

(e) Un sistema homogéneo tal que el rango de la matriz de sus coeficientes es igual al número de incógnitas puede ser indeterminado.

5.- Sea $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ una aplicación lineal tal que $Kerf = Imf$ y $f(1,1,0,0) = (0,0,1,1), f(1,-1,0,0) = 0,0,1,-1)$. Hallar la matriz asociada a f en la base canónica, las ecuaciones de $kerf$, una base ortogonal de Imf y $(kerf)^{\perp}$.

6.- Discutir en función de los parámetros a y b el sistema $x-2y+z = -1$, $x + y + 3z = 4$, $5x - y + az = b$. Resolver el sistema compatible indeterminado y también cuando $a = b = 10$.

6.-bis Discutir en función del parámetro k y resolver si $k = 1$ y cuando sea compatible indeterminado el sistem $kx + 2z = 0$, $ky - z = k$, $x + 3y + z = 5$

7.- Definición y caracterización del la noción de supremo de un conjunto. Define y relaciona los siguientes conceptos: sucesión monótona, convergente, acotada y sucesión divergente.

8.- Dada la sucesión $x_1 = 1/4$, $x_{n+1} = 1/4 + x_n^2$, demostrar que es monótona creciente y acotada. Hallar su límite.

9.- Calcúlese el límite de la sucesión $\frac{1+2^2+3^2+...+n^2}{n^3}$

Granada a 1 de Julio de 2008

INGENIERÍA QUÍMICA.

MATEMÁTICAS I

1. *Discutir, según los valores de los parámetros a y b, el siguiente sistema de ecuaciones y resolverlo en los casos en que resulte compatible:*

$$\left.\begin{array}{llll} bx & +y & +z & = 4 \\ x & +ay & +z & = 3 \\ x & +2ay & +z & = 4 \end{array}\right\}$$

Las matrices A (de los coeficientes) y B (ampliada) son, escritas juntas:

$$\left(\begin{pmatrix} b & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2a & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}\right)$$

$|A| = a(1-b)$ luego $|A| = 0 \Longleftrightarrow a = 0$ ó $b = 1$. De aquí que si $a \neq 0$ y $b \neq 1$ se tendrá $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = 3$ y el sistema será compatible determinado, mientras que si $a = 0$ ó $b = 1$ tendremos $\mathrm{rg}(A) < 3$.

Con $a = 0$ las matrices son

$$\left(\begin{pmatrix} b & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}\right)$$

Sabemos que $\mathrm{rg}(A) < 3$, pero $\mathrm{rg}(B) = 3$ (véase el menor resultante de suprimir la primera columna que, además, no depende de b) luego si $a = 0$ el sistema es incompatible independientemente del valor de b.

Para $b = 1$,

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2a & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}\right)$$

para calcular $\mathrm{rg}(B)$, suprimiendo la primera columna,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ a & 1 & 3 \\ 2a & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 - 2a, \qquad 1 - 2a = 0 \Longleftrightarrow a = 1/2$$

luego si $b = 1$ y $a \neq 1/2$ tendremos $\mathrm{rg}(A) < 3$ y $\mathrm{rg}(B) = 3$ y el sistema es incompatible, mientras que con $b = 1$ y $a = 1/2$ las matrices quedarán como sigue:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}\right)$$

Es claro que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{tg}(B) = 2 < 3 =$ *número de incógnitas* y estaremos ante un sistema compatible indeterminado. Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \neq 0$ podemos despreciar la tercera fila y utilizar z como parámetro.

En resumen:

$$\begin{array}{llll}
a=0 & & \mathrm{rg}(A)<3,\ \mathrm{rg}(B)=3 & \text{S.I.} \\
a\neq\frac{1}{2} & \text{y} \quad b=1 & \mathrm{rg}(A)<3,\ \mathrm{rg}(B)=3 & \text{S.I.} \\
a=\frac{1}{2} & \text{y} \quad b=1 & \mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}(B)=2 & \text{S.C.I.} \quad x=2-t,\ \ y=2,\ \ z=t \\
a\neq 0 & \text{y} \quad b\neq 1 & \mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}(B)=3 & \text{S.C.D.} \quad x=\frac{1-2a}{a(1-b)},\ \ y=\frac{1}{a},\ \ z=\frac{4a-2ab-1}{a(1-b)}
\end{array}$$

2. *Sea $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por*

$$f(x,y,z)=(2x+y+4z,\,x+y+2z,\,x+2z)$$

Calcular la matriz asociada a la aplicación así como la dimensión y una base tanto del núcleo como de la imagen de f.

Calculando las imágenes de la base canónica y usándolas como columnas obtenemos la matriz

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Conviene notar que $|M|=0$ y $\mathrm{rg}(M)=2$ lo que nos indica que la dimensión de la imagen es dos y la del núcleo uno. Para calcular el núcleo resolvemos el sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuyas soluciones son $x=-2t$, $y=0$, $z=t$ y haciendo $t=1$ obtenemos $\{(-2,0,1)\}$ como base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Recordando que $\{f(e_1),f(e_2),f(e_3)\}$ forman un sistema de generadores de la imagen, ya que todo elemento de la imagen es de la forma $f(x,y,z)=xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3)$, para conseguir una base de aquélla basta quedarse con dos de estos vectores que sean linealmente independientes, por ejemplo: $\{(2,1,1),(1,1,0)\}$.

3. *a) Calcular*

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3+\operatorname{sen}x}{3-\operatorname{sen}x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Estamos ante una indeterminación del tipo 1^∞. Para resolverla calculamos

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3+\operatorname{sen}x}{3-\operatorname{sen}x}-1\right)\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}x}{(3-\operatorname{sen}x)x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{3-\operatorname{sen}x}\,\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)=\frac{2}{3}$$

ya que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1$. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3+\operatorname{sen}x}{3-\operatorname{sen}x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{e^2}$$

b) Considérese la función $f:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x)=k\ln(x)$ con $k\in\mathbb{R}^+$. Describir, según los valores de k, la intersección de la gráfica de f con la recta $y=x$.

Se trata de discutir, según los valores de k, el sistema

$$\begin{cases} y = k \ln x \\ y = x \end{cases}$$

que equivale a hallar, para los distintos valores de k, las posibles soluciones de la ecuación $k\ln(x) - x = 0$, para lo cual basta con estudiar para qué valores de k las gráficas de las funciones $g_k : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $g_k(x) = k\ln(x) - x$, $(k \in \mathbb{R}^+)$ cortan al eje horizontal y en cuántos puntos.

Estudiemos una de estas funciones empezando por su crecimiento:

$$g_k'(x) = \frac{k}{x} - 1 = \frac{k-x}{x}$$

y, siendo $x > 0$, se obtiene que g_k es estrictamente creciente para $x < k$ y estrictamente decreciente para $x > k$ de lo que se deduce que en $x = k$ la función alcanza su máximo absoluto. Ese máximo vale $g_k(k) = k\ln(k) - k$.

Por otra parte, es fácil ver que $\lim_{x\to 0} g_k(x) = \lim_{x\to+\infty} g_k(x) = -\infty$.

Resumiendo: cada una de estas funciones toma valores negativos, tanto en el intervalo $]0,k[$ como en $]k,\to[$, y se mantiene por debajo de su máximo absoluto que vale $k\ln(k)-k$ (y que alcanza en $x = k$). Ahora es evidente que si $k\ln(k) - k < 0$ la función g_k no cortará al eje horizontal, si $k\ln(k) - k = 0$ lo cortará en un punto (justo donde alcanza el máximo) y si $k\ln(k) - k > 0$, el Teorema de Bolzano nos informa de que lo cortará en dos puntos, uno en cada uno de los intervalos descritos arriba. Pero

$$k\ln(k) - k < 0 \iff k\ln(k) < k \iff \ln(k) < 1 \iff k < e$$

En resumen:

$$\begin{array}{lll} k < e \implies g_k \text{ no corta al eje } OX & \implies & f \text{ no corta a } y = x \\ k = e \implies g_k = g_e \text{ corta a } OX \text{ en un punto} & \implies & f \text{ corta a } y = x \text{ en un punto} \\ k > e \implies g_k \text{ corta a } OX \text{ en dos puntos} & \implies & f \text{ corta a } y = x \text{ en dos puntos} \end{array}$$

4. *Supongamos que la función $f(x,y,z) = xy + xz$ nos proporciona la temperatura del punto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Encontrar los puntos más calientes y los más fríos de la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano $z = y$.*

Usaremos el método de los Multiplicadores de Lagrange llamando $g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1$ y $g_2(x,y,z) = z - y$. El sistema a resolver es:

$$\left.\begin{array}{r} y + z + 2x\lambda = 0 \\ x + 2y\lambda - \mu = 0 \\ x + \mu = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ z - y = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} z = y \\ y + x\lambda = 0 \\ x + 2y\lambda - \mu = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x + \mu = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} z = y \\ \mu = -x \\ y + x\lambda = 0 \\ x + y\lambda = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} z = y \\ \mu = -x \\ y = -x\lambda \\ x(1-\lambda^2) = 0 \\ x^2(1+\lambda^2) = 1 \end{array}\right\}$$

La cuarta igualdad se verifica sólo si $1 - \lambda^2 = 0$ (la solución $x = 0$ es incompatible con la quinta ecuación) luego $\lambda = \pm 1$.

Con $\lambda = 1$ se obtiene $x = \pm 1/\sqrt{2}$, $y = \mp 1/\sqrt{2}$, $z = \mp 1/\sqrt{2}$ y $\mu = \mp 1/\sqrt{2}$. Y para $\lambda = -1$ tenemos $x = \pm 1/\sqrt{2}$, $y = \pm 1/\sqrt{2}$, $z = \pm 1/\sqrt{2}$ y $\mu = \mp 1/\sqrt{2}$.

Por tanto, hay que evaluar los siguientes puntos:

$$\begin{array}{lll} P_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}) & \lambda = 1 & \mu = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ P_2 = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) & \lambda = 1 & \mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ P_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}) & \lambda = -1 & \mu = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ P_4 = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}) & \lambda = -1 & \mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}$$

y es inmediato ver que $f(P_1) = f(P_2) = -1$ mientras que $f(P_3) = f(P_4) = 1$, lo que significa que el máximo absoluto se alcanza en P_3 y P_4 (los más calientes) y el mínimo absoluto en P_1 y P_2 (los más fríos).

5. *Calcular la siguiente integral:*

$$\int\int_A xy \, \mathrm{d}(x, y)$$

donde $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$

La región de integración es la parte que queda por encima del eje horizontal, de la intersección de dos círculos de radio unidad, uno con centro en el origen y el otro con centro en el punto $(1, 0)$. Es fácil ver que el punto de corte de las circunferencias que los delimitan es $(1/2, \sqrt{3}/2)$.

Quizá la forma más cómoda de calcular esta integral sea ver esta zona como región de Tipo II:

$$\begin{array}{rcl} 0 \leq & y & \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 - \sqrt{1-y^2} \leq & x & \leq \sqrt{1-y^2} \end{array}$$

y la integral, que no presenta dificultad alguna, quedaría

$$\int\int_A xy \, \mathrm{d}(x, y) = \int_{y=0}^{y=\sqrt{3}/2} \left(\int_{x=1-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} xy \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y =$$

$$= \int_{y=0}^{y=\sqrt{3}/2} \frac{y}{2} \left(1 - y^2 - \left(1 - \sqrt{1-y^2} \right)^2 \right) \mathrm{d}y = \frac{5}{48}$$

Otra forma de resolver el problema es partir la región en dos de Tipo I haciendo

$$\int\int_A xy \, \mathrm{d}(x, y) = \int_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} \left(\int_{y=0}^{y=\sqrt{2x-x^2}} xy \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x +$$

$$+ \int_{x=\frac{1}{2}}^{x=1} \left(\int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} xy \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Por último, si uno quiere complicarse la vida, puede cambiar a coordenadas polares:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \implies r\cos\theta \geq 0 \implies \cos\theta \geq 0 \\ y \geq 0 \implies r\mathrm{sen}\,\theta \geq 0 \implies \mathrm{sen}\,\theta \geq 0 \end{array} \right\} \implies 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x^2+y^2\le 1 & \Longrightarrow & r\le 1 \\ x^2+y^2\le 2x & \Longrightarrow & r\le 2\cos\theta \end{array}\right\}\Longrightarrow r\le \min\{1,2\cos\theta\}$$

Basta ver ahora que, para $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, se tiene que

$$\min\{1,2\cos\theta\}=1 \iff 1\le 2\cos\theta \iff \cos\theta\ge\frac{1}{2} \iff 0\le\theta\le\pi/3$$

y, como no podría ser de otra manera,

$$\min\{1,2\cos\theta\}=2\cos\theta \iff 2\cos\theta\le 1 \iff \cos\theta\le\frac{1}{2} \iff \pi/3\le\theta\le\pi/2$$

luego la integral quedará:

$$\int\int_A xy\,\mathrm{d}(x,y)=\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{3}}\left(\int_{r=0}^{r=1} r^3\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta+$$

$$+\int_{\theta=\frac{\pi}{3}}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\left(\int_{r=0}^{r=2\cos\theta} r^3\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta$$

Granada a 2 de julio de 2008

Examen Ingeniería Química.

1. Estudiar según los valores de α y β el sistema

$$\left.\begin{array}{rrrcl} x & +2y & -z & = & 1 \\ 2x & +3y & -3z & = & 1 \\ 3x & +4y & +\alpha z & = & \beta \end{array}\right\}$$

   y resolverlo en los siguientes casos si es posible:
   a) $\alpha = -4, \beta = 2$
   b) $\alpha = -5, \beta = 1$
   c) $\alpha = -5, \beta = 2$

2. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(1,0,0) = (1,1,1)$$
$$f(0,1,0) = (1,a,1)$$
$$f(0,0,1) = (1,1,b)$$

   Determinar las dimensiones del núcleo y de la imagen de f en función de a y b y hallar una base y las ecuaciones de estos subespacios cuando $a = 1, b = 0$.

Granada a 9 de Septiembre de 2008.

Examen Matemáticas 1. 1ª Ingeniería Química.

1.- Discutir según los valores del parámetro a el siguiente sistema y resolverlo cuando sea compatible:

$$\begin{array}{rrrl} x & +3y & -az & = 4 \\ -ax & +y & +az & = 0 \\ -x & +2ay & & = a+2 \\ 2x & -y & -2z & = 0 \end{array}$$

2.- Sea H el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0\}$$

(a) Comprobar que H es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y hallar una base **ortonormal** de H

(b) Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ es la aplicación lineal cuya matriz asociada (respecto de las bases canónicas) es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcular una base del subespacio $f(H)$.

3.- (a) Sea $a > 0, a \neq 1$. Calcular $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a^x - 1}{x(a-1)} \right)^{1/x}$.

(b) Hallar los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log(1 + x^2) - \int_0^x \frac{2t}{1+t^4} dt$.

4.- Hallar los extremos de la función $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 16z^2$ bajo la condición $xy = 1$.

5.- Hallar el volumen del sólido

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2, x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1\}$$

Granada a 1 de Diciembre de 2008

Ingeniería Química.

MATEMÁTICAS I. SEGUNDO PARCIAL, CURSO 2008/2009.

Ejercicio 1. (1 punto) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(x)(1+x^2)}{e^x+x}$.

Ejercicio 2. (1 punto) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(7+4e^x)}{\sqrt{5+4x^2}}$.

Ejercicio 3. (1 punto) Probar que la ecuación $e^x+x-2=0$ tiene una única solución en $[0,+\infty[$.

Ejercicio 4. (1 punto) Estudiar el crecimiento y los posibles extremos relativos de la función $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\dfrac{x}{\ln(x)}$.

Ejercicio 5. (1 punto) Calcular el plano tangente a la gráfica de la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=2x^2y^2+3xy^3$ en el punto $(1,1,f(1,1))$.

Ejercicio 6. (1 punto) Calcular $\displaystyle\iint_A \left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{1+y^2}\right)d(x,y)$ donde A es el triángulo de vértices $(0,0),(1,0)$ y $(1,1)$.

Ejercicio 7. (1 punto) Calcular el volumen de la región

$$A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\leqslant z\leqslant 2-x^2-y^2\}.$$

Ejercicio 8. (1 punto) Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivable, que sólo se anula en $x=0$ y con $g'(x)>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Estudiar la naturaleza de los puntos críticos de la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y)=\int_0^{x-1} g(t)\,dt+\int_0^{y-1} g(t)\,dt.$$

Ejercicio 9. (2 puntos) Calcular los extremos absolutos de la función

$$f(x,y)=2x^2+3y^2-4x-5,$$

en el conjunto

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leqslant 16\right\}.$$

Granada, 15 de junio de 2009.

Ingeniería Química.

MATEMÁTICAS I. EXAMEN FINAL, CURSO 2008/2009.

PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. (2 puntos)

1. Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^7$ es una aplicación lineal, ¿Cuál puede ser el rango de la matriz formada por los vectores $f(1,1,1), f(2,2,2), f(3,3,3)$? ¿0,1,2,3,7? Justifica la respuesta.

2. Definir, mediante su matriz asociada, una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1,0,0) = (2,3)$ y $dim\ ker(f) = 2$.

3. Dado $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y=0\}$, justificar si los subconjuntos $B_1 = \{(1,-1,1),(-1,1,2)\}$, $B_2 = \{(1,1,0)\}$ son o no base de S y si ésta es ortogonal u ortonormal.

4. ¿Es cierto que un sistema de n+1 ecuaciones y n incógnitas tal que el rango de su matriz ampliada sea n+1 puede ser indeterminado? Justifica la respuesta y, si es cierto, da un ejemplo.

Ejercicio 2. (2 puntos) Discutir en función de los parámetros a y b el sistema

$$x - 2y + z = -1$$

$$x + y + 3z = 4$$

$$5x - y + az = b$$

y resolverlo cuando sea compatible.

Ejercicio 3. (1 punto) Calcúlese el límite de la sucesión

$$\frac{1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^3}$$

Granada, 1 de julio de 2009.

Ingeniería Química.

MATEMÁTICAS I. EXAMEN FINAL, CURSO 2008/2009.

SEGUNDA PARTE

Ejercicio 4. (1 punto) Calcular el siguiente límite según los valores de $a > 0$:

$$\lim_{x \to 0} (\tan(2x) + a\cos(3x))^{\frac{1}{3x}}.$$

Ejercicio 5. (1 punto) Pruébese la siguiente desigualdad para todo $x \geqslant 0$:

$$\operatorname{arc\,tg}(x) \geqslant \frac{x}{1+x^2}.$$

Ejercicio 6. (1 punto) Calcular $\iiint_A \frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} d(x,y,z)$ donde A es el recinto limitado inferiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y superiormente por el plano $z = 4$.

Ejercicio 7. (1 punto) Determinar el punto del elipsoide $2x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 70$ que verifica que la suma de las coordenadas primera y tercera es máxima.

Ejercicio 8. (1 punto) Calcular los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^3 + y^3 - xy$.

Granada, 1 de julio de 2009.

Ingeniería Química.

MATEMÁTICAS I. EXAMEN FINAL, CURSO 2008/2009.

SEGUNDA PARTE

Ejercicio 4. (1 punto) Calcular el siguiente límite según los valores de $a > 0$:

$$\lim_{x\to 0}(\tan(2x) - a\cos(3x))^{\frac{1}{3x}}.$$

Ejercicio 5. (1 punto) Pruébese la siguiente desigualdad para todo $x \geqslant 0$:

$$\operatorname{arc\,tg}(x) \geqslant \frac{x}{1+x^2}.$$

Ejercicio 6. (1 punto) Calcular $\iiint_A \frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} d(x,y,z)$ donde A es el recinto limitado inferiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y superiormente por el plano $z = 4$.

Ejercicio 7. (1 punto) Determinar el punto del elipsoide de ecuación $2x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 70$ que verifica que la suma de las coordenadas primera y tercera es máxima.

Ejercicio 8. (1 punto) Calcular los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^3 + y^3 - xy$.

Granada, 1 de julio de 2009.

Ingeniería Química.

MATEMÁTICAS I. EXAMEN FINAL SEPTIEMBRE, CURSO 2008/2009.

PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. (1 punto) Dados $S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = 0, y+z+t = 0\}$ y T el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $(1,0,0,0)$ y $(0,2,-1,-1)$, hallar:

1. Una base ortonormal de S.
2. Las ecuaciones implícitas de T.
3. La dimensión de $S+T$ y la dimensión de $S \cap T$.

Ejercicio 2. (1 punto) Dado $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+t = 0\}$, construir una aplicación lineal, mediante su matriz asociada, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $Im(f) = V$. Calcular la dimensión de $Ker(f)$.

Ejercicio 3. (2 puntos) Discutir en función de los parámetros a y b el sistema

$$3x + y + (a+1)z = 4$$
$$-y + 3z = b$$
$$2x + y - z = 3$$

y resolverlo cuando sea compatible.

Ejercicio 4. (1 punto) Calcúlese

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^3}{3^2} + \frac{3^4}{4^3} + \frac{4^5}{5^4} + \ldots + \frac{(n-1)^n}{n^{n-1}}}{n^2}$$

Granada, 14 de septiembre de 2009.

Ingeniería Química.

MATEMÁTICAS I. EXAMEN FINAL SEPTIEMBRE, CURSO 2008/2009.

SEGUNDA PARTE

Ejercicio 5. (1 punto) Calcular los extremos absolutos de la función $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\,dt\,.$$

Ejercicio 6. (1 punto) Pruébese la siguiente desigualdad para todo $x\in]0,1[$:

$$\operatorname{arcsen}(x)<\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Ejercicio 7. (1 punto) Calcular $\displaystyle\iint_A \frac{y}{x^2+y^2}\,d(x,y)$ donde

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geqslant 0,\, x^2+y^2\geqslant 2,\, x^2+y^2\leqslant 2x\}.$$

Ejercicio 8. (1 punto) Calcular el polinomio de Taylor de orden tres centrado en el origen para la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\operatorname{sen}(x)\cos(x)$. Utilizarlo para calcular un valor aproximado de $f(0.1)$ acotando el error cometido.

Ejercicio 9. (1 punto) Calcular los extremos relativos de la función $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=x^3+\frac{y^3}{3}-3xy+3x-y$.

Granada, 14 de septiembre de 2009.

18 de diciembre de 2009.

Apellidos y nombre:..

1. Definición de aplicación lineal entre espacios vectoriales. Sean E y E' espacios vectoriales y $f : E \longrightarrow E'$ una aplicación. f es una aplicación lineal si...

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ una aplicación lineal tal que $f(e_1) = (1, 0, 0, 0)$, $f(e_2) = (0, 1, 0, 0)$ y $f(e_3) = 2f(e_1) + 3f(e_2)$ donde $\{e_1, e_2, e_3\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Escribir la matriz asociada a f.

3. Siendo f la aplicación anterior ¿cuál es la dimensión del núcleo de f?

4. Si en un determinante intercambiamos dos filas entre sí, el determinante: (a) no varía, (b) cambia de signo, (c) vale cero, (d) ninguna de las anteriores. (Rodear con un círculo la respuesta correcta)

5. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calcular A^{-1}.

6. En un espacio euclídeo ¿qué es una base ortogonal?

7. Definición de subespacio vectorial. Sea H un subconjunto de E. H es un subespacio vectorial si...

8. Sea $F = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una familia de vectores linealmente dependiente. Si a_1, a_2, a_3, a_4 son números reales tales que $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 = 0$ ¿Qué podemos afirmar de a_1, a_2, a_3, a_4? (a) son todos cero, (b) hay alguno que vale cero, (c) hay alguno distinto de cero, (d) son todos distintos de cero, (e) nada de lo anterior.

9. Sea $F = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una familia de vectores linealmente independiente. Si a_1, a_2, a_3, a_4 son números reales tales que $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 = 0$ ¿Qué podemos afirmar de a_1, a_2, a_3, a_4? (a) son todos cero, (b) hay alguno que vale cero, (c) hay alguno distinto de cero, (d) son todos distintos de cero, (e) nada de lo anterior.

10. Sea $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ una aplicación lineal inyectiva (un monomorfismo) y A su matriz asociada. ¿Cual es el rango de A? Razonar la respuesta.

Teoría primer cuatrimestre Matemáticas I. Ingeniería Química. 27-1-2010

Grupo: 1º A. Apellidos:.. Nombre:....................EXAMEN TIPO B

1. *[1 punto] Si $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ son vectores linealmente independientes y $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ son números reales tales que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = 0$, ¿qué podemos decir de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$:*
   (a) son todos cero (b) hay alguno que vale cero (c) hay alguno distinto de cero (d) nada de lo anterior.

2. *[1 punto] Definición de subespacio vectorial. Sea H un subconjunto de un espacio vectorial E. H es un subespacio vectorial de E si ....*

3. *[4 puntos] Decir si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones exponiendo un contraejemplo en el caso de ser falsas.*
   Toda sucesión acotada es convergente:.......
   Toda sucesión acotada es monótona: ....
   Toda sucesión convergente es acotada:........
   Toda sucesión convergente es monótona: ......
   Toda sucesión monótona es convergente:.....
   Toda sucesión monótona es acotada:......
   Toda sucesión monótona y acotada es convergente: ....

4. *[2 puntos] La sucesión $\{x_n\}$ tiene límite L si .....*
   La sucesión $\{x_n\}$ está acotada si ....
   La sucesión $\{x_n\}$ se dice monótona creciente si ...

5. *[2 puntos] Dos vectores se dicen ortogonales si ......*
   Enuncia el Teorema de Pitágoras: ....

6. *[3 puntos] Un sistema de ecuaciones lineales se dice compatible si ....*
   Un sistema de ecuaciones lineales se dice compatible determinado si ....
   Un sistema de ecuaciones lineales se dice homogéneo si .....

(Rodea con un círculo la respuesta correcta) Todo sistema homogéneo es

(a) Compatible (b) Incompatible (c) nada de lo anterior (d) Puede ser compatible o incompatible.

(1) determinado (2) indeterminado (3) nada de lo anterior (4) puede ser determinado o indeterminado.

7. [3 puntos] Sea $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. ¿Tiene inversa?.... porque ....

   Si la tiene, hállala: $B^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$.

8. [2 puntos] Sea $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal tal que $h(1,0,0) = (-2,-1)$, $h(1,0,0) = (1,2)$ y $h(0,0,1) = 2h(1,0,0) - h(0,1,0)$. Hallar la matriz asociada a h: $\begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}$.

   Hallar $dimker(h) =$ .... y $dimIm(h) =$ .... ¿Es inyectiva?..... ¿Es sobreyectiva? ....

9. [1 punto] Definición de aplicación lineal entre espacios vectoriales: Sean M,N espacios vectoriales y $g : M \to N$ una aplicación. g es una aplicación lineal si ....

10. [6 puntos] Dados $A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y - x = 0\}$ y $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ completar la siguiente tabla:

Subespacio	Dimensión	.... Base	¿Está $(-1,-1,-1)$ en el subespacio?
A			
B			
$A+B$			
$A \cap B$			

Granada a 27 de Enero de 2010.

1 de febrero de 2010.

Apellidos y nombre:...

1. Sea S un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Supongamos que A es la matriz $m\times n$ formada por los coeficientes de las incógnitas y $A|B$ (de orden $m\times(n+1)$) la matriz A ampliada con la columna de los términos independientes. Enunciar el Teorema de Rouché-Frobenius.

2. Sea $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ una aplicación lineal tal que $f(e_1)=(2,0,0,0)$, $f(e_2)=(0,4,0,0)$ y $f(e_3)=f(2e_1+3e_2)$ donde $\{e_1,e_2,e_3\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Escribir la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas.

3. Siendo f la aplicación anterior ¿cuál es la dimensión del núcleo de f?

4. Sea $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Siendo $A^{-1}=(a_{i,j})$, calcular $a_{2,1}$.

5. Sean $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ una familia de vectores ortogonales dos a dos, es decir, $u_i\cdot u_j=0$ para $i,j=1,\ldots,4$, $i\neq j$. Demostrar que forman una familia linealmente independiente.

Rodear con un círculo la respuesta correcta

6. Sea $F = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una familia de vectores linealmente dependiente. Si a_1, a_2, a_3, a_4 son números reales tales que $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 = 0$ ¿Qué podemos afirmar de a_1, a_2, a_3, a_4? (a) Son todos cero. (b) Hay alguno que vale cero. (c) Hay alguno distinto de cero. (d) Son todos distintos de cero. (e) Nada de lo anterior.

7. Sea E un espacio vectorial de dimensión 4. Sea $F = \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \subset E$ una familia de generadores de E.

   (a) No podemos afirmar que F es es una base de E pues habría que comprobar que sus vectores son ortogonales dos a dos. (b) No podemos afirmar que F es una base de E pues habría que comprobar que sus vectores son linealmente independientes. (c) Ninguna de las anteriores.

8. Sea A un conjunto de números reales no vacío.

   (a) El supremo de A siempre existe. (b) Si A está acotado superiormente, el supremo coincide con el máximo. (c) Si A tiene máximo, tiene supremo. (d) Ninguna de las anteriores.

9. Sea $\{a_n\}$ una sucesión convergente.

   (a) $\{a_n\}$ es monótona. (b) $\{a_n\}$ está acotada si, y sólo si, es monótona. (c) $\{a_n\}$ está acotada. (d) Ninguna de las anteriores.

10. Considérese el conjunto $A = \left\{\frac{3}{2n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Calcular, si existen, y escribir "NO EXISTE" en caso contrario, los siguientes valores:

$$\mathrm{Sup}(A) = \qquad\qquad \mathrm{Inf}(A) =$$
$$\mathrm{Max}(A) = \qquad\qquad \mathrm{Min}(A) =$$

EXAMEN DE SEPTIEMBRE.
MATEMÁTICAS 1. INGENIERÍA QUÍMICA.

1. **(2 puntos)** Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por

$$f(x, y, z, t) = (x - y + 2z, 2x + y - t, -x - y + 2t).$$

   (a) Describir el núcleo de f. Calcular una base ortonormal de $Im(f)$.

   (b) Resolver, si es posible, la ecuación $f(x, y, z, t) = (1, 2, 1)$.

   (c) Calcular la matriz asociada a f en las bases $B = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^4$ y $B' = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

2. **(0.75 puntos)** Sea f_a la aplicación lineal cuya matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & a \\ a & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 2 \end{pmatrix}$$

   Calcular los valores de a para los cuales f_a es sobreyectiva. ¿Para que valores de a es inyectiva?

3. **(1.5 puntos)** Calcular los siguientes límites.

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\dfrac{\sin(\pi x)}{x - \sin(x)}}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos(x) + a\sin(bx))^{\dfrac{1}{x}}$

   (c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{\ln(n+1)}{\tan(\frac{\pi}{3}) + \tan(\frac{\pi}{4}) + \ldots + \tan(\frac{\pi}{n})}\right\}$

4. **(0.75 puntos)** Hallar los puntos de la superficie $z = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$ en los que el plano tangente es paralelo al plano XY.

5. **(2 puntos)** Estudiar la existencia de extremos relativos y absolutos de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x$ en el conjunto $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 16\}$.

6. **(1.5 puntos)** Calcular el volumen del sólido delimitado por el cono de ecuación $x^2 + y^2 = az^2$, $(a > 0)$ situado por encima del plano $z = 0$ y en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = by$, $(b \neq 0)$.

7. **(1.5 puntos)** Calcular la siguiente integral:

$$\int_B ze^{-(x^2+y^2)} d(x, y, z)$$

   siendo $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2(x^2 + y^2) \leq z^2 \leq x^2 + y^2 + 1, z \geq 0\}$.

Granada, a 11 de septiembre de 2000.

EXAMEN DE SEPTIEMBRE.
MATEMÁTICAS 1. INGENIERÍA QUÍMICA.

1. **(2 puntos)** Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por
$$f(x, y, z, t) = (x - y + 2z, 2x + y - t, -x - y + 2t).$$
   (a) Describir el núcleo de f. Calcular una base ortonormal de $Im(f)$.
   (b) Resolver, si es posible, la ecuación $f(x, y, z, t) = (1, 2, 1)$.
   (c) Calcular la matriz asociada a f en las bases $B = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^4$ y $B' = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

2. **(0.75 puntos)** Sea f_a la aplicación lineal cuya matriz asociada es
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & a \\ a & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 2 \end{pmatrix}$$
Calcular los valores de a para los cuales f_a es sobreyectiva. ¿Para que valores de a es inyectiva?

3. **(1.5 puntos)** Calcular los siguientes límites.
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\dfrac{\sin(\pi x)}{x - \sin(x)}}$
   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos(x) + a\sin(bx))^{\dfrac{1}{x}}$
   (c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{\ln(n+1)}{\tan(\frac{\pi}{3}) + \tan(\frac{\pi}{4}) + \ldots + \tan(\frac{\pi}{n})}\right\}$

4. **(0.75 puntos)** Hallar los puntos de la superficie $z = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$ en los que el plano tangente es paralelo al plano XY.

5. **(2 puntos)** Estudiar la existencia de extremos relativos y absolutos de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x$ en el conjunto $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 16\}$.

6. **(1.5 puntos)** Calcular el volumen del sólido delimitado por el cono de ecuación $x^2 + y^2 = az^2$, $(a > 0)$ situado por encima del plano $z = 0$ y en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = by$, $(b \neq 0)$.

7. **(1.5 puntos)** Calcular la siguiente integral:
$$\int_B z e^{-(x^2+y^2)} d(x, y, z)$$
siendo $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2(x^2 + y^2) \leq z^2 \leq x^2 + y^2 + 1, z \geq 0\}$.

Granada, a 11 de septiembre de 2000.

CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE.
MATEMÁTICAS 1. INGENIERÍA QUÍMICA.

1. (3.5 puntos) Sea $V = \mathbb{P}_2(x) = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : \quad a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, 1, 2\}$ el espacio vectorial de polinomios de grado ≤ 2 y sea $B = \{x - 1, (x - 1)^2, x\}$.
   (a) Demostrar que B es una base de V.
   (b) Sea $f : V \to V$ la aplicación lineal cuya matriz asociada en la base B es
   $$M(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Calcular la matriz asociada a f en la base canónica, $B_C = \{1, x, x^2\}$, de V.
   (c) Calcular $\ker(f)$ e $\mathrm{im}(f)$ para la aplicación f del apartado anterior.
   (d) Sea
   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Probar que A corresponde a la matriz de un producto escalar en V.
   (e) Si la matriz A del apartado anterior corresponde a la matriz de un producto escalar en la base B_C, calcular, para dicho producto escalar, una base de $\ker(f)^{\perp}$.

2. (1 punto) Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable verificando que $f(0) = 0$, $f(1/4) = 3/4$, $f(3/4) = 1/4$ y $f(1) = 1$. Probar que existe un punto $x \in]0, 1[$ verificando que $f''(x) = 0$.

3. (2 puntos) Estudiar la continuidad y la diferenciabilidad de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
   $$f(x, y) = \begin{cases} \left(1 + x^2 y^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}} & (x, y) \neq 0 \\ 1 & (x, y) = 0 \end{cases}$$

4. (1.75 puntos) Calcular los puntos que se encuentran más cercanos y más lejanos al origen de la intersección de las superficies de ecuaciones $x^2 + y^2 + xy - z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 1$.

5. (1.75 puntos) Calcular $\int_A \sqrt{xy}\ d(x, y)$ donde
   $$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}\right)^2 \leq \frac{xy}{\sqrt{6}} \right\}.$$

Granada, a 12 de septiembre de 2001.

Grado en Ingeniería Química

MATEMÁTICAS I.

Problema 1. Sea $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función polinómica definida mediante la expresión

$$P(x) := x^4 - x^3 + x^2 + x - 1.$$

(a) Demostrar que P tiene al menos una raíz real en cada uno de los intervalos $[-1,0]$ y $[0,1]$.

(b) Demostrar que $P'(x)$ tiene sólo una raíz real en $[-1,0]$.

(c) Deducir que P sólo admite dos raíces reales.

Problema 2. Sea $p = e^{0,0001} + \log(0,9999) - 1$.

(a) Utilizando un polonimio de Taylor de la función $f(x) = e^x + \log(1-x)$, calcular una aproximación decimal de p con error menor que 10^{-2}.

(b) ¿Es p un número positívo o negativo?

Problema 3. Calcular los extremos relativos de la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y) := 8x^3 - 24xy + y^3$.

Problema 4. Calcular las dimensiones del paralelepípedo (caja rectangular) de mayor volumen que se puede inscribir en el elipsoide de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, donde $a,b,c\in\mathbb{R}^+$.

Problema 5. Calcular la siguiente integral

$$\int_A (x^2+y)\,dx\,dy,$$

siendo $A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0,\, y\geq 0,\, 1\leq x^2+y^2\leq 4\right\}$.

Normas del examen
✓ Entrega cada ejercicio en un solo folio con el encabezamiento *“ejercicio número *”* y tu nombre completo.
✓ Los cálculos deben hacerse de forma exacta sin usar números decimales.

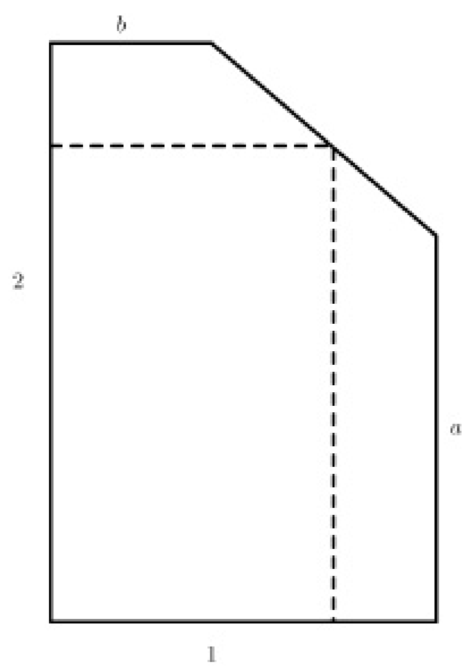
Granada, 31 de Enero de 2011.

Matemáticas I

Grado en Ingeniería Química, 1º-B.

1.) Intentaremos aproximar el $\log(1{,}5)$ con un error menor que 10^{-3}. A tal efecto se pide calcular el polinomio de Taylor de grado n, $P_n(x)$, de la función $f(x) = \log(1+20x)$ ($x \in (-\frac{1}{20}, +\infty]$). Calcular el menor n para el cual se verifica que el error cometido al aproximar $\log(1{,}5)$ mediante un determinado valor de $P_n(x)$ sea menor que 10^{-3}.

2.) Después de recibir un golpe, un espejo rectangular de base 1 y altura 2 se ha roto en una de sus esquinas y ha perdido un trozo en forma triangular de lados $0 < a < 2$ y $0 < b < 1$ (véase figura abajo). Pretendemos conseguir otro espejo rectangular cortando el trozo restante mediante dos paralelas a los lado (ver línea discontinua de la figura inferior). Calcular las dimensiones del espejo rectangular de mayor área que podemos conseguir de esta forma.



3.) Estudiar los punto críticos de las siguientes funciones:

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + yz + 2zx - xy.$

b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = xy + xz + yz.$

Granada, 16 de Diciembre de 2011

Matemáticas I

Grado en Ingeniería Química, 1º-B.

1.) Usando un desarrollo de Taylor adecuado de la función

$$f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

aproximar el valor de $\cosh(0{,}5)$ con un error menor que 10^{-3}.

2.) Consideremos la parábola de ecuación $y = f(x) = 4 - x^2$. Sea $(a, f(a))$ un punto en la gráfica de la mencionada parábola. Calcular a para que el triángulo que determina la recta tangente a la parábola en el punto $(a, f(a))$ con los semiejes positivos tenga área mínima.

3.) Determinar la dirección respecto de la cual, la derivada direccional de la función $f(x,y,z) = xy^2 + yz + z^2x^2$ en el punto $(1,2,-1)$, tenga un valor máximo.

Granada, 21 de Diciembre de 2011